HALLIDAY • RESNICK

Volume 3

Eletromagnetismo

Fundamentos de Física

8ª Edição

LTC

Jearl Walker

Fórmulas Matemáticas*

Equação do Segundo Grau

Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Produtos de Vetores

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \operatorname{sen}\theta$$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Derivadas e Integrais

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x \qquad \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Regra de Cramer

Um sistema de duas equações com duas incógnitas x e y,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

*Uma lista mais completa está no Apêndice E.

Prefixos do SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	quilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Fundamentos de Física

ELETROMAGNETISMO

Duzentos anos de tradição produzindo, publicando e comercializando livros. Este é o valor da marca Wiley que, desde sua fundação, em 1807, acompanha as mudanças políticas, sociais e econômicas ocorridas em todo o mundo.

Renomada pela divulgação das mais recentes teorias e técnicas acadêmicas nas áreas científica, tecnológica e de engenharia, a editora norte-americana promove, assim, o intercâmbio e o debate globais.

A tradicional parceria da LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, com a John Wiley & Sons, Inc., responde, em parte, por esse sucesso no Brasil, uma vez que traz para o mercado conceitos técnico-científicos de ponta essenciais para a formação das futuras gerações de profissionais e pesquisadores.

HALLIDAY/RESNICK

Fundamentos de Física

8E

VOLUME 3

Jearl Walker

Cleveland State University

Tradução e Revisão Técnica

Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.

Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia — IME

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Cover Designer: Norm Christiansen
Cover Image: ©Eric Heller/Photo Researchers
Usada com permissão de John Wiley & Sons, Inc.

Editoração Eletrônica: Performa

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

H184f
v.3

Halliday, David, 1916-
Fundamentos de física, volume 3 : eletromagnetismo / Halliday, Resnick, Jearl Walker ; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. - Rio de Janeiro : LTC, 2009.
4v.

Tradução de: Fundamentals of physics, 8th ed.
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-216-1607-8

1. Eletromagnetismo. 2. Física. I. Resnick, Robert, 1923-. II. Walker, Jearl, 1945-. III. Título.

08-4687. CDD: 537
CDU: 537.6/.8

Sumário Geral

Volume 1

Volume 2

Volume 3

Volume 4

Sumário

VOLUME 3

Prefácio

Diversão com um grande desafio. É assim que venho encarando a física desde o dia em que Sharon, uma das alunas do curso que eu estava ministrando como aluno de doutorado, me perguntou de repente:

— O que isso tem a ver com a minha vida?

Respondi prontamente:

— Sharon, isso é física! Tem tudo a ver com a sua vida!

A moça me pediu um exemplo. Dei tratos à bola, mas não consegui encontrar nenhum. Naquela noite criei *O Circo Voador da Física* para Sharon, mas também para mim, porque percebi que o problema de Sharon também era meu. Tinha passado seis anos estudando em dezenas de livros de física escritos com a melhor das intenções, mas alguma coisa estava faltando. A física é o assunto mais interessante do mundo porque descreve o modo como o mundo funciona, mas não havia nos livros qualquer ligação com o mundo real. A diversão estava faltando.

Procurei incluir muita física do mundo real neste livro, ligando-o à nova edição de *O Circo Voador da Física*. Boa parte dos assuntos vem das minhas aulas, onde posso julgar, pelas expressões e comentários dos alunos, quais são os assuntos e apresentações que funcionam. As notas que tomei a respeito de meus sucessos e fracassos ajudaram a estabelecer as bases para este livro. Minha mensagem aqui é a mesma que dei para todos os estudantes que encontrei desde o dia em que Sharon fez aquele comentário:

— Sim, você *pode* usar os conceitos básicos da física para chegar a conclusões válidas a respeito do mundo real, e é nesse entendimento do mundo real que está a diversão.

Tive muitos objetivos ao escrever este livro, mas o principal foi proporcionar aos professores um instrumento através do qual possam ensinar os alunos a estudar assuntos científicos, identificar conceitos fundamentais, pensar a respeito de questões científicas e resolver problemas quantitativos. Esse processo não é fácil, nem para os alunos nem para os professores. Na verdade, o curso associado a este livro pode ser um dos mais difíceis do currículo. Entretanto, pode ser também um dos mais interessantes, pois revela os mecanismos fundamentais do mundo, responsáveis por todas as aplicações científicas e de engenharia.

Muitos usuários da sétima edição (professores e alunos) enviaram comentários e sugestões para aperfeiçoar o livro. Esses melhoramentos foram incorporados à exposição e aos problemas desta edição. Nós (o autor Jearl Walker e a editora John Wiley & Sons) vemos este livro como um projeto permanente, e gostaríamos de contar com uma maior participação dos leitores. Sinta-se à vontade para enviar sugestões, correções e comentários positivos ou negativos para a LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço eletrônico www.ltceditora.com.br. Talvez não seja possível responder a todas as sugestões, mas lemos e consideramos cada uma delas.

Principais Mudanças de Conteúdo

• Tópicos do *Circo Voador* foram introduzidos de várias formas: em textos de abertura dos capítulos, em exemplos e em problemas. Isso foi feito com dois objetivos: (1) tornar o assunto mais interessante e divertido; (2) mostrar ao aluno que o mundo que nos cerca pode ser examinado e compreendido usando os princípios fundamentais da física.

O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?

•28 Os ventos violentos de um tornado podem fazer com que pequenos objetos fiquem encravados em árvores, paredes de edifícios e até mesmo placas de sinalização de metal. Em uma simulação de laboratório um palito comum de madeira foi disparado por um canhão pneumático em um galho de carvalho. A massa do palito era 0,13 g, sua velocidade antes de penetrar no galho era 220 m/s e a profundidade de penetração foi 15 mm. Se o palito sofreu uma desaceleração constante, qual foi o módulo da força exercida pelo galho sobre o palito?

•••62 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-20*a*) com uma velocidade angular ω_i e um momento angular formado por duas partes: $I_{perna} = 1{,}44\ kg \cdot m^2$ da perna estendida, que faz um ângulo $\theta = 90{,}0°$ com o corpo, e $I_{tronco} = 0{,}660\ kg \cdot m^2$ do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima suas duas pernas fazem uma ângulo $\theta = 30°$ com o corpo e sua velocidade angular é ω_f (Fig. 11-20*b*). Supondo que I_{tronco} permanece o mesmo, qual é a valor da razão ω_f/ω_i?

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol B rebata uma bola na direção de um jogador F com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador F à posição da bola faz um ângulo ϕ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada ϕ em função do tempo t, supondo (a) que o jogador F está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor B.

IDEIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance R, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$.

3. *Salto em distância* Quando um atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao atleta uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Esta rotação, se não for controlada, não permite que o atleta chegue ao solo com a postura correta: na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem na areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que o atleta deixa o solo seu momento angular não pode mudar (é conservado), já que não está sujeito a nenhum torque externo. Entretanto, ele pode transferir a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (Fig. 11-19). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para parte final do salto.

• Os assuntos que também são discutidos em *O Circo Voador da Física* estão indicados pelo desenho de um biplano. A bibliografia do *Circo Voador* (mais de 10.000 referências a revistas científicas e de engenharia) pode ser encontrada no site http://www.flyingcircusofphysics.com.

• A lei da gravitação de Newton, a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart são agora apresentadas na notação de vetores unitários.

• A maior parte dos textos de abertura dos capítulos (exemplos de física aplicada que têm por objetivo despertar o interesse do leitor pelo assunto que será discutido no capítulo) é nova e foi extraída de artigos científicos em vários campos de pesquisa.

• Milhares de problemas no final dos capítulos foram reformulados para tornar mais claros tanto os enunciados como as respostas.

Características dos Capítulos

Textos de abertura. Uma situação curiosa é descrita no início de cada capítulo e explicada em algum ponto do texto para motivar o estudante a ler o capítulo. Esses textos, que constituem uma das características tradicionais de *Fundamentos de Física*, são baseados em pesquisas recentes publicadas em revistas de ciência, engenharia, medicina e direito.

O que É Física? O corpo de cada capítulo agora começa com essa pergunta e com uma resposta que diz respeito ao assunto do capítulo. (Um bombeiro hidráulico uma vez me perguntou: "Em que você trabalha?" Respondi: "Sou professor de física." O bombeiro pensou por alguns instantes e depois me perguntou: "O que é física?" A profissão do bombeiro dependia inteiramente da física, ainda que ele não soubesse o que é física. Muitos estudantes de física introdutória não sabem o que é física, mas supõem que ela é irrelevante para a carreira que escolheram.)

Os **Testes** são pontos intermediários em que se pergunta ao estudante: "Você é capaz de responder a essa pergunta usando um raciocínio baseado no texto ou no exemplo que acaba de ler?" Se a resposta é negativa, o estudante deve voltar e rever o que já leu antes de prosseguir no capítulo. Veja, por exemplo, o Teste 1 da Seção 4-3, do Capítulo 4, e o Teste 2 da Seção 11-4, do Capítulo 11. *As respostas de todos os testes estão no final do livro.*

Os **Exemplos** foram escolhidos para mostrar que os problemas de física devem ser resolvidos usando o raciocínio e não simplesmente introduzindo números em uma equação, sem nenhuma preocupação com o seu significado. Os exemplos com a indicação "Aumente sua capacidade" são, em geral, mais longos e apresentam mais comentários.

As **Idéias-chave** dos exemplos mostram ao estudante quais são os conceitos básicos necessários para resolver um problema. O que queremos dizer com essas idéias-chave é o seguinte: "Vamos começar a solução usando este conceito básico, um método que nos prepara para resolver muitos outros problemas. Não começamos sacando do bolso uma equação para uma simples substituição de números, um método que não nos prepara para nada."

As **Táticas para a solução de problemas** são instruções para ajudar os alunos principiantes a resolver problemas e evitar os erros mais comuns.

A **Revisão e Resumo** é um breve sumário do capítulo que contém os conceitos essenciais, mas não substitui a leitura do capítulo.

As **Perguntas** se parecem com os testes e requerem raciocínio e entendimento, em vez de cálculos. *As respostas das perguntas ímpares estão no final do livro.*

Os **Problemas** estão agrupados por seções e possuem uma indicação do grau de dificuldade. *As respostas dos problemas ímpares estão no final do livro.*

Símbolos. O quadro a seguir, que é repetido no início de cada lista de problemas, mostra os símbolos usados neste livro.

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema
Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Problemas adicionais. Esses problemas não estão classificados, de modo que cabe ao estudante determinar a que parte do capítulo se refere cada problema.

Características Adicionais

Raciocínio *versus* aplicação de fórmulas. Um dos principais objetivos deste livro é ensinar os estudantes a usar o raciocínio para resolver problemas, desde os princípios básicos até a solução final. Embora tenham sido incluídos (de propósito) alguns problemas que envolvem a simples aplicação de fórmulas, a maioria dos problemas exige algum tipo de raciocínio.

Capítulos de tamanho razoável. Para não acabar escrevendo um livro suficientemente grosso para deter uma bala (e a maioria dos estudantes), procurei manter os capítulos com um tamanho razoável. Explico o suficiente para colocar o estudante no caminho certo, mas não tanto que o estudante não precise analisar e combinar idéias. Afinal de contas, o estudante ainda vai ter necessidade de analisar e combinar idéias muito depois de ler este livro e completar o curso.

Uso de calculadoras gráficas. Quando os cálculos vetoriais de um exemplo podem ser feitos diretamente da tela de uma calculadora gráfica esse fato é indicado na solução do exemplo, mas é apresentada a solução tradicional através de componentes. Quando os cálculos vetoriais não podem ser feitos diretamente na tela o motivo é explicado.

Gráficos como enigmas. Estes são problemas nos quais se fornece um gráfico e pede-se um resultado que exige muito mais do que simplesmente ler um dado em um gráfico. Na verdade, a solução exige uma compreensão do significado físico do problema e dos princípios que estão por trás das equações associadas. Esses problemas se parecem com enig-

mas de Sherlock Holmes, já que cabe ao estudante determinar quais são os dados importantes. Veja, por exemplo, o problema 50 do Capítulo 4, o problema 12 do Capítulo 5 e o problema 22 do Capítulo 9.

Problemas de física aplicada, baseados em pesquisas publicadas, aparecem em muitos lugares, como os textos de abertura dos capítulos, os exemplos e os problemas. Veja, por exemplo, o texto de abertura do Capítulo 4, o Exemplo 4-8, da Seção 4-6, e o problema 62 do Capítulo 11. Também existem séries de problemas encadeados, como os problemas 2, 39 e 61 do Capítulo 6.

Problemas com situações inusitadas. Aqui está um desses problemas, escolhido entre as centenas que existem no livro: o problema 69 do Capítulo 5 se baseia na história verdadeira de como o vôo 143 da Air Canada ficou sem combustível a 7,9 km de altitude porque a tripulação e o pessoal de terra não usaram as unidades corretas para a quantidade de combustível nos tanques (uma lição importante para os estudantes que costumam "misturar" unidades).

Para o Professor

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
Uma editora integrante do
GEN | Grupo Editorial Nacional
A/C Editorial Técnico
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br.
www.ltceditora.com.br

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para este livro. J. Richard Christman, da U.S. Coast Guard Academy, mais uma vez criou muitos suplementos valiosos; suas recomendações para este livro foram inestimáveis. Sen-Ben Liao, do Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton, da Southern Polytechnic State University, e Jerry Shi, do Pasadena City College, foram responsáveis pela tarefa hercúlea de resolver todos os problemas do livro. Na John Wiley o livro foi apoiado por Stuart Johnson, o editor que supervisionou todo o projeto, Tom Kulesa, que coordenou o estado-da-arte do pacote de mídia, e Geraldine Osnato, que gerenciou uma superequipe para produzir um impressionante pacote de suplementos. Agradecemos a Elizabeth Swain, editora de produção, por ter juntado todas as partes durante o complexo processo de produção. Agradecemos também a Maddy Lesure, pelo seu projeto gráfico tanto do texto quanto da produção da capa; Lee Goldstein, que foi responsável pela diagramação; Helen Walden, pela edição dos originais; Anna Melhorn, que cuidou das ilustrações; e Lilian Brady, que se encarregou da revisão. Hilary Newman foi brilhante na busca de fotografias inusitadas e interessantes. Tanto a editora John Wiley & Sons, Inc. como Jearl Walker gostariam de agradecer às seguintes pessoas por comentários e idéias a respeito da 7.ª edição: Richard Woodard, University of Florida; David Wick, Clarkson University; Patrick Rapp, University of Puerto Rico em Mayagüez; Nora Thornber, Raritan Valley Community College; Laurence I. Gould, University of Hartford; Greg Childers, California State University em Fullerton; Asha Khakpour, California State University em Fullerton; Joe F. McCullough, Cabrillo College. Finalmente, nossos revisores externos realizaram um trabalho excepcional, e expressamos a cada um deles nossos agradecimentos.

Maris A. Abolins
Michigan State University

Edward Adelson
Ohio State University

Nural Akchurin
Texas Tech

Barbara Andereck
Ohio Wesleyan University

Mark Arnett
Kirkwood Community College

Arun Bansil
Northeastern University

Richard Barber
Santa Clara University

Neil Basecu
Westchester Community College

Anand Batra
Howard University

Richard Bone
Florida International University

Michael E. Browne
University of Idaho

Timothy J. Burns
Leeward Community College

Joseph Buschi
Manhattan College

Philip A. Casabella
Rensselaer Polytechnic Institute

Randall Caton
Christopher Newport College

Roger Clapp
University of South Florida

W. R. Conkie
Queen's University

Renate Crawford
University of Massachusetts-Dartmouth

Mike Crivello
San Diego State University

Robert N. Davie, Jr.
St. Petersburg Junior College

Cheryl K. Dellai
Glendale Community College

Eric R. Dietz
California State University em Chico

N. John DiNardo
Drexel University

Eugene Dunnam
University of Florida

Robert Endorf
University of Cincinnati

F. Paul Esposito
University of Cincinnati

Jerry Finkelstein
San Jose State University

Robert H. Good
California State University-Hayward

John B. Gruber
San Jose State University

Ann Hanks
American River College

Randy Harris
University of California-Davis

Samuel Harris
Purdue University

Harold B. Hart
Western Illinois University

Rebecca Hartzler
Seattle Central Community College

John Hubisz
North Carolina State University

Joey Huston
Michigan State University

David Ingram
Ohio University

Shawn Jackson
University of Tulsa

Hector Jimenez
University of Puerto Rico

Sudhakar B. Joshi
York University

Leonard M. Kahn
University of Rhode Island

Leonard Kleinman
University of Texas em Austin

Craig Kletzing
University of Iowa

Arthur Z. Kovacs
Rochester Institute of Technology

Kenneth Krane
Oregon State University

Priscilla Laws
Dickinson College

Edbertho Leal
Polytechnic University of Puerto Rico

Vern Lindberg
Rochester Institute of Technology

Peter Loly
University of Manitoba

Andreas Mandelis
University of Toronto

Robert R. Marchini
Memphis State University

Paul Marquard
Caspar College

David Marx
Illinois State University

James H. McGuire
Tulane University

David M. McKinstry
Eastern Washington University

Eugene Mosca
United States Naval Academy

James Napolitano
Rensselaer Polytechnic Institute

Michael O'Shea
Kansas State University

Patrick Papin
San Diego State University

Kiumars Parvin
San Jose State University

Robert Pelcovits
Brown University

Oren P. Quist
South Dakota State University

Joe Redish
University of Maryland

Timothy M. Ritter
University of North Carolina em Pembroke

Gerardo A. Rodriguez
Skidmore College

John Rosendahl
University of California em Irvine

Todd Ruskell
Colorado School of Mines

Michael Schatz
Georgia Institute of Technology

Darrell Seeley
Milwaukee School of Engineering

Bruce Arne Sherwood
North Carolina State University

Ross L. Spencer
Brigham Young University

Paul Stanley
Beloit College

Harold Stokes
Brigham Young University

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Jay D. Strieb
Villanova University

Dan Styer
Oberlin College

Michael Tammaro
University of Rhode Island

Marshall Thomsen
Eastern Michigan University

David Toot
Alfred University

Tung Tsang
Howard University

J. S. Turner
University of Texas em Austin

T. S. Venkataraman
Drexel University

Gianfranco Vidali
Syracuse University

Fred Wang
Prairie View A & M

Robert C. Webb
Texas A & M University

William M. Whelan
Ryerson Polytechnic University

George Williams
University of Utah

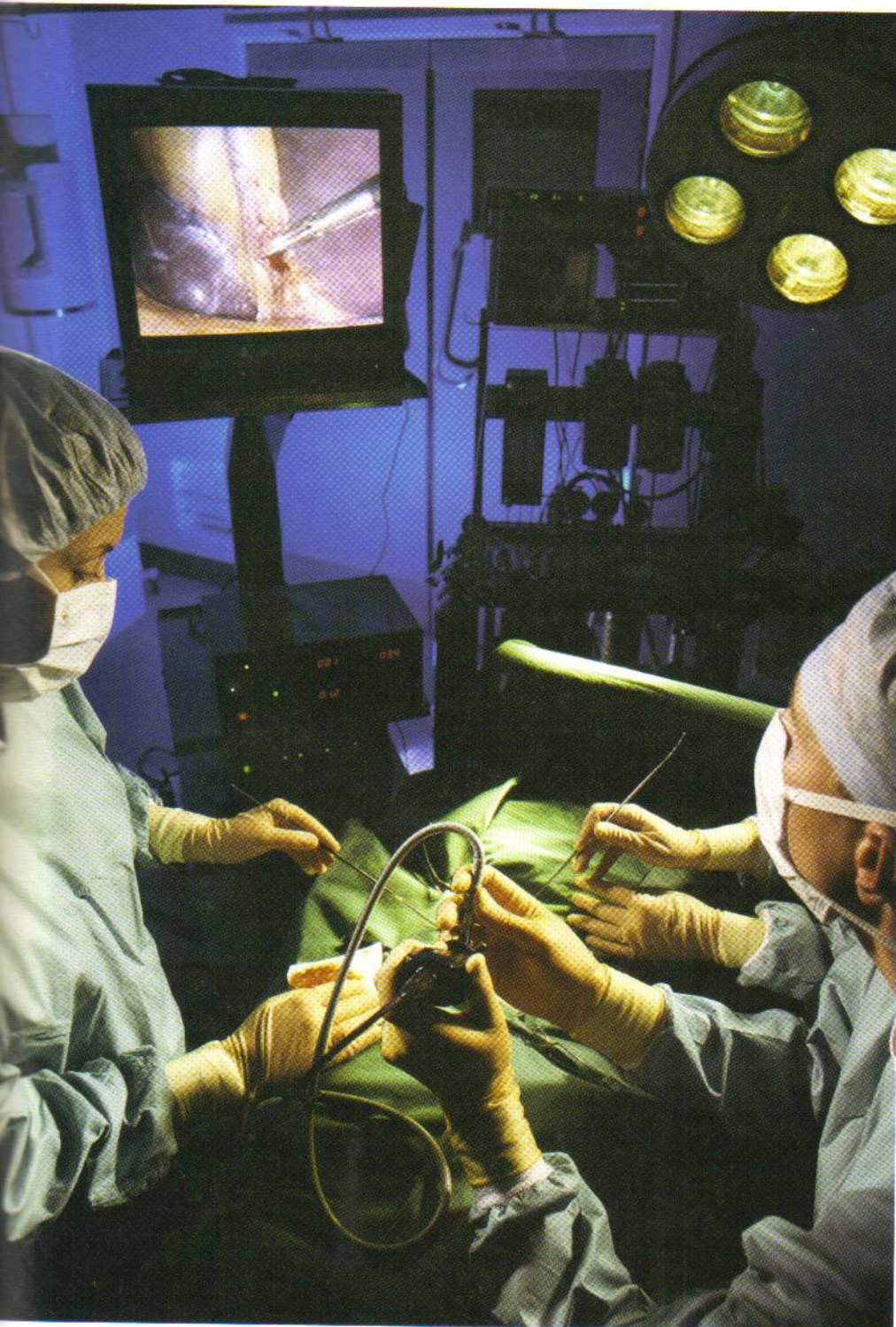
David Wolfe
University of New Mexico

Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@grupogen.com.br.

Fundamentos de Física

ELETROMAGNETISMO

Cargas Elétricas

Os médicos procuram tomar todas as precauções para evitar que um paciente seja infectado por bactérias. As paredes e o chão são desinfetados; médicos e enfermeiros usam máscaras e lavam as mãos antes de calçar luvas; os instrumentos são esterilizados a altas temperaturas e em banhos de álcool. Continuam a existir, porém, fontes sutis de bactérias nos hospitais, como acontece, possivelmente, no centro cirúrgico mostrado nesta fotografia.

Onde está a fonte de contaminação?

A resposta está neste capítulo.

Samuel Ashfield/Taxi/Getty Images, Inc.

21-1 O QUE É FÍSICA?

Estamos cercados por aparelhos que dependem da física do eletromagnetismo, que é a combinação de fenômenos elétricos e magnéticos. Esta física é responsável pelo funcionamento dos computadores, dos receptores de televisão, dos aparelhos de rádio, das lâmpadas e até mesmo pelo modo como uma folha de plástico gruda em um recipiente de vidro. Esta física também explica muitos fenômenos naturais; não só mantém coesos todos os átomos e moléculas do mundo, mas também produz o relâmpago, a aurora e o arco-íris.

A física do eletromagnetismo foi estudada pela primeira vez pelos filósofos da Grécia antiga, que descobriram que se um pedaço de âmbar fosse friccionado e depois aproximado de pedaços de palha, esta seria atraída pelo âmbar. Hoje sabemos que a atração entre o âmbar e a palha se deve a uma força elétrica. Os filósofos gregos também descobriram que se um certo tipo de pedra (um ímã natural) é aproximado de pedacinhos de ferro, o ferro é atraído pela pedra. Hoje sabemos que a atração entre o ímã e a pedra se deve a uma força magnética.

A partir dessa origem modesta na Grécia antiga, as ciências da eletricidade e do magnetismo se desenvolveram independentemente por muitos séculos, até 1820, quando Hans Christian Oersted descobriu uma ligação entre elas: uma corrente elétrica em um fio é capaz de mudar a direção da agulha de uma bússola. Curiosamente, Oersted fez esta descoberta, que foi para ele uma grande surpresa, quando preparava uma demonstração para os alunos de física.

A nova ciência do eletromagnetismo foi cultivada por cientistas de muitos países. Um dos mais ativos foi Michael Faraday, um experimentalista muito competente com um raro talento para a intuição e a visualização de fenômenos físicos. Um sinal desse talento é o fato de que seus cadernos de anotações de laboratório não contêm uma única equação. Em meados do século XIX, James Clerk Maxwell colocou as idéias de Faraday em forma matemática, introduziu muitas idéias próprias e estabeleceu uma base teórica sólida para o eletromagnetismo.

Nossa discussão do eletromagnetismo se estenderá pelos próximos 16 capítulos. Vamos começar pelos fenômenos elétricos, e nosso primeiro passo será discutir a natureza das cargas elétricas e das forças elétricas.

21-2 | Cargas Elétricas

Em tempo seco, é possível produzir uma fagulha simplesmente caminhando em certos tipos de tapetes e depois aproximando a mão de uma maçaneta, torneira ou mesmo um amigo. Também podem surgir centelhas quando você despe um suéter ou remove as roupas de uma secadora. As centelhas e a "atração eletrostática" (como a que aparece na Fig. 21-1) são em geral consideradas uma mera curiosidade. Entretanto, se você produz uma centelha elétrica ao manipular um microcircuito de um computador, o componente pode ser inutilizado.

FIG. 21-1 O acúmulo de cargas elétricas, um fenômeno que acontece quando o tempo está seco, faz com que estes pedacinhos de papel sejam atraídos pelo pente. *(Fundamental Photographs)*

Esses exemplos revelam que existem cargas elétricas em nosso corpo, nos suéteres, nos tapetes, nas maçanetas e nas torneiras. Na verdade, todos os corpos contêm muitas cargas elétricas. A **carga elétrica** é uma propriedade intrínseca das partículas fundamentais de que é feita a matéria; em outras palavras, é uma propriedade associada à própria existência dessas partículas.

A grande quantidade de cargas que existem em qualquer objeto geralmente não pode ser observada porque o objeto contém quantidades iguais de dois tipos de cargas: *cargas positivas* e *cargas negativas*. Quando existe essa igualdade (ou *equilíbrio*) de cargas, dizemos que o objeto é *eletricamente neutro*, ou seja, sua carga *total* é zero. Quando as quantidades dos dois tipos de cargas contidas em um corpo são diferentes, a carga total é diferente de zero e dizemos que o objeto está *eletricamente carregado*. A diferença entre as quantidades dos dois tipos de cargas é sempre muito menor do que as quantidades de cargas positivas e de cargas negativas contidas no objeto.

Os objetos eletricamente carregados interagem exercendo forças uns sobre os outros. Para mostrar que isso é verdade, podemos carregar um bastão de vidro friccionando uma das extremidades com um pedaço de seda. Nos pontos de contato entre o bastão e a seda pequenas quantidades de carga são transferidas de um material para o outro, quebrando a neutralidade elétrica de ambos. (*Friccionamos* a seda no bastão para aumentar o número de pontos de contato e, portanto, a quantidade de cargas transferidas.)

Suponha que agora o bastão carregado seja suspenso por um fio para *isolá-lo eletricamente* dos outros objetos, o que impede que sua carga elétrica mude. Quando aproximamos do bastão um segundo bastão eletricamente carregado (Fig. 21-2*a*), os dois bastões sofrem uma *repulsão*, ou seja, cada bastão é submetido a uma força que tende a afastá-lo do outro bastão. Por outro lado, quando friccionamos um bastão de *plástico* com um pedaço de lã e o aproximamos do bastão de vidro suspenso (Fig. 21-2*b*), cada um é submetido a uma força de *atração*, ou seja, cada um é submetido a uma força que tende a aproximá-lo do outro bastão.

Podemos compreender essas duas demonstrações em termos de cargas positivas e negativas. Quando um bastão de vidro é friccionado com um pedaço de seda o vidro perde uma pequena parte de suas cargas negativas e, portanto, fica com uma pequena quantidade de cargas positivas não compensadas (representadas pelos sinais positivos na Fig. 21-2*a*). Quando o bastão de plástico é friccionado com um pedaço de lã o plástico adquire uma pequena quantidade de cargas negativas não compensadas (representadas pelos sinais negativos na Fig. 21.21*b*). As duas demonstrações revelam o seguinte:

FIG. 21-2 (*a*) Dois bastões carregados com cargas do mesmo sinal se repelem. (*b*) Dois bastões carregados com cargas de sinais opostos se atraem. Os sinais positivos indicam um excesso de cargas positivas, e os sinais negativos um excesso de cargas negativas.

 Cargas de mesmo sinal se repelem e cargas de sinais opostos se atraem.

Na Seção 21-4 vamos expressar essa regra em termos matemáticos, na chamada lei de Coulomb da *força eletrostática* (ou *força elétrica*) entre duas cargas. O termo *eletrostática* é usado para chamar atenção para o fato de que a velocidade relativa entre as cargas é nula ou muito pequena.

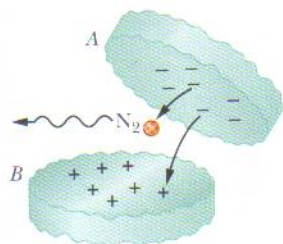
Os termos "positiva" e "negativa" para os dois tipos de carga foram escolhidos arbitrariamente por Benjamin Franklin. Ele poderia muito bem ter feito a escolha inversa ou usado outras palavras com significados opostos para designar os dois tipos de eletricidade. (Franklin era um cientista de renome internacional. Acredita-se que seus triunfos diplomáticos na França, durante a Guerra de Independência dos Estados Unidos, tenham sido facilitados, ou mesmo tornados possíveis, pela reputação de Franklin no campo da ciência.)

A atração e a repulsão entre corpos eletricamente carregados têm muitas aplicações industriais, como a pintura eletrostática, o recolhimento de cinzas volantes em chaminés e a xerografia. A Fig. 21-3 mostra uma partícula de plástico usada em copiadoras, coberta por partículas ainda menores de um pó preto conhecido como *toner* que são atraídas para a partícula de plástico por forças eletrostáticas. As partículas de *toner*, negativamente carregadas, são transferidas da partícula de plástico para um tambor rotativo, onde existe uma imagem positivamente carregada do documento a ser copiado. Uma folha de papel eletricamente carregado atrai as partículas de *toner*, que são fixadas permanentemente no papel por aquecimento para produzir uma cópia.

FIG. 21-3 Partícula de plástico usada nas copiadoras; a partícula está coberta por partículas ainda menores de *toner*, que são atraídas para a partícula de plástico por forças eletrostáticas. O diâmetro da partícula de plástico é de aproximadamente 0,3 mm. *(Cortesia da Xerox)*

21-3 | Condutores e Isolantes

Podemos classificar os materiais de acordo com a facilidade com a qual as cargas elétricas se movem em seu interior. Os **condutores** são materiais nos quais as cargas elétricas se movem com facilidade, como os metais (como o cobre dos fios elétricos), o corpo humano e a água de torneira. Os **não-condutores**, também conhecidos como **isolantes**, são materiais nos quais as cargas não podem se mover, como os plásticos (usados para isolar fios elétricos), a borracha, o vidro e a água destilada.

FIG. 21-4 Uma barra de cobre neutra é isolada eletricamente da terra ao ser suspensa por um fio de material não-condutor. Qualquer das extremidades da barra é atraída por uma barra de plástico eletricamente carregada. Na figura, elétrons de condução da barra de cobre são repelidos para a extremidade mais afastada da barra pela carga negativa da barra de plástico, deixando a extremidade mais próxima com uma carga total positiva. Como está mais próxima, esta carga positiva é atraída pela carga negativa da barra de plástico com mais força do que a carga negativa que se acumulou na outra extremidade é repelida, o que faz girar a barra de cobre.

Os **semicondutores** são materiais com propriedades elétricas intermediárias entre as dos condutores e as dos não-condutores, como o silício (usado nos microcircuitos dos computadores) e o germânio. Os **supercondutores** são condutores *perfeitos*, ou seja, materiais nos quais as cargas se movem sem encontrar *nenhuma* resistência. Nos próximos capítulos vamos discutir apenas os condutores e não-condutores.

Vamos começar com um exemplo de como a condução de eletricidade pode eliminar o excesso de cargas em um objeto. Quando friccionamos uma barra de cobre com um pedaço de lã, cargas são transferidas da lã para o cobre. Entretanto, se você segurar ao mesmo tempo a barra de cobre e uma torneira, a barra de cobre não ficará carregada. O que acontece é que você, a barra de cobre e a torneira são condutores ligados, através do encanamento, à Terra, que é um imenso condutor. Como as cargas em excesso depositadas no cobre pela lã se repelem, afastam-se umas das outras passando primeiro para a sua mão, depois para a torneira e finalmente para a Terra, onde se espalham. O processo deixa a barra de cobre eletricamente neutra.

Quando estabelecemos um caminho constituído por materiais condutores entre um objeto e a Terra dizemos que o objeto está *aterrado*; quando a carga de um objeto é neutralizada pela eliminação do excesso de cargas positivas ou negativas através da Terra dizemos que o objeto foi *descarregado*. Se em vez de segurar diretamente a barra de cobre você a segura através de um cabo de material não-condutor, o caminho de condutores até a Terra fica interrompido, e a barra pode ser carregada por atrito (a carga permanece na barra), contanto que você não toque nela com a mão.

As propriedades dos condutores e não-condutores se devem à estrutura e à natureza elétrica dos átomos. Os átomos são formados por três tipos de partículas: os *prótons*, que possuem carga elétrica positiva, os *elétrons*, que possuem carga elétrica negativa, e os *nêutrons*, que não possuem carga elétrica. Os prótons e nêutrons ocupam a região central do átomo, conhecida como *núcleo*.

As cargas de um próton isolado e de um elétron isolado têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos; assim, um átomo eletricamente neutro contém o mesmo número de prótons e elétrons. Os elétrons são mantidos nas proximidades do núcleo porque possuem uma carga elétrica oposta à dos prótons do núcleo e, portanto, são atraídos para o núcleo.

Quando os átomos de um material condutor como o cobre se unem para formar um sólido, alguns dos elétrons mais afastados do núcleo (e que, portanto, são atraídos com uma força menor) se tornam livres para vagar pelo material, deixando para trás átomos positivamente carregados (*íons positivos*). Esses elétrons móveis recebem o nome de *elétrons de condução*. Os materiais não-condutores possuem um número muito pequeno, ou mesmo nulo, de elétrons de condução.

O experimento da Fig. 21-4 demonstra a mobilidade das cargas em um material condutor. Uma barra de plástico negativamente carregada atrai qualquer uma das extremidades de uma barra neutra de cobre. O que acontece é que os elétrons de condução da extremidade mais próxima da barra de cobre são repelidos pela carga negativa da barra de plástico. Alguns desses elétrons de condução se acumulam na outra extremidade da barra de cobre, deixando a extremidade mais próxima com uma falta de elétrons e, portanto, com uma carga total positiva. Como está mais próxima da barra de plástico, esta carga positiva é atraída pela carga negativa da barra de plástico com mais força do que a carga negativa que se acumulou na outra extremidade é repelida. Embora a barra de cobre como um todo continue a ser eletricamente neutra, dizemos que possui uma *carga induzida*, o que significa que algumas das cargas positivas e negativas foram separadas pela presença de uma carga próxima.

Analogamente, se uma barra de vidro positivamente carregada é aproximada de uma barra de cobre neutra, os elétrons de condução da barra de cobre são atraídos para a barra de vidro. Assim, a extremidade da barra de cobre mais próxima da barra de vidro fica negativamente carregada e a outra extremidade fica positivamente carregada, e mais uma vez a barra de cobre passa a possuir uma carga induzida. Embora a barra de cobre continue a ser eletricamente neutra, é atraída pela barra de vidro.

FIG. 21-5 Dois pedaços de uma pastilha de gaultéria se afastando um do outro. Os elétrons que saltam da superfície negativa do pedaço *A* para a superfície positiva do pedaço *B* colidem com moléculas de nitrogênio (N_2) do ar.

Observe que apenas os elétrons de condução, que possuem carga negativa, podem se mover; os íons positivos permanecem onde estavam. Isso significa que um objeto se torna positivamente carregados apenas através da *remoção de cargas negativas*.

Clarões Azuis de uma Pastilha

Uma demonstração indireta da atração de cargas de sinais opostos envolve pastilhas de gaultéria (*wintergreen*, em inglês).* Se você deixar os olhos se adaptarem à escuridão durante cerca de 15 minutos e pedir a um amigo para mastigar uma pastilha de gaultéria, verá um clarão azul sair da boca do seu amigo a cada dentada. Quando a pastilha é partida em pedaços por uma dentada, é provável que cada pedaço fique com um número diferente de elétrons. Suponha que a pastilha se parta nos pedaços *A* e *B* e que *A* possua mais elétrons na superfície que *B* (Fig. 21-5). Isso significa que *B* possui íons positivos (átomos que perderam elétrons para *A*) na superfície. Como os elétrons de *A* são fortemente atraídos para os íons positivos de *B*, alguns desses elétrons saltam de *A* para *B*.

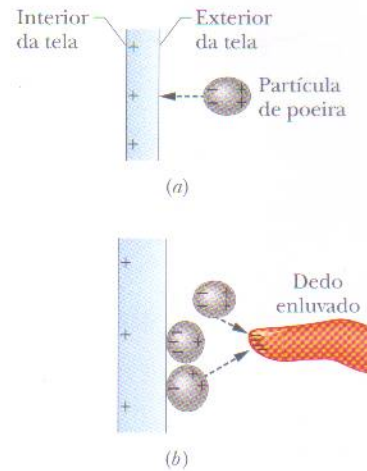
Entre os pedaços *A* e *B* existe ar, que é constituído principalmente por moléculas de nitrogênio (N_2). Muitos dos elétrons que estão passando de *A* para *B* colidem com moléculas de nitrogênio, fazendo com que emitam luz ultravioleta. Os olhos humanos não conseguem ver esse tipo de radiação. Entretanto, as moléculas de gaultéria na superfície da pastilha absorvem a radiação ultravioleta e emitem luz azul; é por isso que você vê clarões azuis saindo da boca do seu amigo.

FIG. 21-6 (*a*) Vista de perfil da tela de um monitor. A tela positivamente carregada induz uma carga em uma partícula de poeira eletricamente neutra. (*b*) Ao ser aproximado da tela, um dedo enluvado (que não foi desenhado em escala) adquire uma carga induzida e pode atrair partículas de poeira do ar e da tela.

Contaminação Bacteriana e a Força Eletrostática

A força eletrostática pode desempenhar um papel sutil na contaminação bacteriana de um hospital. Nas cirurgias endoscópicas, por exemplo, o médico observa o interior do corpo do paciente na tela de um monitor. Nos monitores convencionais (mas não nos monitores de cristal líquido) a imagem é produzida por elétrons emitidos por um canhão eletrônico e atraídos para uma tela positivamente carregada. A tela carregada também atrai partículas presentes no ar, como poeira, fiapos de linha e células epiteliais. As partículas negativamente carregadas são atraídas pela carga positiva da tela. No caso de partículas eletricamente neutras os elétrons se concentram no lado mais próximo da tela, o que faz com que as partículas adquiram uma carga induzida (Fig. 21-6*a*). As partículas neutras, portanto, também são atraídas para a tela, do mesmo modo como a barra de cobre é atraída pela barra de plástico na Fig. 21-4.

Como muitas das partículas atraídas pela tela do monitor contêm bactérias, a tela fica contaminada. Suponha que o cirurgião aproxime o dedo enluvado da tela para mostrar alguma coisa à equipe médica. Nesse caso, a tela positivamente carregada produz um excesso de elétrons na ponta do dedo (Fig. 21-6*b*). A força de atração desses elétrons, por sua vez, faz com que partículas contaminadas (presentes no ar ou na tela do monitor) se acumulem na luva. Quando o cirurgião toca o paciente com as luvas contaminadas as bactérias podem passar para a pele ou (o que é ainda pior) para os órgãos internos do paciente. Para evitar que isso aconteça, os cirurgiões atualmente são alertados para não aproximar os dedos da tela dos monitores.

Uma contaminação semelhante pode ocorrer nos aventais de plástico que muitos médicos e enfermeiros usam para não manchar a roupa de sangue. Esses aventais podem adquirir uma carga elétrica quando são retirados do armário ou esfregados repetidamente na roupa ou na pele, especialmente se o ar estiver muito seco. Quando um avental se torna eletricamente carregado pode atrair bactérias e poeira contaminada do ar. Como é inevitável que médicos e enfermeiros toquem nos próprios aventais, as bactérias podem ser facilmente transferidas para os pacientes durante exames ou cirurgias.

---

*Essas pastilhas, muito populares nos Estados Unidos, são conhecidas como LifeSavers. (N.T.)

TESTE 1 A figura mostra cinco pares de placa: *A*, *B* e *D* são placas de plástico carregadas, e *C* é uma placa de cobre eletricamente neutra. As forças eletrostáticas entre três dos pares de placas estão indicadas. Os outros dois pares de placas se atraem ou se repelem?

21-4 | Lei de Coulomb

Duas partículas carregadas exercem forças uma sobre a outra. Se as cargas das partículas têm o mesmo sinal, as partículas se repelem (Fig. 21-7*a* e *b*), ou seja, são submetidas a forças que tendem a afastá-las. Se as cargas das partículas têm sinais opostos, as partículas se atraem (Fig. 21-7*c*), ou seja, são submetidas a forças que tendem a aproximá-las.

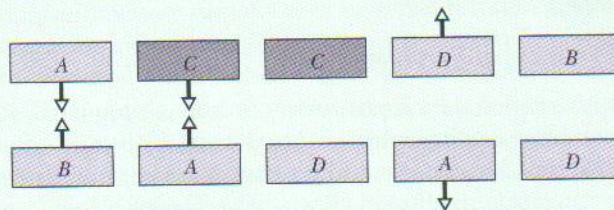
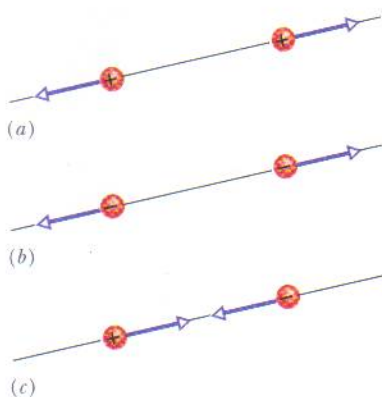



FIG. 21-7 Duas partículas carregadas se repelem se as cargas forem (*a*) positivas ou (*b*) negativas. (*c*) As partículas se atraem se as cargas tiverem sinais opostos.

Esta força de repulsão ou atração associada à carga elétrica dos objetos é chamada de **força eletrostática**. A lei que permite calcular a força exercida por *partículas* carregadas é chamada de **lei de Coulomb** em homenagem a Charles-Augustin de Coulomb, que a propôs em 1785, com base em experimentos de laboratório. Em termos das partículas da Fig. 21-8, onde a partícula 1 tem uma carga q_1 e a partícula 2 tem uma carga q_2, a força a que está submetida a partícula 1 é dada por

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(lei de Coulomb)}, \tag{21-1}$$

onde $\hat{r}$ é um vetor unitário na direção da reta que liga as duas partículas, r é a distância entre as partículas e k é uma constante. (Como qualquer vetor unitário, $\hat{r}$ tem módulo 1 e é adimensional; sua função é indicar uma orientação no espaço.) Se as partículas têm cargas de mesmo sinal a força a que a partícula 1 é submetida tem o sentido de $\hat{r}$; se as partículas têm cargas de sinais opostos, a força tem o sentido oposto ao de $\hat{r}$.

Curiosamente, a Eq. 21-1 tem a mesma forma que a equação de Newton (Eq. 13-3) para a força gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(lei de Newton)}, \tag{21-2}$$

onde G é a constante gravitacional.

A constante k da Eq. 21-1, por analogia com a constante gravitacional G da Eq. 21-2, é chamada de *constante eletrostática*. As duas equações descrevem leis do tipo inverso do quadrado que envolvem uma propriedade de partículas, massa em um caso, carga no outro. Entretanto, as forças gravitacionais são sempre atrativas, enquanto as forças eletrostáticas podem ser atrativas ou repulsivas, dependendo dos sinais das duas cargas. A diferença resulta do fato de que existe apenas um tipo de massa, mas existem dois tipos de carga elétrica.

A lei de Coulomb resistiu a todos os testes experimentais; até hoje não foi encontrada nenhuma exceção. A lei é válida até mesmo no interior dos átomos, onde descreve corretamente a força de atração entre o núcleo positivo e os elétrons negativos, enquanto a mecânica newtoniana deixa de ser válida nesse contexto e deve ser substituída pela mecânica quântica. A lei de Coulomb também explica corretamente as forças que unem os átomos para formar moléculas e as forças que unem os átomos e moléculas para formar sólidos e líquidos.

A unidade de carga no SI é o **coulomb**. Por razões práticas, que têm a ver com a precisão das medidas, o coulomb é obtido a partir da unidade do SI para a *corrente*

elétrica, o *ampère*. Corrente elétrica é a taxa de variação com o tempo dq/dt da carga que passa por um ponto ou região do espaço. A corrente elétrica será discutida com detalhes no Capítulo 26. No momento, vamos nos limitar a usar a relação

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{(corrente elétrica)}, \tag{21-3}$$

onde i é a corrente elétrica (em ampères) e dq (em coulombs) é a quantidade de carga que passa por um ponto ou região do espaço no intervalo de tempo dt (em segundos). De acordo com a Eq. 21-3,

$$1\ \text{C} = (1\ \text{A})(1\ \text{s}).$$

Por razões históricas (e também para simplificar outras equações), a constante eletrostática k da Eq. 21-1 é escrita na forma $1/4\pi\varepsilon_0$. Nesse caso, o módulo da força na lei de Coulomb se torna

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \text{(lei de Coulomb)}. \tag{21-4}$$

As constantes das Eqs. 21-1 e 21-4 têm o valor

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2. \tag{21-5}$$

A constante ε_0, conhecida como **permissividade do vácuo**, às vezes aparece separadamente nas equações e tem o valor

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2. \tag{21-6}$$

Outra semelhança entre a força gravitacional e a força eletrostática é que ambas obedecem ao princípio de superposição. Em um sistema com n partículas carregadas as partículas interagem independentemente, aos pares, e a força que age sobre uma das partículas, a partícula 1, por exemplo, é dada pela soma vetorial

$$\vec{F}_{1,\text{tot}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}, \tag{21-7}$$

onde, por exemplo, $\vec{F}_{14}$ é a força que age sobre a partícula 1 devido à presença da partícula 4. Uma expressão idêntica pode ser aplicada à força gravitacional.

Finalmente, ao teorema da casca, que se revelou tão útil em nosso estudo da gravitação, também correspondem teoremas análogos na eletrostática:

- Uma casca com uma distribuição uniforme de carga atrai ou repele uma partícula carregada situada do lado de fora da casca como se toda a carga da casca estivesse situada no centro.
- Se uma partícula carregada está situada no interior de uma casca com uma distribuição uniforme de carga, a casca não exerce nenhuma força eletrostática sobre a partícula.

(No primeiro teorema, supomos que a carga da casca é muito maior que a carga da partícula, o que permite desprezar qualquer redistribuição da carga da casca devido à presença da partícula.)

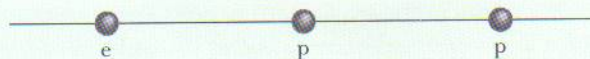
FIG. 21-8 A força eletrostática sobre a partícula 1 pode ser descrita em termos de um vetor unitário $\hat{r}$ na direção da reta que liga as duas partículas.

Condutores Esféricos

Se um excesso de cargas é depositado em uma casca esférica feita de material condutor, a carga em excesso se distribui uniformemente na superfície (externa) da casca. Assim, por exemplo, se colocamos elétrons em excesso em uma casca esférica metálica esses elétrons se repelem mutuamente e se espalham pela superfície externa até ficarem uniformemente distribuídos. Este é o arranjo que maximiza as distâncias entre todos os pares de elétrons em excesso. Nesse caso, de acordo com

o primeiro teorema das cascas, a casca passa a atrair ou repelir uma carga externa como se todo o excesso de cargas estivesse concentrado no centro da casca.

Quando removemos cargas negativas de uma casca esférica metálica, as cargas positivas resultantes também se distribuem uniformemente na superfície da casca. Assim, por exemplo, se removemos n elétrons, passam a existir n cargas positivas (átomos nos quais está faltando um elétron) distribuídas uniformemente na superfície externa da casca. De acordo com o primeiro teorema das cascas, a casca neste caso também passa a atrair ou repelir uma carga externa como se todo o excesso de cargas estivesse concentrado no centro.

TESTE 2 A figura mostra dois prótons (símbolo p) e um elétron (símbolo e) sobre uma reta. Qual é o sentido (a) da força eletrostática exercida pelo elétron sobre o próton do meio; (b) da força eletrostática exercida sobre o próton do meio sobre o outro próton; (c) da força total exercida sobre o próton do meio?

Exemplo 21-1 Aumente sua capacidade

(a) A Figura 21-9*a* mostra duas partículas positivamente carregadas situadas em pontos fixos do eixo x. As cargas são $q_1 = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C e $q_2 = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C, e a distância entre as cargas é $R = 0{,}0200$ m. Determine o módulo e a orientação da força eletrostática $\vec{F}_{12}$ exercida pela partícula 2 sobre a partícula 1.

IDÉIAS-CHAVE Como as duas partículas têm carga positiva, a partícula 1 é repelida pela partícula 2 com uma força cujo módulo é dado pela Eq. 21-4. Assim, a direção da força $\vec{F}_{12}$ exercida pela partícula 2 sobre a partícula 1 é *para longe* da partícula 2, ou seja, no sentido negativo do eixo x, como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 21-9*b*.

FIG. 21-9 (*a*) Duas partículas de cargas q_1 e q_2 são mantidas fixas sobre o eixo x. (*b*) Diagrama de corpo livre da partícula 1, mostrando a força eletrostática exercida pela partícula 2. (*c*) Inclusão da partícula 3. (*d*) Diagrama de corpo livre da partícula 1. (*e*) Inclusão da partícula 4. (*f*) Diagrama de corpo livre da partícula 1.

Duas partículas: Usando a Eq. 21-4 com r igual à distância R entre as cargas, podemos escrever o módulo F_{12} desta força como

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{R^2} \\ &= (8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \\ &\quad \times \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3{,}20 \times 10^{-19}\ \text{C})}{(0{,}0200\ \text{m})^2} \\ &= 1{,}15 \times 10^{-24}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Assim, a força $\vec{F}_{12}$ tem o módulo e a orientação que se seguem (em relação ao sentido positivo do eixo x):

$$1{,}15 \times 10^{-24}\ \text{N} \quad \text{e} \quad 180°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos também escrever $\vec{F}_{12}$ na notação de vetores unitários como

$$\vec{F}_{12} = -(1{,}15 \times 10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{i}}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) A Fig. 21-9*c* é idêntica à Fig. 21-9*a*, exceto pelo fato de que agora existe uma partícula 3 no eixo x entre as partículas 1 e 2. A partícula 3 tem uma carga $q_3 = -3{,}20 \times 10^{-19}$ C e está a uma distância $3R/4$ da partícula 1. Determine a força eletrostática $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ exercida sobre a partícula 1 pelas partículas 2 e 3.

IDÉIA-CHAVE A presença da partícula 3 não altera a força eletrostática que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1. Assim, a força $\vec{F}_{12}$ continua a agir sobre a partícula 1. Da mesma forma, a força $\vec{F}_{13}$ que a partícula 3 exerce sobre a partícula 1 não é afetada pela presença da partícula 2. Como as cargas das partículas 1 e 3 têm sinais opostos, a partícula 1 é atraída pela partícula 3. Assim, o sentido da

força $\vec{F}_{13}$ é *para* a partícula 3, como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 21-9*d*.

Três partículas: Para determinar o módulo de $\vec{F}_{13}$, usamos a Eq. 21-4:

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_3|}{(\frac{3}{4}R)^2}$$
$$= (8{,}99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(3{,}20 \times 10^{-19}\,\text{C})}{(\frac{3}{4})^2(0{,}0200\,\text{m})^2}$$
$$= 2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N}.$$

Podemos também escrever $\vec{F}_{13}$ em termos dos vetores unitários:

$$\vec{F}_{13} = (2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}}.$$

A força total $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ exercida sobre a partícula 1 é a soma vetorial de $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{13}$. De acordo com a Eq. 21-7, podemos escrever a força total $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ exercida sobre a partícula 1, em termos dos vetores unitários, como

$$\vec{F}_{1,\text{tot}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$
$$= -(1{,}15 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}} + (2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}}$$
$$= (9{,}00 \times 10^{-25}\,\text{N})\hat{\text{i}}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ tem os seguintes módulo e orientação (em relação ao sentido positivo do eixo x):

$$9{,}00 \times 10^{-25}\,\text{N} \quad \text{e} \quad 0°. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) A Fig. 21-9*e* é idêntica à Fig. 21-9*a*, exceto pelo fato de que agora existe uma partícula 4. A partícula 4 tem uma carga $q_4 = -3{,}20 \times 10^{-19}$ C, está a uma distância $3R/4$ da partícula 1 e está sobre uma reta que faz um ângulo $\theta = 60°$ com o eixo x. Determine a força de atração eletrostática $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ exercida sobre a partícula 1 pelas partículas 2 e 4.

IDÉIA-CHAVE A força total $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ é a soma vetorial de $\vec{F}_{12}$ e uma nova força $\vec{F}_{14}$ que age sobre a partícula 1 devido à presença da partícula 4. Como as partículas 1 e 4 têm cargas de sinais opostos, a partícula 1 é atraída pela partícula 4. Assim, o sentido da força $\vec{F}_{14}$ é *para* a partícula 4, fazendo um ângulo de 60° com o eixo x, como mostra o diagrama da Fig. 21-9*f*.

Quatro partículas: Podemos escrever a Eq. 21-4 na forma

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_4|}{(\frac{3}{4}R)^2}$$
$$= (8{,}99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(3{,}20 \times 10^{-19}\,\text{C})}{(\frac{3}{4})^2(0{,}0200\,\text{m})^2}$$
$$= 2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N}.$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. 21-7, a força total $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ exercida sobre a partícula 1 é dada por

$$\vec{F}_{1,\text{tot}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}.$$

Como as forças $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{14}$ não têm a mesma direção, *não podemos* somá-las simplesmente somando ou subtraindo os módulos. Em vez disso, precisamos executar uma soma vetorial, usando um dos métodos a seguir.

Método 1. *Executar a soma vetorial em uma calculadora.* No caso de $\vec{F}_{12}$, entramos com o módulo $1{,}15 \times 10^{-24}$ e o ângulo de 180°. No caso de $\vec{F}_{14}$, entramos com o módulo $2{,}05 \times 10^{-24}$ e o ângulo de 60°. Em seguida, somamos os vetores.

Método 2. *Executar a soma vetorial em termos dos vetores unitários.* Em primeiro lugar, escrevemos $\vec{F}_{14}$ na forma

$$\vec{F}_{14} = (F_{14}\cos\theta)\hat{\text{i}} + (F_{14}\,\text{sen}\,\theta)\hat{\text{j}}.$$

Fazendo $F_{14} = 2{,}05 \times 10^{-24}$ N e $\theta = 60°$, temos:

$$\vec{F}_{14} = (1{,}025 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}} + (1{,}775 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{j}}.$$

Agora podemos executar a soma:

$$\vec{F}_{1,\text{tot}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$$
$$= -(1{,}15 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}} + (1{,}025 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{i}} + (1{,}775 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{j}}$$
$$\approx (-1{,}25 \times 10^{-25}\,\text{N})\hat{\text{i}} + (1{,}78 \times 10^{-24}\,\text{N})\hat{\text{j}}. \quad \text{(Resposta)}$$

Método 3. *Executar a soma vetorial componente por componente.* Somando as componentes x dos dois vetores, temos:

$$F_{1,\text{tot},x} = F_{12,x} + F_{14,x} = F_{12} + F_{14}\cos 60°$$
$$= -1{,}15 \times 10^{-24}\,\text{N} + (2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N})(\cos 60°)$$
$$= -1{,}25 \times 10^{-25}\,\text{N}.$$

Somando as componentes y, temos:

$$F_{1,\text{tot},y} = F_{12,y} + F_{14,y} = 0 + F_{14}\,\text{sen}\,60°$$
$$= (2{,}05 \times 10^{-24}\,\text{N})(\text{sen}\,60°)$$
$$= 1{,}78 \times 10^{-24}\,\text{N}.$$

O módulo da força $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ é dado por

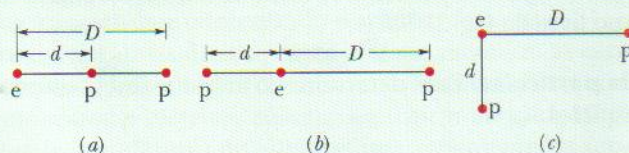
$$F_{1,\text{tot}} = \sqrt{F_{1,\text{tot},x}^2 + F_{1,\text{tot},y}^2} = 1{,}78 \times 10^{-24}\,\text{N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação de $\vec{F}_{1,\text{tot}}$, calculamos

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{1,\text{tot},y}}{F_{1,\text{tot},x}} = -86{,}0°.$$

Entretanto, este resultado não é razoável, já que a orientação de $\vec{F}_{1,\text{tot}}$ deve estar entre as orientações de $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{14}$. Para encontrar o valor correto de θ somamos 180°, obtendo

$$-86{,}0° + 180° = 94{,}0°. \quad \text{(Resposta)}$$

TESTE 3 A figura mostra três arranjos de um elétron e dois prótons p. (a) Ordene os arranjos de acordo com o módulo da força eletrostática exercida pelos prótons sobre o elétron, em ordem decrescente. (b) No arranjo *c*, o ângulo entre a força total exercida sobre o elétron e a reta *d* é maior ou menor que 45°?

TÁTICAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: Símbolos que Representam Cargas Aqui está um guia geral para os símbolos que representam cargas. Se um símbolo q, com ou sem índice, é usado em uma sentença na qual o sinal da carga não foi especificado, a carga pode ser positiva ou negativa. Às vezes o sinal é indicado explicitamente, como na notação $+q$ ou $-q$.

Quando o problema envolve mais de uma carga, as cargas podem ser indicadas como múltiplos do módulo de uma carga de referência. Assim, por exemplo, a notação $+2q$ significa uma carga positiva cujo módulo é duas vezes maior que o módulo de uma carga de referência q, e $-3q$ significa uma carga negativa cujo módulo é três vezes maior que o módulo da carga de referência q.

Exemplo 21-2

A Fig. 21-10*a* mostra duas partículas fixas: uma partícula de carga $q_1 = +8q$ na origem e uma partícula de carga $q_2 = -2q$ em $x = L$. Em que ponto (que não esteja a uma distância infinita das cargas) um próton pode ser colocado de modo a ficar *em equilíbrio* (sem estar submetido a nenhuma força)? Este equilíbrio é *estável* ou *instável*?

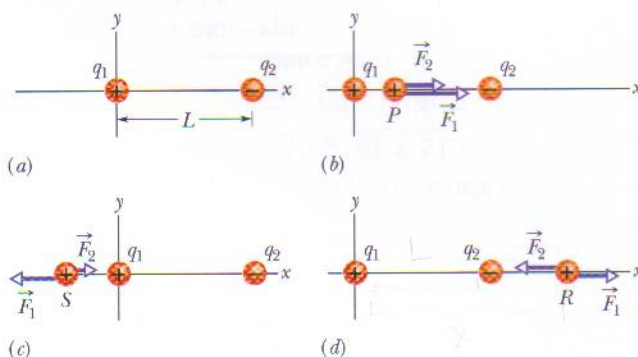



FIG. 21-10 (*a*) Duas partículas de cargas q_1 e q_2 são mantidas fixas sobre o eixo x, separadas por uma distância L. (*b*)–(*d*) Três posições possíveis de um próton, P, S e R. Nas três posições, $\vec{F}_1$ é a força que a partícula 1 exerce sobre o próton e $\vec{F}_2$ é a força que a partícula 2 exerce sobre o próton.

IDÉIA-CHAVE Se $\vec{F}_1$ é a força exercida sobre o próton pela carga q_1 e $\vec{F}_2$ é a força exercida sobre o próton pela carga q_2, o ponto que procuramos é aquele no qual $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Isso significa que

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (21\text{-}8)$$

Assim, no ponto que procuramos as forças que as outras duas partículas exercem sobre o próton devem ter o mesmo módulo, ou seja,

$$F_1 = F_2, \quad (21\text{-}8)$$

e as forças devem ter sentidos opostos.

Raciocínio: Como a carga do próton é positiva, as cargas do próton e da partícula de carga q_1 têm o mesmo sinal e, portanto, a força $\vec{F}_1$ exercida sobre o próton por esta partícula aponta para longe de q_1. Como o próton e a partícula de carga q_2 têm sinais opostos, a força $\vec{F}_2$ exercida sobre o próton por essa partícula aponta na direção de q_2. As direções "para longe de q_1" e "na direção de q_2" só podem ser opostas se o próton estiver sobre a reta que liga as duas partículas, ou seja, sobre o eixo x.

Se o próton estiver em um ponto do eixo x entre q_1 e q_2, como o ponto P da Fig. 21-10*b*, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ terão o mesmo sentido e não sentidos opostos, como desejamos. Se o próton estiver em um ponto do eixo x à esquerda de q_1, como o ponto S da Fig. 21-10*c*, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ terão sentidos opostos. Entretanto, de acordo com a Eq. 21-4, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ não poderão ter módulos iguais; $\vec{F}_1$ será sempre maior que $\vec{F}_2$, já que $\vec{F}_1$ será produzido por uma carga mais próxima (com menor valor de r) e maior módulo ($8q$, em comparação com $2q$).

Finalmente, se o próton estiver em um ponto do eixo x à direita de q_2, como o ponto R da Fig. 21-9*d*, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ terão novamente sentidos opostos. Entretanto, como agora a carga de maior módulo (q_1) está *mais distante* do próton que a carga de menor módulo, existe um ponto no qual $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são iguais. Seja x a coordenada deste ponto e seja q_p a carga do próton.

Cálculos: Combinando a Eq. 21-9 com a Eq. 21-4, obtemos:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8qq_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_p}{(x-L)^2}. \quad (21\text{-}10)$$

(Observe que apenas os módulos das cargas aparecem na Eq. 21-10.) De acordo com a Eq. (21-10), temos:

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos:

$$\frac{x - L}{x} = \frac{1}{2},$$

o que nos dá

$$x = 2L. \qquad \text{(Resposta)}$$

O equilíbrio no ponto $x = 2L$ é instável. Quando o próton é deslocado para a esquerda em relação ao ponto R, F_1 e F_2 aumentam, mas F_2 aumenta mais (porque q_2 está mais próxima que q_1) e a força resultante faz com que o próton continue a se mover para a esquerda até se chocar com a carga q_2. Quando o próton é deslocado para a direita em relação ao ponto R, F_1 e F_2 diminuem, mas F_2 diminui mais e a força resultante faz com que o próton continue a se mover indefinidamente para a direita. Se o equilíbrio fosse estável, o próton voltaria à posição inicial depois de ser deslocado ligeiramente para a esquerda ou para a direita.

TÁTICAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: ***Como Desenhar os Vetores das Forças Eletrostáticas*** Quando o dado do problema é um conjunto de partículas carregadas, como na Fig. 21-9*a*, e o objetivo é determinar a força eletrostática total a que está submetida uma das partículas, em geral é conveniente desenhar um diagrama de corpo livre com a partícula de interesse e as forças a que ela está submetida, como o da Fig. 21-9*b*. Se você preferir desenhar essas forças, certifique-se de que todos os vetores sejam desenhados com a origem (de preferência) ou a extremidade na partícula de interesse. Se você desenhar os vetores em outros locais do diagrama, correrá um sério risco de se confundir; a confusão estará garantida se você associar os vetores às partículas *responsáveis* pelas forças que agem sobre a partícula de interesse.

Exemplo 21-3

Na Fig. 21-11*a*, duas esferas condutoras iguais, A e B, estão separadas por uma distância a (entre os centros) muito maior que os raios das esferas. A esfera A tem uma carga positiva $+Q$, e a esfera B é eletricamente neutra. Inicialmente não existe nenhuma força eletrostática entre as esferas. (Suponha que a carga induzida nas esferas possa ser desprezada porque as esferas estão muito afastadas.)

(a) As esferas são ligadas momentaneamente por um fio condutor suficientemente fino para que a carga que se acumula no fio possa ser desprezada. Qual é a força eletrostática entre as esferas depois que o fio é removido?

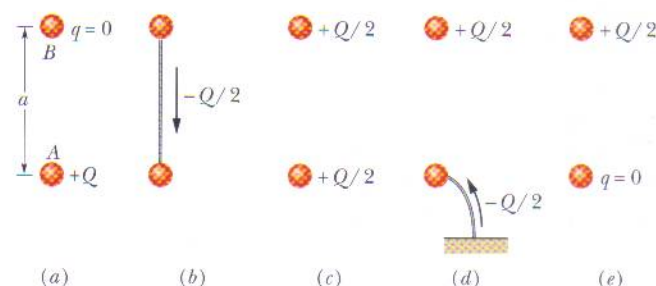



FIG. 21-11 Duas pequenas esferas condutoras, A e B. (*a*) No início, a esfera A está carregada positivamente. (*b*) Uma carga negativa é transferida de B para A através de um fio condutor. (*c*) As duas esferas ficam carregadas positivamente. (*d*) Uma carga negativa é transferida para a esfera A através de um fio condutor ligado à terra. (*e*) A esfera A fica neutra.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como as esferas são iguais, devem terminar com cargas iguais (mesmo sinal e mesmo valor absoluto) ao serem ligadas por um fio. (2) A soma inicial das cargas (incluindo o sinal) deve ser igual à soma final das cargas.

Raciocínio: Quando as esferas são ligadas por um fio, os elétrons de condução (negativos) da esfera B, que se repelem mutuamente, podem se afastar uns dos outros (movendo-se, através do fio, para a esfera A positivamente carregada, que os atrai, como mostra a Fig. 21-11*b*). Com isso, a esfera B perde cargas negativas e fica positivamente carregada, enquanto a esfera A ganha cargas negativas e fica *menos* positivamente carregada. A transferência de carga cessa quando a carga B aumenta para $+Q/2$ e a carga de A diminui para $+Q/2$, o que acontece quando uma carga $-Q/2$ passa de B para A.

Depois que o fio é removido (Fig. 21-11*c*), podemos supor que a carga de cada esfera não perturba a distribuição de cargas na outra esfera, já que a distância entre as esferas é muito maior que o raio das esferas. Assim, podemos aplicar o primeiro teorema das cascas às duas esferas. De acordo com a Eq. 21-4, com $q_1 = q_2 = Q/2$ e $r = a$,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}\right)^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

As esferas, agora positivamente carregadas, se repelem mutuamente.

(b) A esfera A é ligada momentaneamente à terra e, em seguida, a ligação com a terra é removida. Qual é a nova força eletrostática entre as esferas?

Raciocínio: Quando ligamos um objeto carregado à terra (que é um imenso condutor) através de um fio, neutraliza-

mos o objeto. Se a esfera A estivesse negativamente carregada, a repulsão mútua entre os elétrons em excesso faria com que eles migrassem da esfera para a terra. Como a esfera A está positivamente carregada, elétrons com uma carga total de $-Q/2$ migram da terra *para* a esfera (Fig. 21-11*d*), deixando a esfera com carga 0 (Fig. 21-11*e*). Assim (mais uma vez), não existe força eletrostática entre as esferas.

21-5 | A Carga É Quantizada

TABELA 21-1

Cargas de Três Partículas

Partícula	Símbolo	Carga
Elétron	e ou e^-	$-e$
Próton	p	$+e$
Nêuton	n	0

Na época de Benjamin Franklin, a carga elétrica era considerada um fluido contínuo, uma idéia que foi útil para muitos propósitos. Hoje, porém, sabemos que mesmo os fluidos "clássicos", como a água e o ar, não são contínuos e sim compostos de átomos e moléculas; a matéria é quantizada. Os experimentos revelam que o "fluido elétrico" também não é contínuo, e sim composto de unidades elementares de carga. Todas as cargas positivas e negativas q que podem ser detectadas podem ser escritas na forma

$$q = ne, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{21-11}$$

onde e, a **carga elementar**, tem o valor aproximado

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}. \tag{21-12}$$

A carga elementar e é uma das constantes mais importantes da natureza. Tanto o elétron como o próton possuem uma carga cujo valor absoluto é e (Tabela 21-1). (Os quarks, partículas elementares das quais são feitos os prótons e nêutrons, têm cargas de $\pm e/3$ ou $\pm 2e/3$, mas existem fortes indícios de que não podem ser observados isoladamente. Por esse motivo e por razões históricas, a carga elementar não é tomada como sendo $e/3$).

Certas expressões de uso coloquial, como "a carga contida em uma esfera", "a quantidade de carga transferida" e "a carga que um elétron possui", dão a impressão de que a carga é uma substância. (Na verdade, usamos algumas expressões semelhantes neste capítulo.) É preciso ter em mente, porém, que a carga não é uma substância, e sim uma propriedade das partículas, como a massa.

Quando uma grandeza física pode assumir apenas certos valores, dizemos que é **quantizada**; a carga elétrica é uma dessas grandezas. É possível, por exemplo, encontrar uma partícula sem carga elétrica ou com uma carga de $+10e$ ou $-6e$, mas não uma partícula com uma carga de $3{,}57e$.

O *quantum* de carga é extremamente pequeno. Em uma lâmpada incandescente de 100 W, por exemplo, cerca de 10^{19} cargas elementares passam pelo filamento por segundo. Entretanto, a natureza discreta da eletricidade não se manifesta em muitos fenômenos (a luz da lâmpada não pisca toda vez que um elétron passa pelo filamento), da mesma forma que não sentimos as moléculas de água quando lavamos as mãos.

TESTE 4 Inicialmente, a esfera A possui uma carga $-50e$ e a esfera B uma carga $+20e$. As esferas são feitas de um material condutor e têm o mesmo tamanho. Se as esferas são colocadas em contato, qual é o novo valor da carga da esfera A?

Exemplo 21-4

O núcleo de um átomo de ferro tem um raio de $4{,}0 \times 10^{-15}$ m e contém 26 prótons.

(a) Qual é o módulo da força de repulsão eletrostática entre dois prótons do núcleo de ferro separados por uma distância de $4{,}0 \times 10^{-15}$ m?

IDÉIA-CHAVE Como os prótons são partículas com carga elétrica, o módulo da força eletrostática entre dois prótons é dado pela lei de Coulomb.

Cálculo: De acordo com a Tabela 21-1, a carga elétrica do próton é $+e$; assim, de acordo com a Eq. 21-4,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$
$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4{,}0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 14\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Não há uma explosão: Esta força poderia ser considerada pequena se agisse sobre um objeto macroscópico como uma melancia, mas é gigantesca quando aplicada a uma partícula do tamanho de um próton. Forças dessa ordem deveriam fazer com que os núcleos de todos os elementos se desintegrassem (a não ser o do hidrogênio, que possui apenas um próton). O fato de existirem núcleos atômicos estáveis com mais de um próton sugere a existência no interior do núcleo de uma força de atração muito intensa, capaz de compensar a repulsão eletrostática.

(b) Qual é o módulo da força de atração gravitacional entre os mesmos dois prótons?

IDÉIA-CHAVE Como os prótons são partículas com massa, o módulo da força gravitacional entre dois prótons é dado pela lei de Newton para a atração gravitacional (Eq. 21-2).

Cálculo: Com m_p ($= 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) representando a massa de um próton, a Eq. 21-2 nos dá

$$F = G\frac{m_p^2}{r^2}$$
$$= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}{(4{,}0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 1{,}2 \times 10^{-35}\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma grande, a outra pequena: Este resultado mostra que a força de atração gravitacional é insuficiente para compensar a força de repulsão eletrostática entre os prótons do núcleo. Na verdade, a força que mantém o núcleo coeso é uma força muito maior, conhecida como *interação forte*, que age entre dois prótons (e também entre um próton e um nêutron, e entre dois nêutrons) apenas quando essas partículas estão muito próximas umas das outras, como no interior do núcleo.

Embora a força gravitacional seja muito menor que a força eletrostática, é mais importante em situações que envolvem um grande número de partículas porque é sempre atrativa. Isso significa que a força gravitacional pode produzir grandes concentrações de matéria, como planetas e estrelas, que, por sua vez, exercem grandes forças gravitacionais. A força eletrostática, por outro lado, é repulsiva para cargas de mesmo sinal e, portanto, não é capaz de produzir grandes concentrações de cargas positivas ou negativas que possam exercer grandes forças eletrostáticas.

21-6 | A Carga É Conservada

Quando friccionamos um bastão de vidro com um pedaço de seda o bastão fica positivamente carregado. As medidas mostram que uma carga negativa de mesmo valor absoluto se acumula na seda. Isso sugere que o processo não cria cargas, mas apenas transfere cargas de um corpo para outro, rompendo no processo a neutralidade de carga dos dois corpos. Esta hipótese de **conservação da carga elétrica**, proposta por Benjamin Franklin, foi comprovada exaustivamente tanto no caso de objetos macroscópicos como no caso de átomos, núcleos e partículas elementares. Até hoje não foi encontrada nenhuma exceção. Assim, podemos acrescentar a carga elétrica à nossa lista de grandezas, como a energia, o momento linear e o momento angular, que obedecem a uma lei de conservação.

Exemplos importantes da conservação de carga são observados no *decaimento radioativo* dos núcleos atômicos, um processo pelo qual um núcleo se transforma em um núcleo diferente. Um núcleo de urânio 238 (^{238}U), por exemplo, se transforma em um núcleo de tório 234 (^{234}Th) emitindo uma *partícula alfa*, que é um núcleo de hélio 4 (^{4}He). O número que precede o símbolo do elemento químico é chamado de *número de massa*, e é igual ao número total de prótons e nêutrons presentes no núcleo. Assim, o número total de prótons e nêutrons do ^{238}U é 238. O número de prótons presentes em um núcleo é o *número atômico Z*, que é fornecido para todos os elementos no Apêndice F. Consultando o Apêndice F, vemos que no decaimento

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He}, \qquad (21\text{-}13)$$

o núcleo-*pai* ^{238}U contém 92 prótons (uma carga de $+92e$), o núcleo-*filho* ^{234}Th contém 90 prótons (uma carga de $+90e$) e a partícula alfa emitida, ^{4}He, contém 2 prótons (uma carga de $+2e$). Vemos que a carga total é $+92e$ antes e depois do

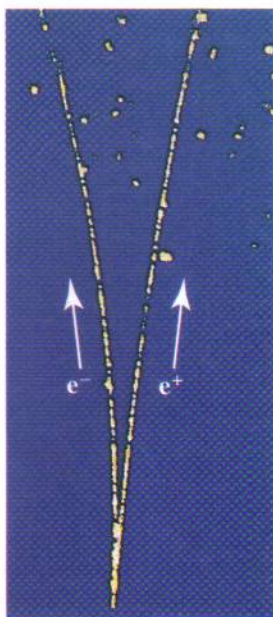



FIG. 21-12 Fotografia das trilhas deixadas por um elétron e um pósitron em uma câmara de bolhas. O par de partículas foi produzido por um raio gama que entrou na câmara, proveniente da parte inferior da fotografia. Como o raio gama é eletricamente neutro, não produz uma trilha. *(Cortesia do Lawrence Berkeley Laboratory)*

decaimento; assim, a carga é conservada. (O número total de prótons e nêutrons também é conservado: 238 antes do decaimento e 234 + 4 = 238 depois do decaimento.)

Outro exemplo de conservação de carga ocorre quando um elétron e^- (cuja carga é $-e$) e sua antipartícula, o *pósitron* e^+ (cuja carga é $+e$), sofrem um *processo de aniquilação* e se transformam em dois *raios gama* (ondas eletromagnéticas de alta energia):

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{(aniquilação).} \qquad (21\text{-}14)$$

Ao aplicar a lei de conservação da carga devemos somar as cargas algebricamente, ou seja, levando em conta o sinal de cada uma. No processo de aniquilação da Eq. 21-14, por exemplo, a carga total do sistema é zero antes e depois do evento; a carga é conservada.

Na *produção de um par*, o inverso da aniquilação, a carga também é conservada. Nesse processo, um raio gama se transforma em um elétron e um pósitron:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \qquad \text{(produção de um par).} \qquad (21\text{-}15)$$

A Fig. 21-12 mostra a produção de um par no interior de uma câmara de bolhas. Um raio gama entrou na câmara, proveniente da parte inferior da fotografia, e se transformou em um elétron e um pósitron ao interagir com uma partícula presente na câmara. Como as partículas criadas tinham carga elétrica e estavam em movimento, deixaram uma trilha de pequenas bolhas. (As trilhas são curvas porque existe um campo magnético no interior da câmara.) Como o raio gama é eletricamente neutro, não produz uma trilha. Mesmo assim, sabemos exatamente em que ponto da câmara o par de partículas foi produzido: no local onde começam as trilhas do elétron e do pósitron.

REVISÃO E RESUMO

Carga Elétrica A intensidade das interações elétricas de uma partícula depende da sua **carga elétrica**, que pode ser positiva ou negativa. Cargas de mesmo sinal se repelem e cargas de sinais opostos se atraem. Um corpo com quantidades iguais dos dois tipos de cargas é eletricamente neutro; um corpo com um excesso de cargas positivas ou negativas está eletricamente carregado.

Materiais **condutores** são materiais nos quais muitas partículas eletricamente carregadas (elétrons, no caso dos metais) se movem com facilidade. Nos materiais **não-condutores**, também conhecidos como **isolantes**, as cargas não podem se mover.

O Coulomb e o Ampère A unidade de carga do SI é o **coulomb** (C), que é definido em termos da unidade de corrente elétrica, o ampère (A), como a carga que passa por um certo ponto em 1 segundo quando existe uma corrente elétrica de 1 ampère neste ponto:

$$1\ \text{C} = (1\ \text{A})(1\ \text{s}).$$

Esta definição se baseia na relação entre a corrente i e a taxa de variação com o tempo dq/dt da carga que passa por um ponto do espaço:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(corrente elétrica).} \qquad (21\text{-}3)$$

Lei de Coulomb A *lei de Coulomb* expressa a **força eletrostática** entre duas cargas pequenas (pontuais) q_1 e q_2 em repouso (ou quase em repouso) separadas por uma distância r:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(lei de Coulomb).} \qquad (21\text{-}4)$$

Onde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ é a **permissividade do vácuo** e $1/4\pi\varepsilon_0 = k = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ é a **constante eletrostática**.

A força de atração ou repulsão entre cargas pontuais em repouso tem a direção da reta que liga as cargas. Quando mais de duas cargas estão presentes, a Eq. 21-4 se aplica a todos os pares de cargas. A força total a que cada carga está submetida pode ser calculada, de acordo com o princípio de superposição, como a soma vetorial das forças exercidas por todas das outras cargas sobre a carga considerada.

Os dois teoremas das cascas da eletrostática são os seguintes:

Uma casca com uma distribuição uniforme de carga atrai ou repele uma partícula carregada situada do lado de fora da casca como se toda a carga da casca estivesse situada no centro.

Se uma partícula carregada está situada no interior de uma casca com uma distribuição uniforme de carga, a casca não exerce nenhuma força eletrostática sobre a partícula.

A Carga Elementar A carga elétrica é **quantizada**: todas as cargas elétricas podem ser escritas na forma ne, onde n é um número inteiro positivo ou negativo e e é uma constante física conhecida como **carga elementar** ($\approx 1{,}602 \times 10^{-19}$ C). A carga elétrica é **conservada**: a carga elétrica de qualquer sistema isolado é constante.

PERGUNTAS

1 A Figura 21-13 mostra quatro sistemas nos quais partículas carregadas são mantidas fixas sobre um eixo. Em quais desses sistemas existe um ponto à esquerda das partículas no qual um elétron estaria em equilíbrio?

FIG. 21-13 Pergunta 1.

2 A Figura 21-14 mostra duas partículas carregadas sobre um eixo. As cargas têm liberdade para se mover; entretanto, é possível colocar uma terceira partícula em um ponto tal que as três partículas fiquem em equilíbrio. (a) Esse ponto está à esquerda das duas primeiras partículas, à direita ou entre elas? (b) A carga da terceira partícula deve ser positiva ou negativa? (c) O equilíbrio é estável ou instável?

FIG. 21-14 Pergunta 2.

3 A Figura 21-15 mostra quatro sistemas nos quais cinco partículas carregadas estão dispostas ao longo de um eixo com espaçamento uniforme. O valor da carga está indicado para todas as partículas, a não ser a partícula central, que possui a mesma carga nos quatro sistemas. Coloque os sistemas na ordem do módulo da força eletrostática total exercida sobre a partícula central, em ordem decrescente.

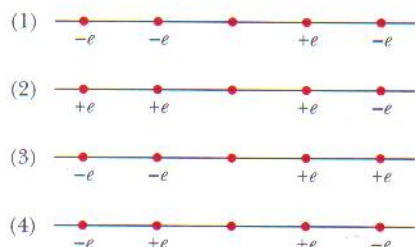



FIG. 21-15 Pergunta 3.

4 A Figura 21-16 mostra três pares de esferas iguais que são colocadas em contato e novamente separadas. As cargas presentes inicialmente nas esferas estão indicadas. Ordene os pares de acordo (a) com o módulo da carga transferida quando as esferas são postas em contato e (b) com o módulo da carga presente na esfera positivamente carregada depois que as esferas são separadas, em ordem decrescente.

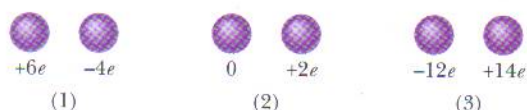



FIG. 21-16 Pergunta 4.

5 A Figura 21-17 mostra três sistemas constituídos por uma partícula carregada e uma casca esférica com uma distribuição de carga uniforme. As cargas são dadas e os raios das cascas estão indicados. Ordene os sistemas de acordo com o módulo da força exercida pela casca sobre a partícula, em ordem decrescente.

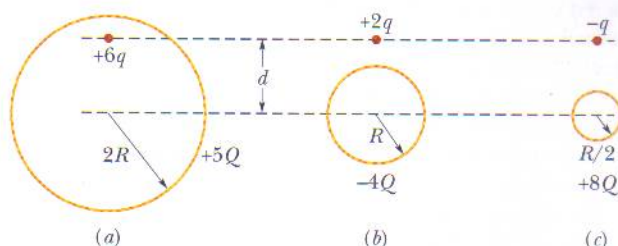



FIG. 21-17 Pergunta 5.

6 Na Fig. 21-18, uma partícula central de carga $-2q$ está cercada por um quadrado de partículas carregadas, separadas por uma distância d ou $d/2$. Quais são o módulo e a orientação da força eletrostática total exercida sobre a partícula central pelas outras partículas? (*Sugestão:* Levando em conta a simetria do problema, é possível simplificar consideravelmente os cálculos.)

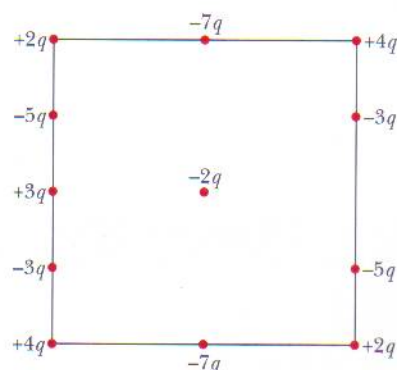



FIG. 21-18 Pergunta 6.

7 Na Fig. 2-19, uma partícula central de carga $-q$ está cercada por dois anéis circulares de partículas carregadas. Quais são o módulo e a orientação da força eletrostática total exercida sobre a partícula central pelas outras partículas? (*Sugestão:* Levando em conta a simetria do problema, é possível simplificar consideravelmente os cálculos.)

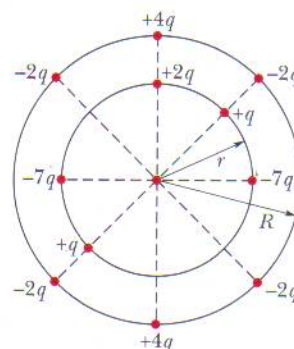
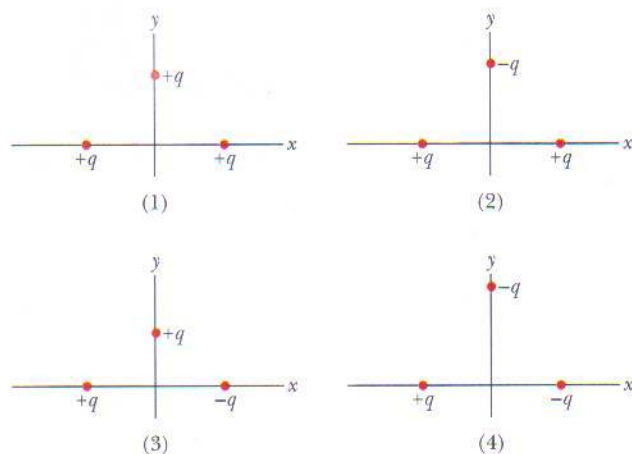



FIG. 21-19 Pergunta 7.

8 Uma esfera positivamente carregada é colocada nas proximidades de um condutor neutro inicialmente isolado, e o condutor é colocado em contato com a terra. O condutor fica carregado positivamente, carregado negativamente ou permanece neutro (a) se a esfera é afastada e, em seguida, a ligação com a terra é removida, e (b) se a ligação com a terra é removida e, em seguida, a esfera é afastada?

9 A Fig. 21-20 mostra quatro sistemas nos quais partículas de carga $+q$ ou $-q$ são mantidas fixas. Em todos os sistemas as partículas sobre o eixo x estão eqüidistantes do eixo y. Considere a partícula central do sistema 1. A partícula está sujeita às forças eletrostáticas F_1 e F_2 das outras duas partículas. (a) Os módulos F_1 e F_2 dessas forças são iguais ou diferentes? (b) O módulo da força total a que a partícula central está submetida é maior, menor ou igual a $F_1 + F_2$? (c) As componentes x das duas forças se somam ou se subtraem? (d) As componentes y das duas forças se somam ou se subtraem? (e) A orientação da força total a que está submetida a partícula do meio está mais próxima das componentes que somam ou das componentes que se subtraem? (f) Qual é a orientação dessa força total? Considere agora os outros sistemas. Qual é a orientação da força total exercida sobre a partícula central (g) no sistema 2; (h) no sistema 3; (i) no sistema 4? (Em cada sistema, considere a simetria da distribuição de cargas e determine as componentes que se somam e se subtraem.)

10 A Fig. 21-21 mostra quatro sistemas de partículas carregadas. Coloque os sistemas em ordem de acordo com o módulo da força eletrostática total a que está submetida a partícula de carga $+Q$, em ordem decrescente.

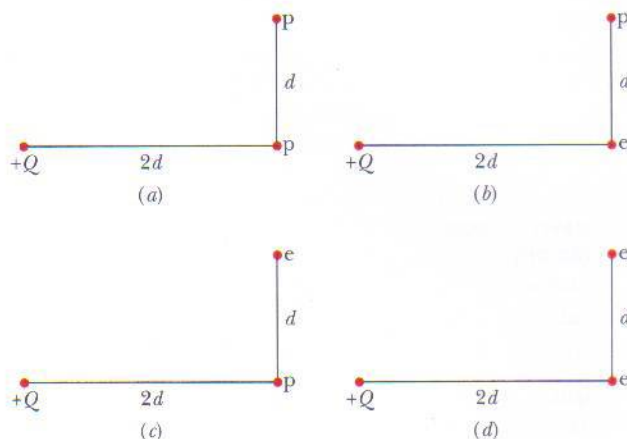



FIG. 21-20 Pergunta 9.

FIG. 21-21 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• - ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 21-4 Lei de Coulomb

•1 Qual deve ser a distância entre a carga pontual $q_1 = 26{,}0\ \mu C$ e a carga pontual $q_2 = -47{,}0\ \mu C$ para que a força eletrostática entre as duas cargas tenha um módulo de 5,70 N?

•2 Duas partículas de mesma carga são colocadas a $3{,}2 \times 10^{-3}$ m de distância uma da outra e liberadas a partir do repouso. A aceleração inicial da primeira partícula é 7,0 m/s² e a da segunda é 9,0 m/s². Se a massa da primeira partícula é $6{,}3 \times 10^{-7}$ kg, determine (a) a massa da segunda partícula; (b) o módulo da carga de cada partícula.

•3 Uma partícula com uma carga de $+3{,}00 \times 10^{-6}$ C está a 12,0 cm de distância de uma segunda partícula com uma carga de $-1{,}50 \times 10^{-6}$ C. Calcule o módulo da força eletrostática entre as partículas.

•4 Duas esferas condutoras iguais, 1 e 2, possuem cargas iguais e estão separadas por uma distância muito maior que o diâmetro (Fig. 21-22*a*). A força eletrostática a que a esfera 2 está submetida devido à presença da esfera 1 é $\vec{F}$. Uma terceira esfera 3, igual às duas primeiras, que dispõe de um cabo não-condutor e está inicialmente neutra, é colocada em contato primeiro com a esfera 1 (Fig. 21-22*b*), depois com a esfera 2 (Fig. 21-22*c*) e, finalmente, removida (Fig. 21-22*d*). A força eletrostática à qual a esfera 2 agora está submetida tem módulo F'. Qual é o valor da razão F'/F?

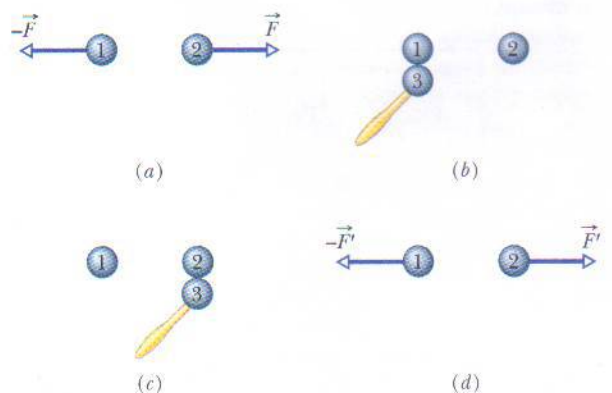



FIG. 21-22 Problema 4.

•5 Da carga Q que uma pequena esfera contém inicialmente, uma parte q é transferida para uma segunda esfera situada nas proximidades. As duas esferas podem ser consideradas como car-

gas pontuais. Para que valor de q/Q a força eletrostática entre as duas esferas é máxima?

•**6** Na descarga de retorno de um relâmpago típico, uma corrente de $2,5 \times 10^4$ A é mantida por 20 μs. Qual é o valor da carga transferida?

••**7** Duas esferas condutoras iguais, mantidas fixas, se atraem mutuamente com uma força eletrostática de 0,108 N quando a distância entre os centros é 50,0 cm. As esferas são ligadas por um fio condutor de diâmetro desprezível. Quando o fio é removido, as esferas se repelem com uma força de 0,0360 N. Supondo que a carga total das esferas era inicialmente positiva, determine: (a) a carga negativa inicial de uma das esferas; (b) a carga positiva inicial da outra esfera.

••**8** Na Fig. 21-23, quatro partículas formam um quadrado. As cargas são $q_1 = q_4 = Q$ e $q_2 = q_3 = q$. (a) Qual deve ser o valor da razão Q/q para que a força eletrostática total a que as partículas 1 e 3 estão submetidas seja nula? (b) Existe algum valor de q para o qual a força eletrostática a que todas as partículas estão submetidas seja nula? Justifique sua resposta.

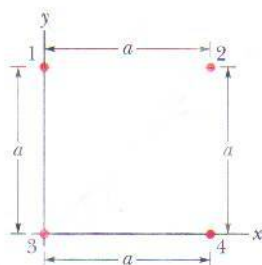



FIG. 21-23 Problemas 8, 9 e 62.

••**9** Na Fig. 21-23, as cargas das partículas são $q_1 = -q_2 = 100$ nC e $q_3 = -q_4 = 200$ nC. O lado do quadrado é $a = 5,0$ cm. Determine (a) a componente x e (b) a componente y da força eletrostática a que está submetida a partícula 3.

••**10** Três partículas são mantidas fixas sobre um eixo x. A partícula 1, de carga q_1, está em $x = -a$; a partícula 2, de carga q_2, está em $x = +a$. Determine a razão q_1/q_2 para que a força eletrostática a que está submetida a partícula 3 seja nula (a) se a partícula 3 estiver no ponto $x = +0,500a$; (b) se a partícula 3 estiver no ponto $x = +1,50a$.

••**11** Na Fig. 21-24, três partículas carregadas estão sobre um eixo x. As partículas 1 e 2 são mantidas fixas. A partícula 3 está livre para se mover, mas a força eletrostática exercida sobre ela pelas partículas 1 e 2 é zero. Se $L_{23} = L_{12}$, qual é o valor da razão q_1/q_2?

FIG. 21-24 Problemas 11 e 56.

••**12** A Fig. 21-25 mostra quatro esferas condutoras iguais, que estão separadas por grandes distâncias. A esfera W (que estava inicialmente neutra) é colocada em contato com a esfera A e depois as esferas são novamente separadas. Em seguida, a esfera W é colocada em contato com a esfera B (que possuía inicialmente uma carga de $-32e$) e depois as esferas são novamente separadas. Finalmente, a esfera W é colocada em contato com a esfera C (que possuía inicialmente uma carga de $+48e$), e depois as esferas são novamente separadas. A carga final da esfera W é $+18e$. Qual era a carga inicial da esfera A?

FIG. 21-25 Problema 12.

••**13** Na Fig. 21-26a, as partículas 1 e 2 têm uma carga de 20,0 μC cada uma e estão separadas por uma distância $d = 1,50$ m. (a) Qual é o módulo da força eletrostática que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1? Na Fig. 21-26b, a partícula 3, com uma carga de 20,0 μC, é posicionada de modo a completar um triângulo eqüilátero. (b) Qual é o módulo da força eletrostática a que a partícula 1 é submetida devido à presença das partículas 2 e 3?

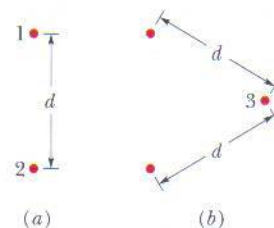



FIG. 21-26 Problema 13.

••**14** Na Fig. 21-27a, a partícula 1 (de carga q_1) e a partícula 2 (de carga q_2) são mantidas fixas no eixo x, separadas por uma distância de 8,00 cm. A força que as partículas 1 e 2 exercem sobre uma partícula 3 (de carga $q_3 = +8,00 \times 10^{-19}$ C) colocada entre elas é $\vec{F}_{3,tot}$. A Fig. 21-27b mostra o valor da componente x dessa força em função da coordenada x do ponto em que a partícula 3 é colocada. A escala do eixo x é definida por $x_s = 8,0$ cm. Determine (a) o sinal da carga q_1; (b) o valor da razão q_2/q_1.

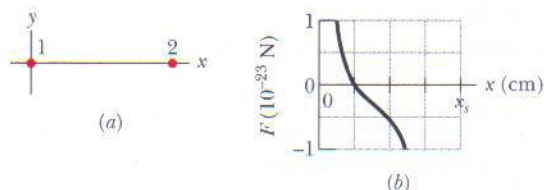



FIG. 21-27 Problema 14.

••**15** Na Fig. 21-28, a partícula 1, de carga $+1,0$ μC, e a partícula 2, de carga $-3,0$ μC, são mantidas a uma distância $L = 10,0$ cm uma da outra sobre um eixo x. Determine (a) a coordenada x e (b) a coordenada y de uma partícula 3 de carga desconhecida q_3 para que a força total exercida sobre ela pelas partículas 1 e 2 seja nula.

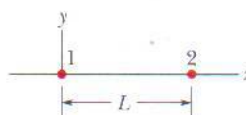



FIG. 21-28 Problemas 15, 19, 32, 64 e 69.

••16 Na Fig. 21-29a, três partículas positivamente carregadas são mantidas fixas em um eixo x. As partículas B e C estão tão próximas que as distâncias entre elas e a partícula A podem ser consideradas iguais. A força total a que a partícula A está submetida devido à presença das partículas B e C é $2{,}014 \times 10^{-23}$ N no sentido negativo do eixo x. Na Fig. 21-27b, a partícula B foi transferida para o lado oposto de A, mas mantida à mesma distância. Nesse caso, a força total a que a partícula A está submetida passa a ser $2{,}877 \times 10^{-24}$ N no sentido negativo do eixo x. Qual é o valor da razão q_C/q_B?

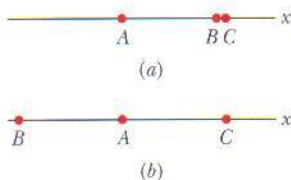



FIG. 21-29 Problema 16.

••17 As cargas e coordenadas de duas partículas mantidas fixas no plano xy são $q_1 = +3{,}0\ \mu$C, $x_1 = 3{,}5$ cm, $y_1 = 0{,}50$ cm e $q_2 = -4{,}0\ \mu$C, $x_2 = -2{,}0$ cm, $y_2 = 1{,}5$ cm. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da força eletrostática que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2. Determine também (c) a coordenada x e (d) a coordenada y de uma terceira partícula de carga $q_3 = +4{,}0\ \mu$C para que a força exercida sobre ela pelas partículas 1 e 2 seja nula.

••18 Duas partículas são mantidas fixas em um eixo x. A partícula 1, de carga 40 μC, está situada em $x = -2{,}0$ cm; a partícula 2, de carga Q, está situada em $x = 3{,}0$ cm. A partícula 3 está inicialmente no eixo y e é liberada, a partir do repouso, no ponto $y = 2{,}0$ cm. O valor absoluto da carga da partícula 3 é 20 μC. Determine o valor de Q para que a aceleração inicial da partícula 3 seja (a) no sentido positivo do eixo x; (b) no sentido positivo do eixo y.

••19 Na Fig. 21-28, a partícula 1, de carga $+q$, e a partícula 2, de carga $+4{,}00q$, são mantidas a uma distância $L = 9{,}00$ cm sobre um eixo x. Se um partícula 3 de carga q_3 permanece imóvel ao ser colocada nas proximidades das partículas 1 e 2, determine (a) a razão q_3/q; (b) a coordenada x da partícula 3; (c) a coordenada y da partícula 3.

•••20 A Fig. 21-30 mostra um sistema de quatro partículas carregadas, com $\theta = 30{,}0°$ e $d = 2{,}00$ cm. A carga da partícula 2 é $q_2 = +8{,}00 \times 10^{-19}$ C; a carga das partículas 3 e 4 é $q_3 = q_4 = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C. (a) Qual deve ser a distância D entre a origem e a partícula 2 para que a força que age sobre a partícula 1 seja nula? (b) Se as partículas 3 e 4 são aproximadas do eixo x mantendo-se simétricas em relação a este eixo, o valor da distância D é maior, menor ou igual ao do item (a)?

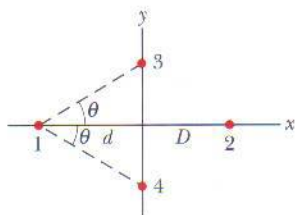



FIG. 21-30 Problema 20.

•••21 Na Fig. 21-31, as partículas 1 e 2, de carga $q_1 = q_2 = +3{,}20 \times 10^{-19}$ C, estão sobre o eixo y, a uma distância $d = 17{,}0$ cm da origem. A partícula 3, de carga $q_3 = +6{,}40 \times 10^{-19}$ C, é deslocada ao longo do eixo x, de $x = 0$ até $x = +5{,}0$ m. Para que valor de x o módulo da força eletrostática exercida pelas partículas 1 e 2 sobre a partícula 3 é (a) mínimo e (b) máximo? Quais são os valores (c) mínimo e (d) máximo do módulo?

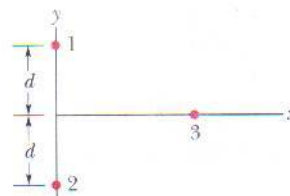



FIG. 21-31 Problema 21.

•••22 A Fig. 21-32a mostra um sistema de três partículas carregadas separadas por uma distância d. As partículas A e C estão fixas no lugar sobre o eixo x, mas a partícula B pode se mover ao longo de uma circunferência com centro na partícula A. Durante o movimento, um segmento de reta ligando os pontos A e B faz um ângulo θ com o eixo x (Fig. 21-32b). As curvas da Fig. 21-32c mostram, para duas situações, o módulo F_{tot} da força eletrostática total que as outras partículas exercem sobre a partícula A. Esta força total está plotada em função do ângulo θ e como múltiplo da uma força de referência F_0. Assim, por exemplo, na curva 1, para $\theta = 180°$, vemos que $F_{tot} = 2F_0$. (a) Para a situação correspondente à curva 1, qual é a razão entre a carga da partícula C e a carga da partícula B (incluindo o sinal)? (b) Qual é a mesma razão para a situação correspondente à curva 2?

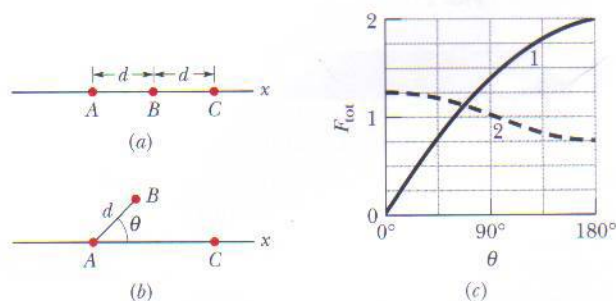



FIG. 21-32 Problema 22.

•••23 Uma casca esférica não-condutora, com um raio interno de 4,0 cm e um raio externo de 6,0 cm, possui uma distribuição de cargas não-homogênea. A *densidade volumétrica de carga* ρ é a carga por unidade de volume, medida em coulombs por metro cúbico. No caso dessa casca, $\rho = b/r$, onde r é a distância em metros a partir do centro da casca e $b = 3{,}0\ \mu\text{C/m}^2$. Qual é a carga total da casca?

seção 21-5 A Carga É Quantizada

•24 Qual é o módulo da força eletrostática entre um íon de sódio monoionizado (Na^+, de carga $+e$) e um íon de cloro monoionizado (Cl^-, de carga $-e$) em um cristal de sal de cozinha, se a distância entre os íons é $2{,}82 \times 10^{-10}$ m?

•25 O módulo da força eletrostática entre dois íons iguais separados por uma distância de $5{,}0 \times 10^{-10}$ m é $3{,}7 \times 10^{-9}$ N. (a) Qual é a carga de cada íon? (b) Quantos elétrons estão "faltando" em cada íon (fazendo, assim, com que o íon possua uma carga elétrica diferente de zero)?

•26 Uma corrente de 0,300 A que atravesse o peito pode produzir fibrilação no coração de um ser humano, perturbando o ritmo dos batimentos cardíacos com efeitos possivelmente fatais. Se a corrente dura 2,00 min, quantos elétrons de condução atravessam o peito da vítima?

•27 Quantos elétrons é preciso remover de uma moeda para deixá-la com uma carga de $+1{,}0 \times 10^{-7}$ C?

•28 Duas pequenas gotas d'água esféricas, com cargas iguais de $-1{,}00 \times 10^{-16}$ C, estão separadas por uma distância entre os centros de 1,00 cm. (a) Qual é o valor do módulo da força eletrostática a que cada uma está submetida? (b) Quantos elétrons em excesso possui cada gota?

••29 A atmosfera da Terra é constantemente bombardeada por *raios cósmicos* provenientes do espaço sideral, constituídos principalmente por *prótons*. Se a Terra não possuísse uma atmosfera, cada metro quadrado da superfície terrestre receberia em média 1500 prótons por segundo. Qual seria a corrente elétrica recebida pela superfície de nosso planeta?

••30 A Fig. 21-33*a* mostra duas partículas carregadas, 1 e 2, que são mantidas fixas sobre um eixo x. O valor absoluto da carga da partícula 1 é $|q_1| = 8{,}00e$. A partícula 3, de carga $q_3 = +8{,}0e$, que estava inicialmente sobre o eixo x, nas vizinhanças da partícula 2, é deslocada no sentido positivo do eixo x. Em conseqüência, a força eletrostática total $\vec{F}_{2,\text{tot}}$ a que está sujeita a partícula 2 varia. A Fig. 21-33*b* mostra a componente x dessa força em função da coordenada x da partícula 3. A escala do eixo x é definida por $x_s = 0{,}80$ m. A curva possui uma assíntota $F_{2,\text{tot}} = 1{,}5 \times 10^{-25}$ N para $x \to \infty$. Determine o valor da carga q_2 da partícula 2, em unidades de e, incluindo o sinal.

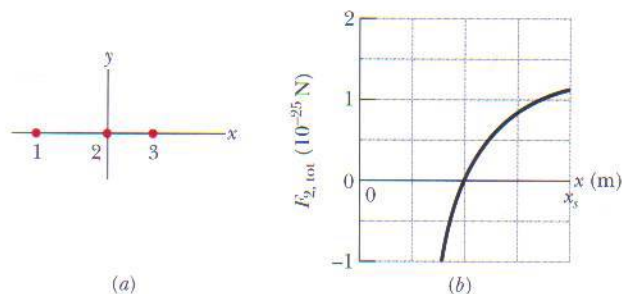



FIG. 21-33 Problema 30.

••31 Calcule o número de coulombs de carga positiva que estão presentes em 250 cm³ de água (neutra). (*Sugestão:* Um átomo de hidrogênio contém um próton; um átomo de oxigênio contém oito prótons.)

••32 Na Fig. 21-28, as partículas 1 e 2 são mantidas fixas sobre o eixo x, separadas por uma distância $L = 8{,}00$ cm. As cargas das partículas são $q_1 = +e$ e $q_2 = -27e$. A partícula 3, de carga $q_3 = +4e$, colocada sobre o eixo dos x, entre as partículas 1 e 2, é submetida a uma força eletrostática total $\vec{F}_{3,\text{tot}}$. (a) Em que posição deve ser colocada a partícula 3 para que o módulo de $\vec{F}_{3,\text{tot}}$ seja mínimo? (b) Qual é o valor do módulo de $\vec{F}_{3,\text{tot}}$ nessa situação?

••33 Na Fig. 21-34, as partículas 2 e 4, de carga $-e$, são mantidas fixas sobre o eixo y, nas posições $y_2 = -10{,}0$ cm e $y_4 = 5{,}00$ cm. As partículas 1 e 3, de carga $-e$, podem ser deslocadas ao longo do eixo x. A partícula 5, de carga $+e$, é mantida fixa na origem. Inicialmente, a partícula 1 se encontra no ponto $x_1 = -10{,}0$ cm e a partícula 3 no ponto $x_3 = 10{,}0$ cm. (a) Para que ponto sobre o eixo x a partícula 1 deve ser deslocada para que a força eletrostática total $\vec{F}_{\text{tot}}$ a que a partícula 5 está submetida sofra uma rotação de 30° no sentido anti-horário? (b) Com a partícula 1 mantida fixa na nova posição, para que ponto sobre o eixo x a partícula 3 deve ser deslocada para que $\vec{F}_{\text{tot}}$ volte à direção original?

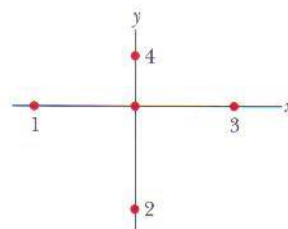



FIG. 21-34 Problema 33.

•••34 A Fig. 21-35 mostra dois elétrons, 1 e 2, sobre o eixo x, e dois íons, 3 e 4, de carga $-q$, sobre o eixo y. O ângulo θ é o mesmo para os dois íons. O elétron 2 está livre para se mover; as outras três partículas são mantidas fixas a uma distância horizontal R do elétron 2, e seu objetivo é impedir que o elétron 2 se mova. Para valores fisicamente possíveis de $q \leq 5e$, determine (a) o menor valor possível de θ; (b) o segundo menor valor possível de θ; (c) o terceiro menor valor possível de θ.

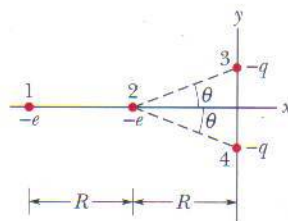



FIG. 21-35 Problema 34.

•••35 Nos cristais de cloreto de césio, os íons de césio, Cs^+, estão nos oito vértices de um cubo, com um íon de cloro, Cl^-, no centro (Fig. 21-36). A aresta do cubo tem 0,40 nm. Os íons Cs^+ possuem um elétron a menos (e, portanto, uma carga $+e$), e os íons Cl^- possuem um elétron a mais (e, portanto, uma carga $-e$). (a) Qual é o módulo da força eletrostática total exercida sobre o íon Cl^- pelos íons Cs^+ situados nos vértices do cubo? (b) Se um dos íons Cs^- está faltando, dizemos que o cristal possui um *defeito*; qual é o módulo da força eletrostática total exercida sobre o íon Cl^- pelos íons Cs^+ restantes?

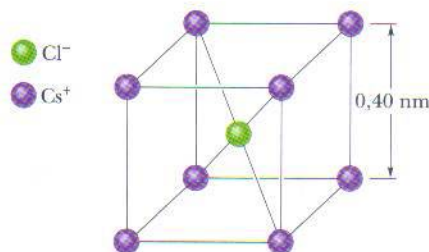



FIG. 21-36 Problema 35.

seção 21-6 A Carga É Conservada

•36 Elétrons e pósitrons são produzidos em reações nucleares envolvendo prótons e nêutrons conhecidas pelo nome genérico de *decaimento beta*. (a) Se um próton se transforma em um nêutron, é produzido um elétron ou um pósitron? (b) Se um nêutron se transforma em um próton, é produzido um elétron ou um pósitron?

•37 Determine X nas seguintes reações nucleares: (a) $^{1}H + {}^{9}Be \rightarrow X + n$; (b) $^{12}C + {}^{1}H \rightarrow X$; (c) $^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + X$. (*Sugestão:* Consulte o Apêndice F.)

Problemas Adicionais

38 Na Fig. 21-37, quatro partículas são mantidas fixas sobre o eixo x, separadas por uma distância d = 2,00 cm. As cargas das partículas são $q_1 = +2e$, $q_2 = -e$, $q_3 = +e$ e $q_4 = +4e$, onde $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Em termos dos vetores unitários, determine a força eletrostática a que está submetida (a) a partícula 1; (b) a partícula 2.

FIG. 21-37 Problema 38.

39 Na Fig. 21-38, a partícula 1, de carga $+4e$, está a uma distância d_1 = 2,00 mm do solo, e a partícula 2, de carga $+6e$, está sobre o solo, a uma distância horizontal d_2 = 6,00 mm da partícula 1. Qual é a componente x da força eletrostática exercida pela partícula 1 sobre a partícula 2?

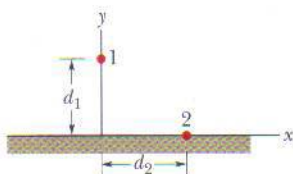



FIG. 21-38 Problema 39.

40 Uma partícula de carga Q é mantida fixa na origem de um sistema de coordenadas xy. No instante t = 0, uma partícula (m = 0,800 g, q = +4,00 μC) está situada sobre o eixo x, no ponto x = 20,0 cm, e se move com uma velocidade de 50,0 m/s no sentido positivo do eixo y. Para que valor de Q a partícula executa um movimento circular uniforme? (Despreze o efeito da força gravitacional sobre a partícula.)

41 Uma barra não-condutora carregada, com um comprimento de 2,00 m e uma seção reta de 4,00 cm², está sobre o semi-eixo x positivo com uma das extremidades na origem. A *densidade volumétrica de carga* ρ é a carga por unidade de volume em coulombs por metro cúbico. Determine quantos elétrons em excesso existem na barra se (a) ρ é uniforme, com um valor de $-4{,}00\ \mu C/m^3$; (b) o valor de ρ é dado pela equação $\rho = bx^2$, onde $b = -2{,}00\ \mu C/m^5$.

42 Uma carga de 6,0 μC é dividida em duas partes, que são mantidas a uma distância de 3,00 mm. Qual é o maior valor possível da força eletrostática entre as duas partes?

43 Quantos megacoulombs de carga elétrica positiva existem em 1,00 mol de hidrogênio (H_2) neutro?

44 A Fig. 21-39 mostra uma barra longa, não-condutora, de massa desprezível, de comprimento L, articulada no centro e equilibrada por um bloco de peso W a uma distância x da extremidade esquerda. Nas extremidades direita e esquerda da barra existem pequenas esferas condutoras de carga positiva q e $2q$, respectivamente. A uma distância vertical h abaixo das esferas existem esferas fixas de carga positiva Q. (a) Determine a distância x para que a barra fique equilibrada na horizontal. (b) Qual deve ser o valor de h para que a barra não exerça nenhuma força vertical sobre o apoio quando está equilibrada na horizontal?

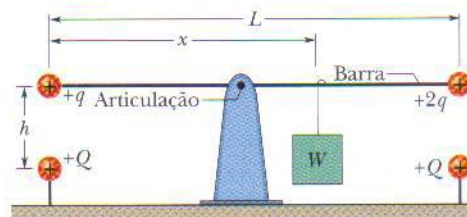



FIG. 21-39 Problema 44.

45 Um nêutron é composto por um quark "up", com uma carga de $+2e/3$, e dois quarks "down", cada um com uma carga de $-e/3$. Se os dois quarks "down" estão separados por uma distância de $2{,}6 \times 10^{-15}$ m no interior do nêutron, qual é o módulo da força eletrostática entre eles?

46 Na Fig. 21-40, três esferas condutoras iguais são dispostas de modo a formar um triângulo eqüilátero de lado d = 20,0 cm. Os raios das esferas são muito menores que d, e as cargas das esferas são q_A = −2,00 nC, q_B = −4,00 nC e q_C = +8,00 nC. (a) Qual é o módulo da força eletrostática entre as esferas A e C? Em seguida, é executado o seguinte procedimento: A e B são ligadas por um fio fino, que depois é removido; B é ligada à terra pelo fio, que depois é removido; B e C são ligadas pelo fio, que depois é removido. Determine o novo valor (a) do módulo da força eletrostática entre as esferas A e C; (b) do módulo da força eletrostática entre as esferas B e C.

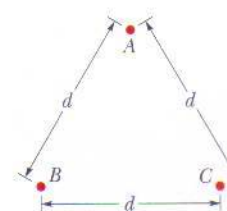



FIG. 21-40 Problema 46.

47 Qual seria o módulo da força eletrostática entre duas cargas pontuais de 1,00 C separadas por uma distância de (a) 1,00 m e (b) 1,00 km se essas cargas pontuais pudessem existir (o que não é verdade) e fosse possível montar um sistema desse tipo?

48 Na Fig. 21-41, três esferas condutoras iguais possuem inicialmente as seguintes cargas: esfera A, $4Q$; esfera B, $-6Q$; esfera C, 0. As esferas A e B são mantidas fixas, a uma distância entre os centros que é muito maior que o raio das esferas. Dois experimentos são executados. No experimento 1 a esfera C é colocada em contato com a esfera A, depois (separadamente) com a esfera B e, finalmente, é removida. No experimento 2, que começa com os mesmos estados iniciais, a ordem é invertida: a esfera C é co-

locada em contato com a esfera B, depois (separadamente) com a esfera A e, finalmente, é removida. Qual é a razão entre a força eletrostática entre A e B no fim do experimento 2 e a força eletrostática entre A e B no fim do experimento 1?

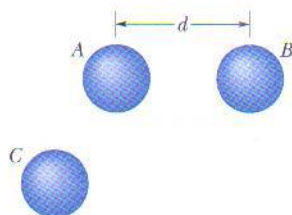



FIG. 21-41 Problemas 48 e 67.

49 Sabemos que a carga negativa do elétron e a carga positiva do próton têm o mesmo valor absoluto. Suponha que houvesse uma diferença de 0,00010% entre as duas cargas. Nesse caso, qual seria a força de atração ou repulsão entre duas moedas de cobre situadas a 1,0 m de distância? Suponha que cada moeda contenha 3×10^{22} átomos de cobre. (*Sugestão:* Um átomo de cobre contém 29 prótons e 29 elétrons.) O que é possível concluir a partir desse resultado?

50 A que distância devem ser colocados dois prótons para que o módulo da força eletrostática que um deles exerce sobre o outro seja igual à força gravitacional a que um dos prótons está submetido na superfície terrestre?

51 Da carga Q que está presente em uma pequena esfera, uma fração α deve ser transferida para uma segunda esfera. As esferas podem ser tratadas como partículas. (a) Para que valor de α o módulo da força eletrostática F entre as duas esferas é o maior possível? Determine (b) o menor e (c) o maior valor de α para o qual F é igual à metade do valor máximo.

52 Se um gato se esfrega repetidamente nas calças de algodão do dono em um dia seco, a transferência de carga do pêlo do gato para o tecido de algodão pode deixar o dono com um excesso de carga de $-2{,}00\ \mu C$. (a) Quantos elétrons são transferidos para o dono?

O dono decide lavar as mãos, mas quando aproxima os dedos da torneira acontece uma descarga elétrica. (b) Nessa descarga, elétrons são transferidos da torneira para o dono do gato ou vice-versa? (c) Pouco antes de acontecer a descarga, são induzidas cargas positivas ou negativas na torneira? (d) Se o gato tivesse se aproximado da torneira, a transferência de elétrons seria em que sentido? (e) Se você for acariciar um gato em um dia seco, deve tornar cuidado para não aproximar os dedos do focinho do animal, caso contrário poderá ocorrer uma descarga elétrica. Levando em conta o fato de que o pêlo de gato é um material não-condutor, explique como isso pode acontecer.

53 (a) Que cargas iguais e positivas teriam que ser colocadas na Terra e na Lua para neutralizar a atração gravitacional entre os dois astros? (b) Por que não é necessário conhecer a distância entre a Terra e a Lua para resolver este problema? (c) Quantos quilogramas de íons de hidrogênio (ou seja, prótons) seriam necessários para acumular a carga positiva calculada no item (a)?

54 Na Fig. 21-42, duas pequenas esferas condutoras de mesma massa m e mesma carga q estão penduradas em fios não-condutores de comprimento L. Suponha que o ângulo θ é tão pequeno que a aproximação $\tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta$ pode ser usada. (a) Mostre que a distância de equilíbrio entre as esferas é dada por

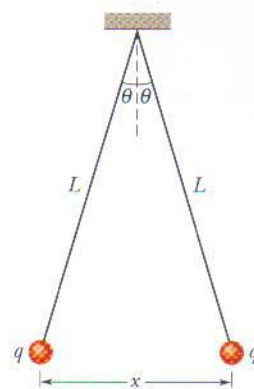



FIG. 21-42 Problemas 54 e 55.

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

(b) Se $L = 120$ cm, $m = 10$ g e $x = 5{,}0$ cm, qual é o valor de $|q|$?

55 (a) Explique o que acontece com as esferas do Problema 54 se uma delas é descarregada (ligando, por exemplo, momentaneamente a esfera à terra). (b) Determine a nova distância de equilíbrio x, usando os valores dados de L e m e o valor calculado de $|q|$.

56 Na Fig. 21-24, as partículas 1 e 2 são mantidas fixas. Se a força eletrostática total exercida sobre a partícula 3 é zero e $L_{23} = -2{,}00L_{12}$, qual é o valor da razão q_1/q_2?

57 Qual é a carga total, em coulombs, de 75,0 kg de elétrons?

58 Na Fig. 21-43, seis partículas carregadas cercam a partícula 7 a uma distância de $d = 1{,}0$ cm ou $2d$, como mostra a figura. As cargas são $q_1 = +2e$, $q_2 = +4e$, $q_3 = +e$, $q_4 = +4e$, $q_5 = +2e$, $q_6 = +8e$, $q_7 = +6e$, com $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Qual é o módulo da força eletrostática a que está submetida a partícula 7?

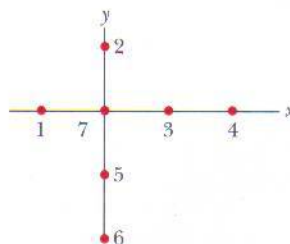



FIG. 21-43 Problema 58.

59 Três partículas carregadas formam um triângulo: a partícula 1, com uma carga $Q_1 = 80{,}0$ nC, está no ponto (0; 3,00 mm); a partícula 2, com uma carga Q_2, está no ponto (0; −3,00 mm), e a partícula 3, com uma carga $q = 18{,}0$ nC, está no ponto (4,00 mm; 0). Em termos dos vetores unitários, qual é a força eletrostática exercida sobre a partícula 3 pelas outras duas partículas (a) para $Q_2 = 80{,}0$ nC; (b) para $Q_2 = -80{,}0$ nC?

60 Na Fig. 21-44, determine (a) o módulo e (b) a orientação da força eletrostática total a que está submetida a partícula 4. Todas as partículas são mantidas fixas no plano xy; $q_1 = -3{,}20 \times 10^{-19}$ C; $q_2 = +3{,}20 \times 10^{-19}$ C; $q_3 = +6{,}40 \times 10^{-19}$ C; $q_4 = +3{,}20 \times 10^{-19}$ C; $\theta_1 = 35{,}0°$; $d_1 = 3{,}00$ cm; $d_2 = d_3 = 2{,}00$ cm.

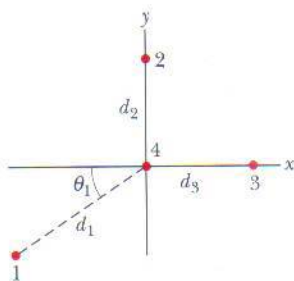



FIG. 21-44 Problema 60.

61 Duas cargas pontuais de 30 nC e −40 nC são mantidas fixas sobre o eixo x, na origem e no ponto $x = 72$ cm, respectivamente. Uma partícula com uma carga de 42 μC é liberada a partir do repouso no ponto $x = 28$ cm. Se a aceleração inicial da partícula é 100 km/s^2, qual é a massa da partícula?

62 Na Fig. 21-23, quatro partículas formam um quadrado. As cargas são $q_1 = +Q$, $q_2 = q_3 = q$ e $q_4 = -2{,}00Q$. Qual é o valor de q/Q se a força eletrostática total a que está submetida a partícula 1 é zero?

63 Cargas pontuais de +6,0 μC e −4,0 μC são mantidas fixas sobre o eixo dos x nos pontos $x = 8{,}0$ m e $x = 16$ m, respectivamente. Que carga deve ser colocada no ponto $x = 24$ m para que a força eletrostática total sobre uma carga colocada na origem seja nula?

64 Na Fig. 21-28, a partícula 1, com uma carga de −80,0 μC, e a partícula 2, com uma carga de +40 μC, são mantidas fixas sobre o eixo x, separadas por uma distância $L = 20{,}0$ cm. Em termos dos vetores unitários, determine a força eletrostática total a que é submetida uma partícula 3, de carga $q_3 = 20{,}0$ μC, se a partícula 3 é colocada (a) na ponto $x = 40{,}0$ cm; (b) no ponto $x = 80{,}0$ cm. Determine também (c) a coordenada x; (d) a coordenada y da partícula 3 para que a força eletrostática total a que é submetida seja nula.

65 No decaimento radioativo da Eq. 21-13, um núcleo de ^{238}U se transforma em ^{234}Th e ^{4}He, que é ejetado. (Trata-se de núcleos, e não de átomos; assim, não há elétrons envolvidos.) Para uma distância entre os núcleos de ^{234}Th e ^{4}He de $9{,}0 \times 10^{-15}$ m, determine (a) a força eletrostática entre os núcleos; (b) a aceleração do núcleo de ^{4}He.

66 A soma das cargas de duas pequenas esferas positivamente carregadas é $5{,}0 \times 10^{-5}$ C. Se cada esfera é repelida pela outra com uma força eletrostática de 1,0 N e as esferas estão separadas por uma distância de 2,0 m, qual é a carga da esfera com a menor carga?

67 As cargas iniciais das três esferas condutoras iguais da Fig. 21-41 são as seguintes: esfera A, Q; esfera B, $-Q/4$; esfera C, $Q/2$, onde $Q = 2{,}00 \times 10^{-14}$ C. As esferas A e B são mantidas fixas, com uma distância entre os centros $d = 1{,}20$ m, que é muito maior que o raio das esferas. A esfera C é colocada em contato primeiro com a esfera A e depois com a esfera B antes de ser removida. Qual é o módulo da força eletrostática entre as esferas A e B?

68 Um elétron se encontra no vácuo, perto da superfície da Terra, no ponto $y = 0$ de um eixo vertical. Qual deve ser a coordenada y de um segundo elétron situado sobre o eixo y para que a força eletrostática exercida sobre o primeiro elétron compense o peso do primeiro elétron?

69 Na Fig. 21-28, a partícula 1, de carga $-5{,}00q$, e a partícula 2, de carga $+2{,}00q$, são mantidas a uma distância L sobre o eixo x. Se uma partícula 3, de carga desconhecida q_3, é colocada em um ponto tal que a força eletrostática total exercida sobre a partícula é zero, determine (a) a coordenada x; (b) a coordenada y da partícula 3.

70 Dois estudantes de engenharia, João, com uma massa de 90 kg, e Maria, com uma massa de 45 kg, estão a 30 m de distância um do outro. Suponha que existam desequilíbrios de carga de 0,01% nos corpos dos dois estudantes, com um deles positivo e o outro negativo. Determine a ordem de grandeza da força de atração eletrostática entre os dois estudantes substituindo-os por esferas de água com a mesma massa.

Campos Elétricos

Steve Hopkin/Taxi/Getty Images, Inc.

A reprodução de muitas espécies de plantas floríferas depende de insetos para transportar o pólen de uma flor para outra. As abelhas normalmente prestam esse serviço ao visitarem as flores para colher néctar. Entretanto, elas não se limitam a roçar na flor, recolhendo o pólen do mesmo modo como recolhemos pó de giz de um quadro-negro se roçarmos nele. Na verdade, o pólen salta da flor para a abelha, fica preso ao corpo do inseto enquanto ele voa para uma segunda flor, e então salta para a segunda flor.

O que faz o pólen saltar, primeiro para a abelha e depois para a flor?

A resposta está neste capítulo.

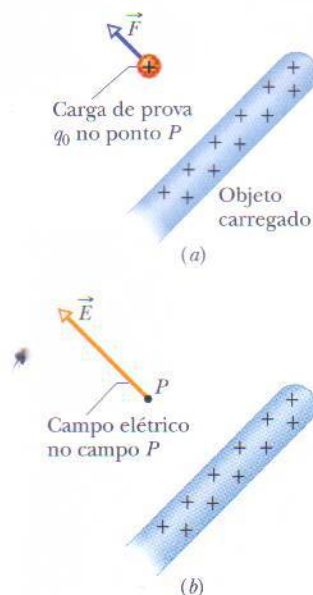



FIG. 22-1 (*a*) Uma carga de prova positiva q_0 está colocada em um ponto P nas proximidades de um objeto carregado. Uma força eletrostática $\vec{F}$ age sobre a carga de prova. (*b*) O campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P produzido por um objeto carregado.

22-1 O QUE É FÍSICA?

A física do capítulo anterior mostra como determinar a força elétrica exercida sobre uma partícula 1 de carga $+q_1$ quando a partícula é colocada nas proximidades de uma partícula 2 de carga $+q_2$. Resta, porém, uma pergunta intrigante: como a partícula 1 "sabe" que existe a partícula 2? Em outras palavras, se as partículas não se tocam, por que a partícula 2 afeta a partícula 1? Como explicar o que constitui na realidade uma *ação à distância*, já que não existe uma ligação visível entre as partículas?

Um dos objetivos da física é registrar observações a respeito do nosso mundo, como o módulo e a orientação da força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1; outro é explicar essas observações. Um dos objetivos deste capítulo é explicar o que acontece quando uma partícula sofre os efeitos de uma força elétrica. Podemos dizer que a partícula 2 cria um **campo elétrico** no espaço que a cerca. Quando a partícula 1 é colocada em um ponto qualquer desse espaço a partícula "sabe" que a partícula 2 existe porque é afetada pelo campo elétrico que a partícula 2 criou nesse ponto. Assim, a partícula 2 afeta a partícula 1 não através de um contato direto, mas através do campo elétrico produzido pela partícula 2.

Neste capítulo vamos definir o campo elétrico e discutir as formas de calculá-lo para vários sistemas de partículas carregadas.

22-2 | O Campo Elétrico

A temperatura tem um valor definido em todos os pontos de uma sala. Para medir a temperatura em um ponto ou em uma série de pontos basta usar um termômetro. A distribuição de temperaturas resultante é chamada de *campo de temperatura*. Analogamente, podemos definir um *campo de pressão* para a atmosfera, constituído pela distribuição de valores de pressão do ar, um para cada ponto da atmosfera. Os campos de temperatura e de pressão são *campos escalares*, já que a temperatura e a pressão são grandezas escalares.

O campo elétrico é um *campo vetorial*, constituído por uma distribuição de *vetores*, um para cada ponto de uma região em torno de um objeto eletricamente carregado, como um bastão de vidro. Em princípio, podemos definir o campo elétrico em um ponto nas proximidades de um objeto carregado, como o ponto P da Fig. 22-1*a*, da seguinte forma: colocamos no ponto P uma carga positiva q_0, chamada *carga de prova*, medimos a força eletrostática $\vec{F}$ que age sobre a carga q_0 e definimos o campo elétrico $\vec{E}$ produzido pelo objeto através da equação

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{(campo elétrico).} \tag{22-1}$$

Assim, o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P é $E = F/q_0$ e a orientação de $\vec{E}$ é a da força $\vec{F}$ que age sobre a carga de prova (que supomos ser *positiva*). Como mostra a Fig. 22-1*b*, representamos o campo elétrico no ponto P como um vetor cuja origem está em P. Para definir o campo elétrico em uma região do espaço definimos o campo em todos os pontos da região.

A unidade de campo elétrico no SI é o newton por coulomb (N/C). A Tabela 22-1 mostra os campos elétricos associados a alguns objetos.

Embora seja usada uma carga de prova para definir o campo elétrico produzido por um objeto carregado, o campo existe independentemente da carga de prova. O campo no ponto P da Fig. 22-1*b* existia antes de ser introduzida a carga de prova da Fig. 22-1*a* e continua a existir depois que a carga de prova é introduzida. (Na definição de campo elétrico está implícita a suposição de que a presença da carga de prova não afeta a distribuição de cargas e, portanto, não afeta o campo elétrico que estamos medindo.)

TABELA 22-1

Alguns Campos Elétricos

Local ou Situação	Valor (N/C)
Superfície de um núcleo de urânio	3×10^{21}
Átomo de hidrogênio, a uma distância de $5{,}29 \times 10^{-11}$ m do núcleo	5×10^{11}
Ruptura dielétrica do ar	3×10^{6}
Perto da superfície carregada de uma fotocopiadora	10^{5}
Perto de um pente carregado	10^{3}
Atmosfera inferior	10^{2}
Interior de um fio de cobre de uma instalação residencial	10^{-2}

Para investigar o papel de um campo elétrico na interação entre objetos carregados temos que realizar duas tarefas: (1) calcular o campo elétrico produzido por uma dada distribuição de cargas; (2) calcular a força que um campo elétrico dado exerce sobre uma carga. A primeira tarefa será executada nas Seções 22-4 a 22-7 para várias distribuições de cargas. A segunda será executada nas Seções 22-8 e 22-9 para uma carga pontual e um par de cargas pontuais na presença de um campo elétrico. Antes, porém, vamos discutir uma forma de visualizar campos elétricos.

FIG. 22-2 (*a*) Uma força eletrostática $\vec{F}$ age sobre uma carga de prova positiva colocada nas proximidades de uma esfera que contém uma distribuição uniforme de cargas negativas. (*b*) O vetor campo elétrico $\vec{E}$ na posição da carga de prova e as linhas de campo no espaço que cerca a esfera. As linhas de campo elétrico *terminam* na esfera negativamente carregada. (As linhas têm origem em cargas positivas distantes.)

22-3 | Linhas de Campo Elétrico

O cientista inglês Michael Faraday, que introduziu a idéia de campos elétricos no século XIX, imaginava que o espaço nas vizinhanças de um corpo eletricamente carregado era ocupado por *linhas de força*. Embora não se acredite mais na existência dessas linhas, hoje conhecidas como **linhas de campo elétrico**, elas são uma boa maneira de visualizar os campos elétricos.

A relação entre as linhas de campo e os vetores de campo elétrico é a seguinte: (1) em qualquer ponto, a orientação de uma linha de campo retilínea ou a orientação da tangente a uma linha de campo não-retilínea é a orientação do campo elétrico $\vec{E}$ nesse ponto; (2) as linhas de campo são desenhadas de tal forma que o número de linhas por unidade de área, medido em um plano perpendicular às linhas, é proporcional ao *módulo* de $\vec{E}$. Assim, E tem valores elevados nas regiões em que as linhas de campo estão mais próximas e valores pequenos nas regiões em que as linhas de campo estão mais afastadas.

A Fig. 22-2*a* mostra uma esfera com uma distribuição homogênea de cargas negativas. Quando colocamos uma carga de prova *positiva* nas proximidades da esfera a carga de prova é submetida a uma força eletrostática dirigida *para o centro* da esfera. Isso significa que em todos os pontos nas proximidades da esfera o vetor campo elétrico aponta para o centro da esfera. Esse padrão pode ser visto nas linhas de campo da Fig. 22-2*b*, que apontam na mesma direção que os vetores da força eletrostática e do campo elétrico. Além disso, o maior espaçamento das linhas em pontos mais distantes mostra que o módulo do campo elétrico diminui com a distância do centro da esfera.

Se a esfera da Fig. 22-2 estivesse carregada com cargas *positivas*, os vetores campo elétrico apontariam *para longe* da esfera. Assim, as linhas de campo elétrico também apontariam para longe da esfera. Temos, portanto, a seguinte regra:

As linhas de campo elétrico se afastam das cargas positivas (onde começam) e se aproximam das cargas negativas (onde terminam).

A Fig. 22-3*a* mostra parte de uma *placa* infinita não-condutora com uma distribuição uniforme de cargas positivas em uma das superfícies. Quando colocamos uma carga de prova positiva nas proximidades da placa a carga é submetida a uma força eletrostática perpendicular à placa, já que as forças aplicadas em todas as outras direções se cancelam por causa da simetria. Além disso, o sentido da força é

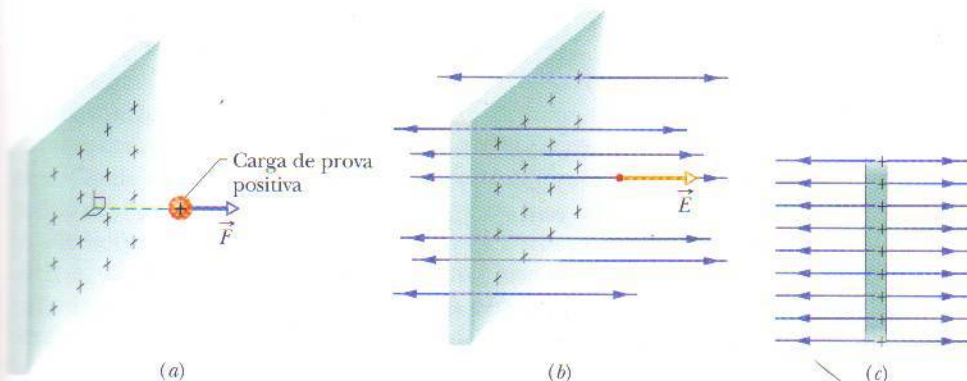



FIG. 22-3 (*a*) Uma força eletrostática $\vec{F}$ age sobre uma carga de prova positiva colocada nas proximidades de uma placa muito grande, não-condutora, com uma distribuição uniforme de cargas positivas em uma das superfícies. (*b*) O vetor campo elétrico $\vec{E}$ na posição da carga de prova e as linhas de campo nas vizinhanças da placa. As linhas de campo elétrico *começam* na placa positivamente carregada. (*c*) Vista lateral de (*b*).

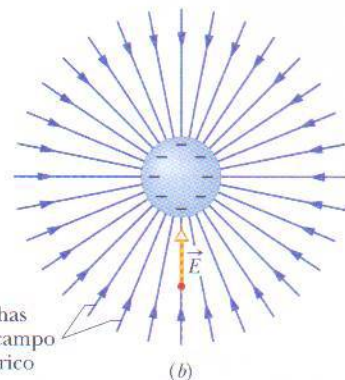



FIG. 22-4 Linhas de campo para duas cargas pontuais positivas iguais. As cargas se repelem. (As linhas terminam em cargas negativas distantes.) Para visualizar o padrão tridimensional das linhas de campo, gire mentalmente a figura em torno de um eixo passando pelas cargas. O padrão tridimensional e o campo elétrico que representa possuem *simetria rotacional* em relação a este eixo. A figura mostra também o vetor campo elétrico em um ponto do espaço. Observe que o vetor é tangente à linha de campo que passa pelo ponto.

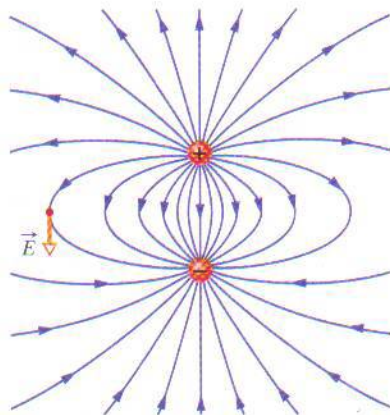



FIG. 22-5 Linhas de campo para uma carga pontual positiva e uma carga pontual negativa de mesmo valor absoluto situada nas proximidades. As cargas se atraem. O padrão tridimensional de linhas de campo e o campo elétrico que representa possuem simetria rotacional em relação a um eixo passando pelas cargas. A figura mostra também o vetor campo elétrico em um ponto do espaço; o vetor é tangente à linha de campo que passa pelo ponto.

para longe da placa. Assim, os vetores campo elétrico e as linhas de campo em qualquer ponto do espaço, dos dois lados da placa, são também perpendiculares à placa e apontam para longe da placa (Figs. 22-3*b* e *c*). Como a carga está homogeneamente distribuída na placa, todos os vetores campo elétrico têm o mesmo módulo. Este tipo de campo elétrico, no qual os vetores têm o mesmo módulo e a mesma orientação em todos os pontos do espaço, é chamado de *campo elétrico uniforme*.

Naturalmente, nenhuma placa real não-condutora (como, por exemplo, um pedaço de plástico) tem dimensões infinitas; entretanto, na região próxima do centro de uma placa real, longe das bordas, o campo elétrico e as linhas de campo têm a orientação das Figs. 22-3*b* e *c*.

A Fig. 22-4 mostra as linhas de campo para duas cargas positivas iguais. A Fig. 22-5 mostra as linhas de campo para duas cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos, uma configuração conhecida como **dipolo elétrico**. Embora as linhas de campo raramente sejam usadas de forma quantitativa, são muito úteis para visualizar as configurações de campo elétrico. O leitor não pode quase "ver" as cargas se repelirem na Fig. 22-4 e se atraírem na Fig. 22-5?

22-4 | Campo Elétrico Produzido por uma Carga Pontual

Para determinar o campo elétrico produzido a uma distância r de uma carga pontual q, colocamos uma carga de prova q_0 nesse ponto. De acordo com a lei de Coulomb (Eq. 21-1), o módulo da força eletrostática que age sobre q_0 é dado por

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\,\hat{\mathrm{r}}. \tag{22-2}$$

O sentido de $\vec{F}$ é para longe da carga pontual se q é positiva e na direção da carga pontual se q é negativa. De acordo com a Eq. 22-1, o módulo do vetor campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathrm{r}} \quad \text{(carga pontual).} \tag{22-3}$$

O sentido de $\vec{E}$ é o mesmo da força que age sobre a carga de prova: para longe da carga pontual, se q é positiva, e na direção da carga pontual, se q é negativa.

Como não há nada de especial no ponto que escolhemos para colocar q_0, a Eq. 22-3 pode ser usada para calcular o campo em qualquer ponto do espaço. A Fig. 22-6 mostra o campo produzido por uma carga positiva em forma vetorial (e não como linhas de campo).

Não é difícil calcular o campo elétrico total, ou resultante, produzido por duas ou mais cargas pontuais. De acordo com a Eq. 21-7, quando colocamos uma carga de

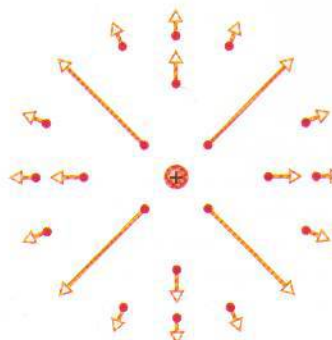



FIG. 22-6 Vetores campo elétrico em vários pontos das vizinhanças de uma carga pontual positiva.

prova positiva q_0 nas proximidades de n cargas pontuais $q_1, q_2, \ldots, q_n$, a força total $\vec{F}_0$ a que a carga de prova é submetida é dada por

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \cdots + \vec{F}_{0n}.$$

Assim, de acordo com a Eq. 22-1, o campo elétrico total na posição da carga de prova é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_i}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0}$$
$$= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_i + \cdots + \vec{E}_n. \qquad (22\text{-}4)$$

Onde $\vec{E}_i$ é o campo elétrico que seria criado somente pela carga pontual i. A Eq. 22-4 mostra que o princípio de superposição se aplica aos campos elétricos.

TESTE 1 A figura mostra um próton p e um elétron e sobre o eixo x. Qual é o sentido do campo elétrico produzido pelo elétron (a) no ponto S; (b) no ponto R? Qual é o sentido do campo elétrico total produzido pelas duas partículas (c) no ponto R; (d) no ponto S?

Exemplo 22-1

A Fig. 22-7a mostra três partículas de cargas $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$ e $q_3 = -4Q$, todas situadas a uma distância d da origem. Determine o campo elétrico total $\vec{E}$ produzido na origem pelas três partículas.

FIG. 22-7 (a) Três partículas com cargas q_1, q_2 e q_3 situadas à mesma distância d da origem. (b) Os vetores campo elétrico $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ e $\vec{E}_3$ produzidos na origem pelas três partículas. (c) O vetor campo elétrico $\vec{E}_3$ e a soma vetorial $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ na origem.

IDÉIA-CHAVE As cargas q_1, q_2 e q_3 produzem na origem campos elétricos $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ e $\vec{E}_3$, respectivamente, e o campo elétrico total é a soma vetorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$. Para calcular esta soma, precisamos conhecer o módulo e a orientação dos três vetores.

Módulos e Orientações: Para determinar o módulo de $\vec{E}_1$, que é produzido por q_1, usamos a Eq. 22-3, substituindo r por d e q por $2Q$. O resultado é o seguinte:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}.$$

Procedendo de modo análogo, obtemos os módulos dos campos $\vec{E}_2$ e $\vec{E}_3$:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} \quad \text{e} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}.$$

Em seguida, precisamos determinar a orientação dos vetores campo elétrico produzidos pelas três cargas na origem. Como q_1 é uma carga positiva, o vetor campo elétrico produzido pela carga aponta *para longe* de q_1; como q_2 e q_3 são cargas negativas, o vetor campo elétrico aponta *na direção* dessas cargas. Assim, os vetores campo elétrico produzidos na origem pelas três cargas têm a direção e o sentido indicados na Fig. 22-7b. (*Atenção:* Observe que colocamos a origem dos vetores no ponto em que os campos elétricos devem ser calculados; isso diminui a probabilidade de erro.)

Somando os campos: Podemos agora somar os campos vetorialmente, como fizemos para as forças no item (c) do Exemplo 21-1. No caso presente, porém, podemos usar a simetria dos vetores para simplificar os cálculos. De acordo com a Fig. 22-7b, os vetores $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ têm a mesma direção; assim, a soma vetorial dos dois vetores tem essa mesma direção e módulo

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2},$$

que, por coincidência, é igual ao módulo do vetor $\vec{E}_3$.

Devemos agora somar dois vetores, $\vec{E}_3$ e o vetor resultante da soma $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, que possuem o mesmo módulo e estão orientados simetricamente em relação ao eixo x, como mostra a Fig. 22-7*c*. Observando a Fig. 22-7*c*, vemos que, por simetria, as componentes y dos dois vetores se cancelam e as componentes x se somam. Assim, o campo elétrico total $\vec{E}$ na origem está orientado no sentido positivo do eixo x, e seu módulo é dado por

$$E = 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = (2)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}(0{,}866) = \frac{6{,}93Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}. \quad \text{(Resposta)}$$

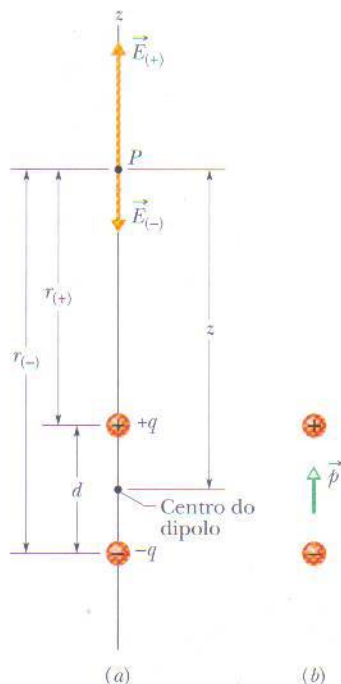



FIG. 22-8 (*a*) Um dipolo elétrico. Os vetores campo elétrico $\vec{E}_{(+)}$ e $\vec{E}_{(-)}$ no ponto P sobre o eixo do dipolo são produzidos pelas duas cargas do dipolo. As distâncias entre o ponto P e as duas cargas que formam o dipolo são $r_{(+)}$ e $r_{(-)}$. (*b*) O momento dipolar $\vec{p}$ do dipolo aponta da carga negativa para a carga positiva.

22-5 | Campo Elétrico Produzido por um Dipolo Elétrico

A Fig. 22-8*a* mostra duas partículas carregadas de módulo q e sinais opostos, separadas por uma distância d. Como observamos ao discutir a Fig. 22-5, esta configuração recebe o nome de *dipolo elétrico*. Vamos calcular o campo elétrico produzido pelo dipolo elétrico da Fig. 22-8*a* no ponto P, situado a uma distância z do centro do dipolo, sobre a reta que liga as duas partículas, conhecida como *eixo do dipolo*.

Por simetria, o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P (e também os campos $\vec{E}_{(+)}$ e $\vec{E}_{(-)}$ produzidos pelas partículas que formam o dipolo) deve ser paralelo ao eixo do dipolo, que foi tomado como sendo o eixo z. Aplicando o princípio de superposição aos campos elétricos, vemos que o módulo E do campo elétrico no ponto P é dado por

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \quad (22\text{-}5)$$

Reagrupando os termos, obtemos:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2}\right). \quad (22\text{-}6)$$

Reduzindo as frações ao mesmo denominador e simplificando, temos:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d/z}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\frac{d}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}. \quad (22\text{-}7)$$

Em geral, estamos interessados nos efeitos elétricos de um dipolo apenas a distâncias relativamente grandes em comparação com as dimensões do dipolo, ou seja, a distâncias tais que $z \gg d$. Nesse caso, $d/2z \ll 1$ na Eq. 22-7, e podemos desprezar o termo $d/2z$ no denominador, o que nos dá

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3}. \quad (22\text{-}8)$$

O produto qd, que envolve os dois parâmetros q e d que definem o dipolo, é o módulo p de uma grandeza conhecida como **momento dipolar elétrico** $\vec{p}$ do dipolo. (A unidade de $\vec{p}$ é o coulomb-metro.) Assim, podemos escrever a Eq. 22-8 na forma

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} \quad \text{(dipolo elétrico)}. \quad (22\text{-}9)$$

O sentido de $\vec{p}$ é tomado como sendo do lado negativo para o lado positivo do dipolo, como mostra a Fig. 22-8*b*. Podemos usar o sentido de $\vec{p}$ para especificar a orientação de um dipolo.

De acordo com a Eq. 22-9, se o campo elétrico de um dipolo é medido apenas em pontos distantes não é possível determinar os valores de q e d separadamente, mas apenas o produto qd. O campo em pontos distantes permanece inalterado quando, por exemplo, o valor de q é multiplicado por 2 e, ao mesmo tempo, o valor de d é dividido por 2.

Embora a Eq. 22-9 seja válida apenas para pontos distantes sobre o eixo do dipolo, para *todos* os pontos distantes, estejam ou não sobre o eixo do dipolo, o valor de E para um dipolo é proporcional a $1/r^3$, onde r é a distância entre o ponto em questão e o centro do dipolo.

Observando a Fig. 22-8 e as linhas de campo da Fig. 22-5, vemos que a direção de $\vec{E}$ para pontos distantes sobre o eixo do dipolo é sempre a direção do vetor momento dipolar $\vec{p}$. Isto acontece tanto quando o ponto P da Fig. 22-8*a* está mais próximo na carga positiva como quando está mais próximo da carga negativa.

De acordo com a Eq. 22-9, se a distância entre um ponto e um dipolo é multiplicada por 2, o campo elétrico no ponto é dividido por 8. Por outro lado, quando a distância entre um ponto e uma carga elétrica isolada é multiplicada por 2 o campo elétrico é dividido por 4 (veja a Eq. 22-3). Assim, o campo elétrico de um dipolo diminui mais rapidamente com a distância que o campo elétrico produzido por uma carga isolada. A razão para essa diminuição mais rápida do campo elétrico no caso de um dipolo está no fato de que, a distância, um dipolo se comporta como um par de cargas elétricas de sinais opostos que quase se cancelam; assim, os campos elétricos produzidos por essas cargas em pontos distantes também quase se cancelam.

Exemplo 22-2

Os *sprites* (Fig. 22-9*a*) são enormes clarões que às vezes são vistos no céu, acima de grandes tempestades. Foram observados durante décadas por pilotos que voavam à noite, mas eram tão fracos e fugazes que a maioria dos pilotos imaginava que não passavam de ilusões. Na década de 1990, porém, os *sprites* foram registrados por câmaras de vídeo. Ainda não são muito bem compreendidos, mas acredita-se que sejam produzidos quando ocorre um relâmpago especialmente intenso entre a Terra e uma nuvem de tempestade, particularmente se o relâmpago transfere uma grande quantidade de carga negativa, $-q$, da Terra para a base da nuvem (Fig. 22-9*b*).

Logo depois da transferência, a Terra possui uma distribuição complexa de cargas positivas; entretanto, podemos usar um modelo simplificado do campo elétrico produzido pelas cargas da nuvem e da Terra supondo que existe um dipolo vertical formado por uma carga $-q$ na altura h da nuvem e uma carga $+q$ a uma distância h abaixo da superfície (Fig. 22-9*c*). Se $q = 200$ C e $h = 6{,}0$ km, qual é o módulo do campo elétrico do dipolo a uma altitude $z_1 = 30$ km, ou seja, um pouco acima das nuvens, e a uma altitude $z_2 = 60$ km, ou seja, um pouco acima da estratosfera?

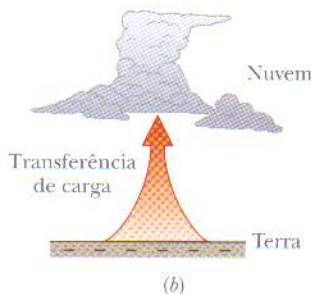
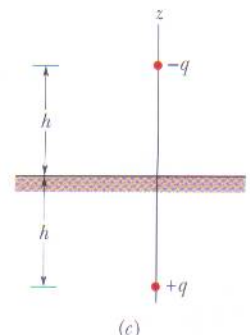



FIG. 22-9 (*a*) Fotografia de um *sprite*. (*Cortesia da NASA*.) (*b*) Relâmpago no qual uma grande quantidade de cargas negativas é transferida da Terra para a base de uma nuvem. (*c*) O sistema nuvem-Terra modelado como um dipolo elétrico vertical.

IDÉIA-CHAVE O valor aproximado do módulo E do campo elétrico de um dipolo é dado pela Eq. 22-8.

Cálculos: Temos

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q(2h)}{z^3},$$

onde $2h$ é a distância entre as cargas $-q$ e $+q$ na Fig. 22-9*c*. O campo elétrico a uma altitude $z_1 = 30$ km é dado por

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(200\ \text{C})(2)(6{,}0\times10^3\ \text{m})}{(30\times10^3\ \text{m})^3}$$

$$= 1{,}6\times10^3\ \text{N/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A uma altitude $z_2 = 60$ km, temos:

$$E = 2{,}0\times10^2\ \text{N/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como vamos ver na Seção 22-8, quando o módulo de um campo elétrico excede um certo valor crítico E_c o campo pode arrancar elétrons de átomos (ionizar átomos), e os elétrons arrancados podem se chocar com outros átomos, fazendo com que emitam luz. O valor de E_c depende da densidade do ar na região em que existe o campo elétrico; quanto menor a densidade, menor o valor de E_c. A 60 km de altitude a densidade do ar é tão baixa que $E = 2{,}0\times10^2$ N/C $> E_c$ e, portanto, os átomos do ar emitem luz. É esta luz que forma os *sprites*. Mais abaixo, a 30 km de altitude, a densidade do ar é muito mais alta, $E = 1{,}6\times10^3$ N/C $< E_c$, e os átomos do ar não emitem luz. Assim, os *sprites* são vistos muito acima das nuvens de tempestade.

TABELA 22-2

Algumas Medidas de Carga Elétrica

Nome	Símbolo	Unidade do SI
Carga	q	C
Densidade linear de cargas	λ	C/m
Densidade superficial de cargas	σ	C/m^2
Densidade volumétrica de cargas	ρ	C/m^3

22-6 | Campo Elétrico Produzido por uma Linha de Cargas

Até o momento consideramos apenas o campo elétrico produzido por uma ou, no máximo, algumas cargas pontuais. Vamos agora discutir o caso de distribuições de cargas que envolvem um grande número de cargas muito próximas (bilhões, talvez) distribuídas ao longo de uma linha, superfície ou volume. Distribuições de cargas desse tipo podem ser consideradas **contínuas**, e calculamos o campo elétrico produzido pelas cargas usando os métodos do cálculo em vez de somar, um a um, os campos produzidos pelas cargas pontuais. Nesta seção vamos discutir o campo elétrico produzido por uma linha de cargas; na próxima seção vamos estudar o campo produzido por uma superfície. O caso de uma esfera uniformemente carregada será discutido no próximo capítulo.

Quando lidamos com distribuições contínuas de cargas é conveniente expressar a carga de um objeto em termos de uma *densidade de cargas*, em vez da carga total. No caso de uma linha de cargas por exemplo, usamos a *densidade linear de cargas* (ou carga por unidade de comprimento) λ, cuja unidade no SI é o coulomb por metro. A Tabela 22-2 mostra outras densidades de cargas que também são usadas.

A Fig. 22-10 mostra um anel delgado de raio R com uma densidade linear de cargas positivas λ. Vamos supor que o anel é feito de plástico ou outro material não-condutor, de modo que as cargas permanecem imóveis. Qual é o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P, sobre o eixo central, a uma distância z do plano do anel?

Para encontrar a resposta não podemos aplicar a Eq. 22-3, que é usada para calcular o campo elétrico produzido por uma carga pontual, já que o anel, obviamente, não é uma carga pontual. Entretanto, podemos mentalmente dividir o anel em elementos de carga tão pequenos que se comportem como cargas pontuais e aplicar a Eq. 22-3 a cada um desses elementos. Em seguida, podemos somar os campos elétricos produzidos no ponto P por esses elementos; o campo produzido pelo anel no ponto P é a soma vetorial desses campos.

FIG. 22-10 Um anel de cargas positivas distribuídas uniformemente. Um elemento de carga tem um comprimento ds (grandemente exagerado na figura). Este elemento cria um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P. A componente de $d\vec{E}$ paralela ao eixo central do anel é $dE\cos\theta$.

Seja ds o comprimento de um dos elementos de carga do anel. Como λ é a carga por unidade de comprimento, a carga do elemento é dada por

$$dq = \lambda\, ds. \qquad (22\text{-}10)$$

Este elemento de carga produz um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P, que está a uma distância r do elemento. Tratando o elemento como uma carga pontual e usando a Eq. 22-10, podemos escrever o módulo de $d\vec{E}$ *na* forma

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}. \qquad (22\text{-}11)$$

De acordo com a Fig. 22-10, a Eq. 22-11 pode ser expressa na forma

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{(z^2 + R^2)}. \tag{22-12}$$

Como se pode ver na Fig. 22-10, $d\vec{E}$ faz um ângulo θ com o eixo central (que foi tomado como sendo o eixo z) e possui uma componente perpendicular e uma componente paralela a esse eixo.

Cada elemento de carga do anel produz um campo elementar $d\vec{E}$ no ponto P, cujo módulo é dado pela Eq. 22-12. As componentes dos campos $d\vec{E}$ paralelas ao eixo central são todas iguais; as componentes perpendiculares têm o mesmo módulo, mas orientações diferentes. Na verdade, para cada componente perpendicular com uma dada orientação existe outra componente com a orientação oposta. Isso significa que a soma das componentes perpendiculares é nula; assim, as componentes perpendiculares se cancelam e não precisam ser consideradas. Restam as componentes paralelas; como todas têm o mesmo sentido, o campo elétrico no ponto P é a soma dessas componentes.

O módulo da componente paralela de $d\vec{E}$ que aparece na Fig. 22-10 é $dE \cos\theta$. De acordo com a figura, temos também

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \tag{22-13}$$

Multiplicando a Eq. 22-12 pela Eq. 22-13, obtemos:

$$dE \cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}\, ds. \tag{22-14}$$

Para somar a componentes paralelas $dE \cos\theta$ produzidas por todos os elementos basta integrar a Eq. 22-14 ao longo da circunferência do anel, de $s = 0$ a $s = 2\pi R$. Como a única grandeza da Eq. 22-14 que varia durante a integração é s, as outras grandezas podem ser colocadas do lado de fora do sinal de integral. A integração nos dá

$$E = \int dE \cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds$$

$$= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{22-15}$$

Como λ é a carga por unidade de comprimento do anel, o termo $\lambda(2\pi R)$ da Eq. 22-15 é igual a q, a carga total do anel. Assim, a Eq. 22-15 pode ser escrita na forma

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{(anel carregado).} \tag{22-16}$$

Se a carga do anel for negativa, em vez de positiva, o módulo do campo no ponto P será o mesmo mas o sentido do campo será na direção do anel, e não para longe do anel.

Vamos agora verificar que forma assume a Eq. 22-16 no caso de um ponto sobre o eixo central tão distante da origem que $z \gg R$. Nesse caso, a expressão $z^2 + R^2$ da Eq. 22-16 pode ser aproximada por z^2, e a Eq. 22-16 se torna

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2} \quad \text{(anel carregado a grandes distâncias).} \tag{22-17}$$

Este é um resultado razoável, já que, visto de uma distância muito grande, o anel "parece" uma carga pontual. Substituindo z por r na Eq. 22-17 obtemos a Eq. 22-3, que fornece o módulo do campo elétrico produzido por uma carga pontual.

Vamos agora verificar o que a Eq. 22-16 nos diz a respeito do campo elétrico no centro do anel, ou seja, no ponto $z = 0$. Nesse ponto, de acordo com a Eq. 22-16, $E = 0$. Este resultado é razoável porque, no caso de uma carga de prova colocada no

centro do anel, a força eletrostática exercida pelo anel sobre a carga é nula: a força exercida por um elemento qualquer do anel é cancelada pela força exercida pelo elemento diametralmente oposto. De acordo com a Eq. 22-1, se a força eletrostática no centro do anel é nula, o campo elétrico também é nulo.

Exemplo 22-3 Aumente sua capacidade

A Fig. 22-11*a* mostra uma barra de plástico com uma carga $-Q$ uniformemente distribuída. A barra tem a forma de um arco de circunferência de 120° de extensão e raio r. Os eixos de coordenadas são escolhidos de tal forma que o eixo de simetria da barra é o eixo x e a origem P está no centro de curvatura do arco. Em termos de Q e r, qual é o campo elétrico $\vec{E}$ produzido pela barra no ponto P?

IDÉIA-CHAVE Como a barra possui uma distribuição contínua de cargas, devemos obter uma expressão para o campo elétrico produzido por um elemento de carga e integrar essa expressão ao longo da barra.

Um elemento: Considere um elemento de arco de comprimento ds fazendo um ângulo θ com o eixo x (Fig. 22-11*b*). Chamando de λ a densidade linear de cargas da barra, a carga do elemento de arco é dada por

$$dq = \lambda\, ds. \tag{22-18}$$

Campo do elemento: O elemento de carga produz um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P, que está uma distância r do elemento. Tratando o elemento como uma carga pontual, podemos usar a Eq. 22-3 para expressar o módulo de $d\vec{E}$ na forma

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}. \tag{22-19}$$

Como a carga q é negativa, $d\vec{E}$ aponta na direção de ds.

Parceiro simétrico: Ao elemento ds corresponde um elemento simétrico (imagem especular) ds', na metade inferior da barra. O campo elétrico $d\vec{E}'$ produzido por ds' no ponto P tem o mesmo módulo que $d\vec{E}$, mas aponta na direção de ds', como mostra a Fig. 22-11*b*. Quando determinamos as componentes x e y dos campos elétricos $d\vec{E}$ e $d\vec{E}'$ (Fig. 22-11*b*) vemos que as componentes y se cancelam (porque têm o mesmo módulo e sentidos opostos). Vemos também que as componentes x têm o mesmo módulo e o mesmo sentido.

Soma: Assim, para determinar o campo elétrico produzido pela barra precisamos somar (por integração, no caso) apenas as componentes x dos campos elétricos produzidos pelos elementos de carga da barra. De acordo com a Fig. 22-11*b* e a Eq. 22-19, a componente dE_x do campo produzido pelo elemento ds é dada por

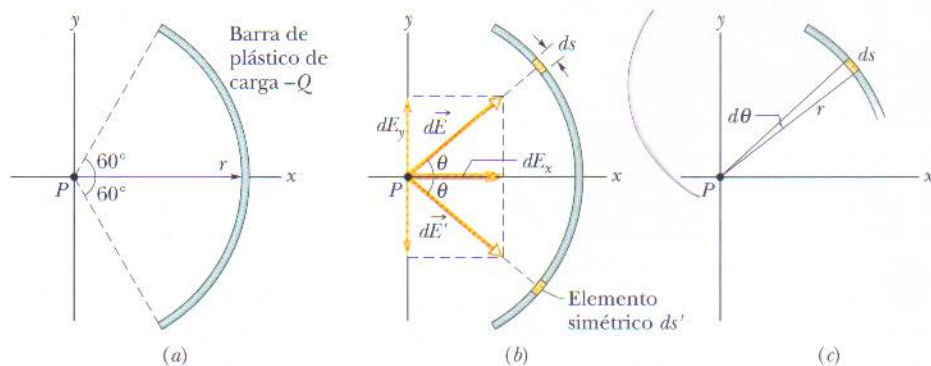
$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, ds. \tag{22-20}$$

A Eq. 22-20 tem duas variáveis, θ e s. Antes de realizar a integração precisamos eliminar uma dessas variáveis. Para isso, usamos a relação

$$ds = r\, d\theta,$$

onde $d\theta$ é o ângulo, com vértice em P, que subtende um arco de comprimento ds (Fig. 22-11*c*). Depois de executar essa substituição podemos integrar a Eq. 22-20 de $\theta = -60°$ a $\theta = 60°$. O resultado é o módulo do campo elétrico produzido pela barra no ponto P:

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int_{-60°}^{60°}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, r\, d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-60°}^{60°}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-60°}^{60°} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\operatorname{sen} 60° - \operatorname{sen}(-60°)] \\ &= \frac{1{,}73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}. \end{aligned} \tag{22-21}$$

FIG. 22-11 (*a*) Uma barra de plástico de carga $-Q$ tem a forma de um arco de circunferência de raio r e ângulo central 120°; o ponto P é o centro de curvatura da barra. (*b*) Um elemento de carga na parte superior da barra, de comprimento ds e coordenada angular θ, cria um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P. Um elemento ds', simétrico a ds em relação ao eixo x, cria um campo $d\vec{E}'$ no ponto P com o mesmo módulo. (*c*) O ângulo $d\theta$ subtende um arco de comprimento ds.

(Se tivéssemos invertido os limites de integração obteríamos o mesmo resultado, mas com sinal negativo. Como a integração fornece apenas o módulo de $\vec{E}$, teríamos ignorado o sinal negativo.)

Densidade de cargas: Para determinar o valor de λ observamos que a barra subtende um ângulo de 120°, o que corresponde a um terço de circunferência. O comprimento da barra é, portanto, $2\pi r/3$ e a densidade linear de cargas é

$$\lambda = \frac{\text{carga}}{\text{comprimento}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0{,}477Q}{r}.$$

Substituindo este valor na Eq. 22-21 e simplificando, obtemos

$$E = \frac{(1{,}73)(0{,}477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{0{,}83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad \text{(Resposta)}$$

O campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P aponta para a barra e é paralelo ao eixo de simetria da distribuição de cargas. Em termos dos vetores unitários, o campo $\vec{E}$ pode ser escrito na forma

$$\vec{E} = \frac{0{,}83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\text{i}}.$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Como Lidar com Linhas de Cargas* Vamos apresentar um método geral para calcular o campo elétrico $\vec{E}$ produzido em um ponto P por uma linha, retilínea ou circular, com uma distribuição uniforme de cargas. O método consiste em escolher um elemento de carga dq, calcular o campo $d\vec{E}$ produzido por esse elemento e integrar $d\vec{E}$ para toda a linha.

1.° passo. Se a linha de cargas for circular, tome o comprimento do elemento de carga como sendo ds, o comprimento de um arco elementar. Se a linha for retilínea, suponha que coincide com o eixo x e tome o comprimento do elemento de carga como sendo dx. Assinale o elemento em um esboço da linha de cargas.

2.° passo. Relacione a carga dq do elemento ao comprimento do elemento usando a equação $dq = \lambda\, ds$ (se a linha for circular) ou a equação $dq = \lambda\, dx$ (se a linha for retilínea). Considere dq e λ positivos, mesmo que a carga seja negativa. (O sinal da carga será levado em consideração no próximo passo.)

3.° passo. Determine o campo $d\vec{E}$ produzido no ponto P pela carga dq usando a Eq. 22-3, substituindo q nessa equação por $\lambda\, ds$ ou $\lambda\, dx$. Se a carga da linha for positiva, desenhe o vetor $d\vec{E}$ com a origem no ponto P e apontando para longe de dq; se for negativa, desenhe o vetor com a origem no ponto P e apontando na direção de dq.

4.° passo. Preste atenção na simetria do problema. Se P está sobre um eixo de simetria da distribuição de cargas, determine as componentes do campo $d\vec{E}$ produzido no ponto P pela carga dq nas direções paralela e perpendicular ao eixo de simetria. Em seguida, considere um segundo elemento de carga dq' que esteja situado simetricamente em relação a dq. Determine o campo $d\vec{E}'$ produzido pelo elemento de carga dq' e suas componentes. Uma das componentes do campo produzido por dq é uma *componente subtrativa*; essa componente é cancelada por uma componente produzida por dq', e não precisa ser considerada. A outra componente produzida por dq é uma *componente aditiva*; ela se soma a uma componente produzida por dq'. Some (por integração) as componentes aditivas de todos os elementos de carga.

5.° passo. Seguem-se quatro tipos gerais de distribuição uniforme de cargas, com sugestões para simplificar a integral do 4.° passo.

Anel, com o ponto P no eixo (central) de simetria, como na Fig. 22-10. Na expressão de dE, substitua r^2 por $z^2 + R^2$, como na Eq. 22-12. Expresse a componente aditiva de $d\vec{E}$ em termos de θ. Isso introduz um fator $\cos\theta$, mas θ é o mesmo para todos os elementos e, portanto, não constitui uma variável. Substitua $\cos\theta$ por seu valor, como na Eq. 22-13, e integre em relação a s ao longo da circunferência do anel.

Arco de circunferência, com o ponto P no centro de curvatura, como na Fig. 22-11. Expresse a componente aditiva de $d\vec{E}$ em termos de θ. Isso introduz um fator $\operatorname{sen}\theta$ ou $\cos\theta$. Reduza as variáveis s e θ a uma única variável, θ, substituindo ds por $r\,d\theta$. Integre em relação a θ, como no Exemplo 22-3, de uma das extremidades do arco até a extremidade oposta.

Segmento de reta, com o ponto P sobre um prolongamento da linha de cargas, como na Fig. 22-12a. Na expressão de dE, substitua r por x. Integre em relação a x de uma das extremidades do segmento de reta até a extremidade oposta.

Segmento de reta, com o ponto P a uma distância perpendicular y da linha de cargas, como na Fig. 22-12b. Na expressão de dE, substitua r por uma função de x e y. Se o ponto P está sobre a mediatriz da linha de cargas, determine uma expressão para a componente aditiva de $d\vec{E}$. Isso introduz um fator $\operatorname{sen}\theta$ ou $\cos\theta$. Reduza as variáveis x e θ a uma

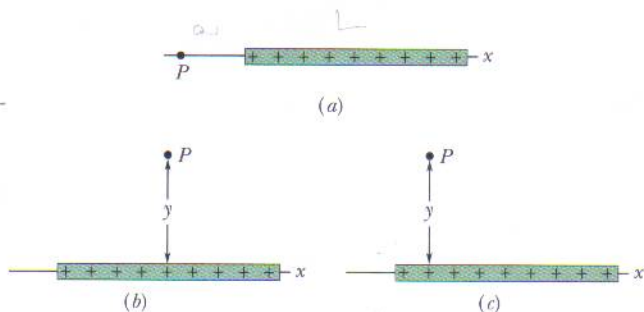
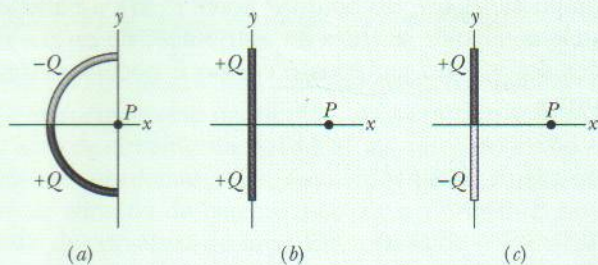



FIG. 22-12 (a) O ponto P está sobre um prolongamento da linha de cargas. (b) O ponto P está sobre a mediatriz da linha de cargas, a uma distância perpendicular y da linha de cargas. (c) O ponto P não está sobre um eixo de simetria.

TESTE 2 A figura mostra três barras não-condutoras, uma circular e duas retilíneas. Todas possuem uma carga de módulo Q na metade superior e outra carga de módulo Q na metade inferior. Para cada barra, qual é a orientação do campo elétrico total no ponto P?

única variável, x, substituindo a função trigonométrica por uma expressão (sua definição) envolvendo x e y. Integre em relação a x de uma das extremidades do segmento de reta até a extremidade oposta. Se P não está sobre um eixo de simetria, como na Fig. 22-12c, escreva uma integral para somar as componentes de dE_x e integre em relação a x para obter E_x. Escreva também uma integral para somar as componentes de dE_y e integre em relação a x para obter E_y. Use as componentes E_x e E_y da forma usual para determinar o módulo E e a orientação de $\vec{E}$.

6.° passo. Uma ordem dos limites de integração leva a um resultado positivo; a ordem inversa leva ao mesmo resultado, mas com sinal negativo. Ignore o sinal negativo. Se o resultado for pedido em termos da carga total Q da distribuição, substitua λ por Q/L, onde L é o comprimento da distribuição. No caso de um anel, L é a circunferência do anel.

22-7 | Campo Elétrico Produzido por um Disco Carregado

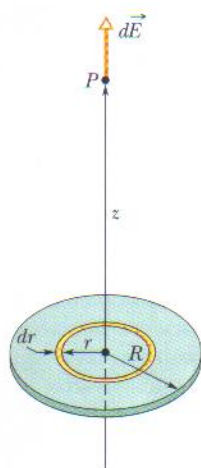



FIG. 22-13 Um disco de raio R com uma distribuição uniforme de cargas positivas. O anel mostrado na figura tem raio r, largura radial dr e cria um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P, situado sobre o eixo central do disco.

A Fig. 22-13 mostra um disco circular de plástico, de raio R, com uma distribuição uniforme de cargas positivas σ na superfície superior (veja a Tabela 22-2). Qual é o campo elétrico no ponto P, situado no eixo central a uma distância z do disco?

A idéia é dividir o disco em anéis concêntricos elementares e calcular o campo elétrico no ponto P somando (ou seja, integrando) as contribuições de todos os anéis. A Fig. 22-13 mostra um anel elementar de raio r e largura radial dr. Como σ é a carga por unidade de área, a carga do anel é dada por

$$dq = \sigma\, dA = \sigma(2\pi r\, dr), \tag{22-22}$$

onde dA é a área do anel elementar.

O problema do campo elétrico produzido por um anel de cargas já foi resolvido. Substituindo na Eq. 22-16 q por dq da Eq. 22-22 e R por r, obtemos uma expressão para o campo elétrico dE produzido no ponto P pelo anel elementar de cargas:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}},$$

que pode ser escrito na forma

$$dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\,\frac{2r\, dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{22-23}$$

Podemos agora calcular E integrando a Eq. 22-23 para toda a superfície do disco, ou seja, integrando em relação à variável r de $r = 0$ a $r = R$. Observe que z permanece constante durante o processo. Temos:

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2}(2r)\, dr. \tag{22-24}$$

Para resolver esta integral, basta colocá-la na forma $\int X^m\, dX$ fazendo $X = (z^2 + r^2)$, $m = -3/2$ e $dX = (2r)\, dr$. Usando a relação

$$\int X^m\, dX = \frac{X^{m+1}}{m+1},$$

a Eq. 22-24 se torna

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R. \tag{22-25}$$

Tomando os limites da Eq. 22-25 e reagrupando os termos, obtemos:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad \text{(disco carregado)} \qquad (22\text{-}26)$$

como o módulo do campo elétrico produzido por um disco circular carregado em pontos sobre o eixo central. (Ao executar a integração, supusemos que $z \geq 0$.)

Fazendo $R \to \infty$ e mantendo z finito, o segundo termo do fator entre parênteses da Eq. 22-26 tende a zero e a equação se reduz a

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(placa infinita).} \qquad (22\text{-}27)$$

que é o campo elétrico produzido por uma distribuição uniforme de cargas na superfície de uma placa de dimensões infinitas feita de um material não-condutor, como o plástico. As linhas de campo elétrico para essa situação aparecem na Fig. 22-3.

Podemos também obter a Eq. 22-27 fazendo $z \to 0$ na Eq. 22-26 e mantendo R finito. Isso mostra que para pontos muito próximos do disco, o campo elétrico produzido pelo disco é igual ao que seria produzido por um disco de raio infinito.

22-8 | Uma Carga Pontual em um Campo Elétrico

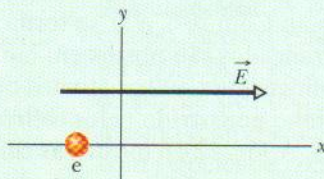
Nas últimas quatro seções trabalhamos na primeira de nossas duas tarefas: dada uma distribuição de cargas, determinar o campo elétrico produzido nas vizinhanças. Vamos agora começar a segunda tarefa: determinar o que acontece com uma partícula carregada quando está na presença de um campo elétrico produzido por outras cargas estacionárias ou que estejam se movendo lentamente.

O que acontece é que a partícula é submetida a uma força eletrostática dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}, \qquad (22\text{-}28)$$

onde q é a carga da partícula (incluindo o sinal) e $\vec{E}$ é o campo elétrico produzido pelas outras cargas na posição da partícula. (O campo *não inclui* o campo produzido pela própria partícula; para distinguir os dois campos, o campo que age sobre a partícula na Eq. 22-28 é muitas vezes chamado de *campo externo*. Uma partícula ou objeto carregado não é afetado por seu próprio campo elétrico.) De acordo com a Eq. 22-28,

> A força eletrostática $\vec{F}$ que age sobre uma partícula carregada submetida a um campo elétrico $\vec{E}$ tem o mesmo sentido que $\vec{E}$ se a carga q da partícula for positiva e o sentido oposto se a carga q for negativa.

TESTE 3 (a) Qual é, na figura, a orientação da força eletrostática que age sobre o elétron na presença do campo elétrico indicado? (b) Em que direção o elétron é acelerado se estava se movendo paralelamente ao eixo y antes de ser aplicado o ao campo externo? (c) Se o elétron estava se movendo para a direita antes de ser aplicado o campo externo, sua velocidade aumenta, diminui ou permanece constante quando o campo é aplicado?

Medindo a Carga Elementar

A Eq. 22-28 desempenhou um papel importante na medição da carga elementar e, realizada pelo físico americano Robert A. Millikan em 1910-1913. A Fig. 22-14 é uma

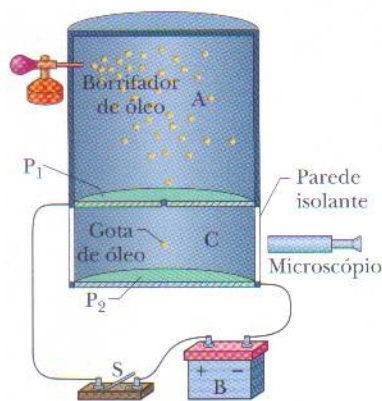



FIG. 22-14 Representação esquemática do equipamento usado por Millikan para medir a carga elementar *e*. Quando uma gota de óleo eletricamente carregada penetra na câmara C através de um orifício na placa P_1 seu movimento pode ser controlado fechando e abrindo uma chave S, assim criando e eliminando um campo elétrico na câmara C. O microscópio foi usado para observar a gota e medir sua velocidade.

representação esquemática do equipamento usado por Millikan. Quando gotículas de óleo são borrifadas na câmara A algumas adquirem uma carga elétrica, positiva ou negativa. Considere uma gota que atravessa um pequeno orifício na placa P_1 e penetra na câmara C. Suponha que a gota possui uma carga negativa q.

Enquanto a chave S da Fig. 22-14 está aberta, como na figura, a bateria B não tem nenhuma influência sobre a câmara C e a gota cai por efeito da gravidade. Quando a chave é fechada (ou seja, quando o terminal positivo da bateria é ligado à placa C), a bateria faz com que uma carga positiva se acumule na placa condutora P_1 e uma carga negativa se acumule na placa condutora P_2. As placas criam um campo elétrico $\vec{E}$ na câmara C dirigido verticalmente para baixo. De acordo com a Eq. 22-28, este campo exerce uma força eletrostática sobre qualquer gota carregada que penetre na câmara C, afetando seu movimento. Em particular, nossa gota negativamente carregada tende a se mover para cima.

Observando o movimento das gotas de óleo com a chave aberta e com a chave fechada e usando a diferença para calcular o valor da carga q de cada gota, Millikan descobriu que os valores de q eram sempre dados por

$$q = ne, \qquad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{22-29}$$

onde e é a constante que mais tarde foi chamada de *carga elementar* e tem o valor de $1{,}60 \times 10^{-19}$ C. O experimento de Millikan constitui uma prova convincente de que a carga elétrica é quantizada; o cientista recebeu o prêmio Nobel de física de 1923 em parte por esse trabalho. Atualmente são usados outros métodos para medir a carga elementar, mais precisos que o utilizado nos experimentos pioneiros de Millikan.

Impressoras Jato de Tinta

A necessidade de impressoras mais rápidas e de alta resolução levou os fabricantes a procurar alternativas para a impressão por impacto usada nas antigas máquinas de escrever. Uma das soluções encontradas foi o emprego de campos elétricos para controlar o movimento de pequenas gotas de tinta. Alguns modelos de impressoras jato de tinta utilizam esse sistema.

A Fig. 22-15 mostra uma gota de tinta negativamente carregada que se move entre duas placas defletoras usadas para criar um campo elétrico uniforme, dirigido para baixo. De acordo com a Eq. 22-28, a gota é desviada para cima e atinge o papel em uma posição que depende do módulo de $\vec{E}$ e da carga q da gota.

Na prática, o valor de E é mantido constante e a posição da gota é determinada pela carga q fornecida à gota por uma unidade de carregamento pela qual a gota passa antes de entrar no sistema de deflexão. A unidade de carregamento, por sua vez, é controlada por sinais eletrônicos que definem o texto ou desenho a ser impresso.

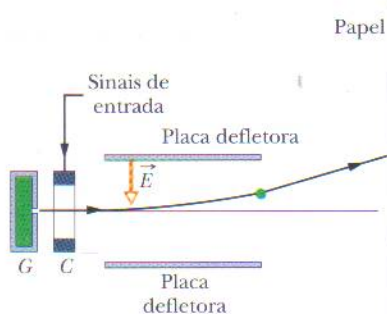



FIG. 22-15 Representação esquemática de um tipo de impressora jato de tinta. Gotas de tinta são produzidas no gerador G e recebem uma carga na unidade de carregamento C. Um sinal elétrico proveniente de um computador controla a carga fornecida a cada gota e, portanto, o efeito de um campo constante $\vec{E}$ sobre a gota e a posição em que a gota atinge o papel. Cerca de 100 gotas são necessárias para formar uma letra.

Ruptura Dielétrica e Centelhamento

Quando o módulo do campo elétrico no ar excede um certo valor crítico E_c, o ar sofre uma *ruptura dielétrica*, processo no qual o campo arranca elétrons de átomos do ar. Com isso, o ar se torna um condutor de corrente elétrica, já que os elétrons arrancados são postos em movimento pelo campo. Ao se moverem, esses elétrons colidem com outros átomos do ar, fazendo com que emitam luz. Podemos ver o caminho percorrido pelos elétrons graças à luz emitida, que recebe o nome de centelha. A Fig. 22-16 mostra as centelhas que aparecem na extremidade de condutores metálicos quando os campos elétricos produzidos pelos fios provocam a ruptura dielétrica do ar.

Polinização e Eletrostática

A capacidade de uma abelha de transportar pólen de uma flor para outra depende de dois fatores: (1) as abelhas adquirem uma carga elétrica durante o vôo; (2) a an-

tera de uma flor (Fig. 22-17*a*) está isolada eletricamente da terra, mas o estigma está ligado eletricamente à terra. Quando uma abelha passa nas proximidades de uma antera o campo elétrico produzido pela carga da abelha induz uma carga em um grão de pólen eletricamente neutro, fazendo com o que o lado mais próximo da abelha fique ligeiramente mais negativo que o lado mais afastado (Fig. 22-17*b*). As cargas dos dois lados são iguais, mas as distâncias até a abelha são diferentes e a força de atração sobre o lado mais próximo é ligeiramente maior que a força de repulsão sobre o lado mais afastado. Em conseqüência, o grão de pólen é atraído para a abelha e fica preso nos pêlos do inseto enquanto este voa para a flor seguinte.

Quando a abelha se aproxima de um estigma de outra flor a carga da abelha e a carga induzida no grão atraem alguns elétrons de condução até a ponta do estigma (Fig. 22-17*c*), porque o estigma está ligado eletricamente à terra. Esses elétrons atraem as cargas de sinal oposto existentes no lado mais próximo do grão e repelem as cargas de mesmo sinal existentes no outro lado. Essa força muitas vezes é suficiente para fazer o grão de pólen saltar para o estigma, iniciando o processo de fecundação da planta. Hoje em dia os engenheiros agrícolas imitam esse processo borrifando as plantas com grãos de pólen eletricamente carregados, para que os grãos se concentrem preferencialmente nos estigmas.

FIG. 22-16 Centelhas aparecem na extremidade de condutores metálicos quando os campos elétricos produzidos pelos fios provocam a ruptura dielétrica do ar. *(Adam Hart-Davis/Photo Researchers)*

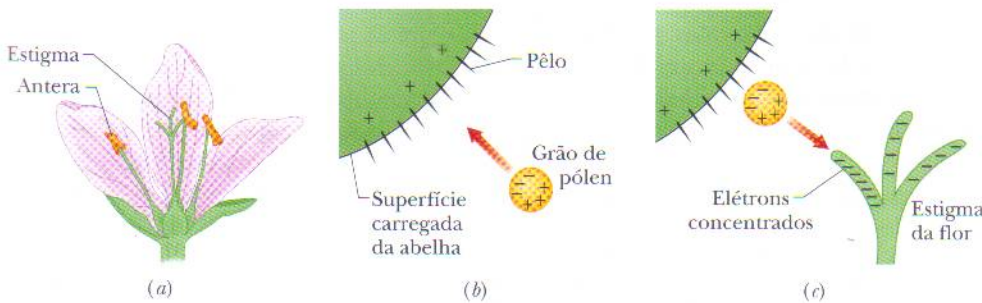



FIG. 22-17 (*a*) A antera e o estigma de uma flor. (*b*) Uma abelha induz uma carga elétrica em um grão de pólen. (*c*) Elétrons se acumulam na ponta do estigma, atraindo o grão de pólen.

Exemplo 22-4

A Fig. 22-18 mostra as placas defletoras de uma impressora a jato de tinta, com eixos de coordenadas superpostos. Uma gota de tinta com uma massa m de $1{,}3 \times 10^{-10}$ kg e uma carga negativa de valor absoluto $Q = 1{,}5 \times 10^{-13}$ C penetra na região entre as placas, movendo-se inicialmente na direção do eixo x com uma velocidade $v_x = 18$ m/s. O comprimento L de cada placa é 1,6 cm. As placas estão carregadas e, portanto, produzem um campo elétrico em todos os pontos da região entre elas. Suponha que este campo $\vec{E}$ esteja dirigido verticalmente para baixo, seja uniforme e tenha um módulo de $1{,}4 \times 10^6$ N/C. Qual é a deflexão vertical da gota ao deixar a região entre as placas? (A força gravitacional é pequena em comparação com a força eletrostática, e pode ser desprezada.)

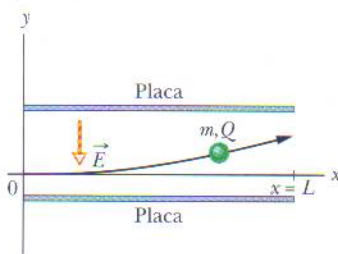



FIG. 22-18 Uma gota de tinta de massa m e carga Q é desviada pelo campo elétrico de uma impressora jato de tinta.

IDÉIA-CHAVE A gota está negativamente carregada e o campo elétrico está dirigido *para baixo*. De acordo com a Eq. 22-28, a gota é submetida a uma força eletrostática constante de módulo QE, dirigida *para cima*. Assim, ao mesmo tempo em que se desloca paralelamente ao eixo x com velocidade constante v_x, a gota é acelerada para cima com uma aceleração constante a_y.

Cálculos: Aplicando a segunda lei de Newton ($F = ma$) às componentes y da força e da aceleração, temos:

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}. \qquad (22\text{-}30)$$

Seja t o tempo necessário para que a gota passe pela região entre as placas. Durante esse intervalo os deslocamentos vertical e horizontal da gota são

$$y = \tfrac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{e} \quad L = v_x t, \tag{22-31}$$

respectivamente. Eliminando t nas duas equações e substituindo a_y por seu valor, dado pela Eq. (22-30), temos:

$$y = \frac{QEL^2}{2mv_x^2} = \frac{(1{,}5\times10^{-13}\text{ C})(1{,}4\times10^6\text{ N/C})(1{,}6\times10^{-2}\text{ m})^2}{(2)(1{,}3\times10^{-10}\text{ kg})(18\text{ m/s})^2}$$
$$= 6{,}4\times10^{-4}\text{ m}$$
$$= 0{,}64\text{ mm.} \quad \text{(Resposta)}$$

22-9 | Um Dipolo em um Campo Elétrico

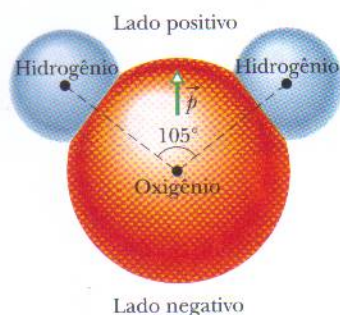



FIG. 22-19 Uma molécula de H_2O, mostrando os três núcleos (representados por pontos) e as regiões ocupadas pelos elétrons. O momento dipolar elétrico $\vec{p}$ aponta do lado do oxigênio (negativo) para o lado do hidrogênio (positivo) da molécula.

Definimos o momento dipolar elétrico $\vec{p}$ de um dipolo elétrico como um vetor que aponta da carga negativa para a carga positiva do dipolo. Como vamos ver, o comportamento de um dipolo na presença de um campo elétrico externo $\vec{E}$ pode ser totalmente descrito em termos dos vetores $\vec{E}$ e $\vec{p}$, sem necessidade de levar em conta a estrutura detalhada do dipolo.

Uma molécula de água (H_2O) se comporta como um dipolo elétrico; a Fig. 22-19 mostra a razão. Na figura, os pontos representam o núcleo de oxigênio (com oito prótons) e os dois núcleos de hidrogênio (com um próton cada um). As áreas sombreadas representam as regiões em que os elétrons da molécula podem ser encontrados.

Na molécula de água os dois átomos de hidrogênio e o átomo de oxigênio não estão alinhados, mas formam um ângulo de aproximadamente 105°, como mostra a Fig. 22-19. Em conseqüência, a molécula possui um "lado do oxigênio" e um "lado do hidrogênio". Além disso, os 10 elétrons da molécula tendem a permanecer mais tempo nas proximidades do núcleo de oxigênio que nas proximidades dos núcleos de hidrogênio. Isso torna o lado do oxigênio ligeiramente mais negativo que o lado do hidrogênio e dá origem a um momento dipolar elétrico $\vec{p}$ alinhado com o eixo de simetria da molécula, como mostra a figura. Quando a molécula de água é submetida a um campo elétrico externo ela se comporta como o dipolo elétrico mais abstrato da Fig. 22-8.

FIG. 22-20 (*a*) Um dipolo elétrico na presença de um campo elétrico externo uniforme $\vec{E}$. Dois centros de cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos estão separados por uma distância d. A reta que liga as cargas representa o fato de que a distância entre elas se mantém constante. (*b*) O campo $\vec{E}$ aplica um torque $\vec{\tau}$ ao dipolo. A direção de $\vec{\tau}$ é para dentro do papel, o que está representado na figura pelo símbolo ⊗.

Para investigar esse comportamento, considere este dipolo abstrato na presença de um campo elétrico externo uniforme $\vec{E}$, como na Fig. 22-20*a*. Vamos supor que o dipolo é uma estrutura rígida formada por duas cargas de sinais opostos, de valor absoluto q, separadas por uma distância d. O momento dipolar $\vec{p}$ faz um ângulo θ com o campo $\vec{E}$.

As duas extremidades do dipolo estão sujeitas a forças eletrostáticas. Como o campo elétrico é uniforme, essas forças têm sentidos opostos (como mostra a Fig. 22-20*a*) e o mesmo módulo $F = qE$. Assim, *como o campo é uniforme*, a força total a que está submetido o dipolo é nula e o centro da massa do dipolo não se move. Entretanto, as forças que agem sobre as extremidades do dipolo produzem um torque $\vec{\tau}$ em relação ao centro de massa. O centro de massa está sobre a reta que liga as cargas, a uma certa distância x de uma das cargas e, portanto, a uma distância $d - x$ da outra. De acordo com a Eq. 10-39 ($\tau = rF \operatorname{sen} \phi$), podemos escrever o módulo do torque total $\vec{\tau}$ como

$$\tau = Fx \operatorname{sen} \theta + F(d - x) \operatorname{sen} \theta = Fd \operatorname{sen} \theta. \tag{22-32}$$

Podemos também escrever o módulo de $\vec{\tau}$ em termos dos módulos do campo elétrico E e do momento dipolar $p = qd$. Para isso, substituímos F por qE e d por p/q na Eq. 22-32, o que nos dá

$$\tau = pE \operatorname{sen} \theta. \tag{22-33}$$

Podemos generalizar esta equação para a forma vetorial e escrever

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{(torque de um dipolo).} \tag{22-34}$$

Os vetores $\vec{p}$ e $\vec{E}$ estão representados na Fig. 22-20*b*. O torque aplicado ao dipolo tende a fazer girar o vetor $\vec{p}$ (e, portanto, o dipolo) na direção do campo $\vec{E}$, dimi-

nuindo o valor de θ. Na situação mostrada na Fig. 22-20 essa rotação é no sentido horário. Como foi discutido no Capítulo 10, para indicar que um torque produz uma rotação no sentido horário acrescentamos um sinal negativo ao módulo do torque. Usando essa convenção, o torque da Fig. 22-20 é

$$\tau = -pE \operatorname{sen} \theta. \tag{22-35}$$

Energia Potencial de um Dipolo Elétrico

Uma energia potencial pode ser associada à orientação de um dipolo elétrico em relação a um campo elétrico. A energia potencial do dipolo é mínima quando o momento $\vec{p}$ está alinhado com o campo $\vec{E}$ (nesse caso, $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$). A energia potencial é maior para todas as outras orientações. Sob esse aspecto, o dipolo é como um pêndulo, para o qual a energia potencial é mínima em uma orientação específica, aquela em que o peso se encontra no ponto mais baixo da trajetória. Para fazer com que o dipolo ou o pêndulo assuma qualquer outra orientação é preciso usar algum agente externo.

Em qualquer problema que envolva energia potencial temos liberdade para definir a situação em que a energia potencial é nula, já que são apenas as diferenças de energia potencial que possuem realidade física. No caso da energia potencial de um dipolo na presença de um campo elétrico as equações se tornam mais simples quando definimos que a energia potencial é nula quando o ângulo θ da Fig. 22-20 é de 90°. Podemos calcular a energia potencial U do dipolo para qualquer outro valor de θ usando a Eq. 8-1 ($\Delta U = -W$) e calculando o trabalho W executado pelo campo sobre o dipolo quando este gira da posição de 90° para a posição θ. Usando a Eq. 10-53 ($W = \int \tau \, d\theta$) e a Eq. 22-35, é fácil mostrar que a energia potencial U para um ângulo θ qualquer é dada por

$$U = -W = -\int_{90°}^{\theta} \tau \, d\theta = \int_{90°}^{\theta} pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta. \tag{22-36}$$

Resolvendo essa integral, obtemos

$$U = -pE \cos \theta. \tag{22-37}$$

Podemos generalizar essa equação para a forma vetorial e escrever

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{(energia potencial de um dipolo).} \tag{22-38}$$

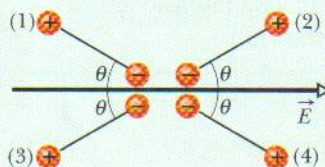
As Eqs. 22.37 e 22.38 mostram que a energia potencial do dipolo é mínima ($U = -pE$) para $\theta = 0$, situação em que $\vec{p}$ e $\vec{E}$ estão alinhados e apontam no mesmo sentido. A energia potencial é máxima ($U = pE$) para $\theta = 180°$, situação em que $\vec{p}$ e $\vec{E}$ estão alinhados e apontam em sentidos opostos.

Quando um dipolo gira de uma orientação inicial θ_i para outra orientação θ_f, o trabalho W realizado pelo campo elétrico sobre o dipolo é dado por

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i), \tag{22-39}$$

onde U_f e U_i podem ser calculadas usando a Eq. 22-38. Se a mudança de orientação é causada por um torque aplicado (normalmente considerado um agente externo), o trabalho W_a realizado pelo torque sobre o dipolo é o negativo do trabalho realizado pelo campo sobre o dipolo, ou seja,

$$W_a = -W = (U_f - U_i). \tag{22-40}$$

TESTE 4 A figura mostra quatro orientações de um dipolo elétrico em relação a um campo elétrico externo. Coloque as orientações na ordem (a) do módulo do torque a que está submetido o dipolo e (b) da energia potencial do dipolo, começando pelo maior valor.

Forno de Microondas

Todo alimento que contém água pode ser esquentado ou cozido em um forno de microondas, porque as moléculas de água são dipolos elétricos. Quando o forno é ligado uma fonte de microondas produz um campo elétrico alternado $\vec{E}$ no interior do forno e também no interior do alimento. De acordo com a Eq. 22-34, o campo elétrico $\vec{E}$ aplica um torque ao momento dipolar elétrico $\vec{p}$ que tende a alinhar $\vec{p}$ com $\vec{E}$. Como o campo $\vec{E}$ é alternado, as moléculas de água mudam constantemente de orientação, tentando alinhar-se com $\vec{E}$.

A energia do campo elétrico é transferida para a energia térmica da água (e, portanto, do alimento) nos locais em que três moléculas de água se uniram para formar um grupo. A agitação produzida pelo campo elétrico separa essas moléculas. Quando as moléculas tornam a se unir a energia da ligação é transferida para um movimento aleatório do grupo e, em seguida, para as moléculas vizinhas. Em pouco tempo a energia térmica da água é suficiente para cozinhar o alimento. Às vezes esse tipo de aquecimento é traiçoeiro. Se você esquenta uma rosquinha recheada com geléia, por exemplo, a geléia (que contém muita água) se aquece muito mais que a massa da rosquinha (que contém menos água). Embora a parte de fora da rosquinha esteja quase fria, a geléia pode estar suficientemente quente para queimar sua boca se você não tomar cuidado ao dar a primeira dentada. Se as moléculas de água não fossem dipolos elétricos não haveria fornos de microondas.

Exemplo 22-5

Uma molécula de água (H_2O) neutra no estado de vapor tem um momento dipolar elétrico cujo módulo é $6{,}2 \times 10^{-30}$ C · m.

(a) Qual é a distância entre os centros de cargas positivas e de cargas negativas da molécula?

IDÉIA-CHAVE O momento dipolar de uma molécula depende do valor absoluto q da carga positiva ou negativa da molécula e da distância d entre as cargas.

Cálculos: Como uma molécula neutra de água possui 10 elétrons e 10 prótons, o módulo do momento dipolar é dado por

$$p = qd = (10e)(d),$$

onde d é a distância que queremos determinar e e é a carga elementar. Assim, temos:

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6{,}2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m}}{(10)(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})}$$
$$= 3{,}9 \times 10^{-12}\ \text{m} = 3{,}9\ \text{pm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Essa distância é menor do que o raio do átomo de hidrogênio.

(b) Se a molécula é submetida um campo elétrico de $1{,}5 \times 10^4$ N/C, qual é o máximo torque que o campo elétrico pode exercer sobre ela? (Um campo com essa intensidade pode facilmente ser produzido em laboratório.)

IDÉIA-CHAVE O torque exercido por um campo elétrico sobre um dipolo é máximo quando o ângulo θ entre $\vec{p}$ e $\vec{E}$ é de 90°.

Cálculo: Fazendo $\theta = 90°$ na Eq. 22-33, obtemos

$$\tau = pE\,\text{sen}\,\theta$$
$$= (6{,}2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1{,}5 \times 10^4\ \text{N/C})(\text{sen}\ 90°)$$
$$= 9{,}3 \times 10^{-26}\ \text{N}\cdot\text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Que trabalho deve ser realizado por um *agente externo* para fazer a molécula girar de 180° na presença desse campo, partindo da posição em que a energia potencial é mínima, $\theta = 0°$?

IDÉIA-CHAVE O trabalho realizado por um agente externo (através de um torque aplicado à molécula) é igual à variação da energia potencial da molécula devida à mudança de orientação.

Cálculo: De acordo com a Eq. 22-40, temos:

$$W_a = U_{180°} - U_0$$
$$= (-pE\cos 180°) - (-pE\cos 0)$$
$$= 2pE = (2)(6{,}2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1{,}5 \times 10^4\ \text{N/C})$$
$$= 1{,}9 \times 10^{-25}\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Campo Elétrico Uma forma de explicar a força eletrostática entre duas cargas é supor que toda carga produz um campo elétrico no espaço que a cerca. A força eletrostática que age sobre uma das cargas é atribuída ao campo elétrico produzido pela outra carga na posição da primeira.

Definição de Campo Elétrico O *campo elétrico* $\vec{E}$ em qualquer ponto do espaço é definido em termos da força eletrostática $\vec{F}$ que seria exercida em uma carga de prova positiva q_0 colocada nesse ponto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{22-1}$$

Linhas de Campo Elétrico As *linhas de campo elétrico* são usadas para visualizar a orientação e a intensidade dos campos elétricos. O vetor campo elétrico em qualquer ponto do espaço é tangente à linha de campo elétrico que passa por esse ponto. A densidade de linhas de campo elétrico em uma região do espaço é proporcional ao módulo do campo elétrico nessa região. As linhas de campo elétrico começam em cargas positivas e terminam em cargas negativas.

Campo Produzido por uma Carga Pontual O módulo do campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma carga pontual q a uma distância r da carga é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{22-3}$$

O sentido de $\vec{E}$ é para longe da carga pontual se a carga é positiva e na direção da carga se esta é negativa.

Campo Produzido por um Dipolo Elétrico Um *dipolo elétrico* é formado por duas partículas com cargas de mesmo valor absoluto q e sinais opostos, separadas por uma pequena distância d. O **momento dipolar elétrico** $\vec{p}$ de um dipolo tem módulo qd e aponta da carga negativa para a carga positiva. O módulo do campo elétrico produzido por um dipolo em um ponto distante sobre o eixo do dipolo (reta que passa pelas duas cargas) é dado por

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}, \tag{22-9}$$

onde z é a distância entre o ponto e o centro do dipolo.

Campo Produzido por uma Distribuição Contínua de Cargas O campo elétrico produzido por uma *distribuição contínua de cargas* pode ser calculado tratando elementos de carga como cargas pontuais e somando, por integração, os campos elétricos produzidos por todos os elementos de carga.

Força Exercida por um Campo Elétrico sobre uma Carga Pontual Quando uma carga pontual q é submetida a um campo elétrico externo $\vec{E}$ produzido por outras cargas, a força eletrostática $\vec{F}$ que age sobre a carga pontual é dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}. \tag{22-28}$$

A força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido que $\vec{E}$ se a carga q for positiva e o sentido oposto se a carga for negativa.

Força Exercida por um Campo Elétrico sobre um Dipolo Quando um dipolo elétrico de momento dipolar $\vec{p}$ é submetido a um campo elétrico $\vec{E}$, o campo exerce sobre o dipolo um torque $\vec{\tau}$ dado por

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \tag{22-34}$$

A energia potencial U do dipolo depende de sua orientação em relação ao campo:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \tag{22-38}$$

Essa energia potencial é definida como sendo nula ($U = 0$) quando $\vec{p}$ é perpendicular a $\vec{E}$, mínima ($U = -pE$) quando $\vec{p}$ e $\vec{E}$ estão alinhados e apontam no mesmo sentido, e máxima ($U = pE$) quando $\vec{p}$ e $\vec{E}$ estão alinhados e apontam em sentidos opostos.

PERGUNTAS

1 A Fig. 22-21 mostra três configurações de campo elétrico, representadas por linhas de campo. Nas três configurações, um próton é liberado no ponto A a partir do repouso e acelerado pelo campo elétrico até o ponto B. A distância entre A e B é a mesma nas três configurações. Ordene as configurações de acordo com o módulo do momento linear do próton no ponto B, em ordem decrescente.

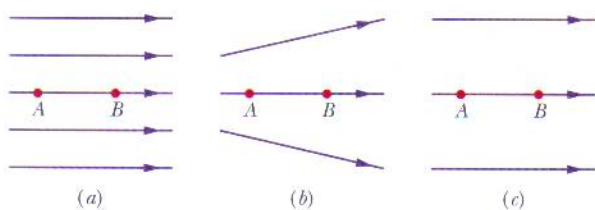



FIG. 22-21 Pergunta 1.

2 A Fig. 22-22 mostra quatro sistemas nos quais quatro partículas carregadas estão uniformemente espaçadas à esquerda e à direita de um ponto central. Os valores das cargas estão indicados. Ordene os sistemas de acordo com o módulo do campo elétrico no ponto central, em ordem decrescente.

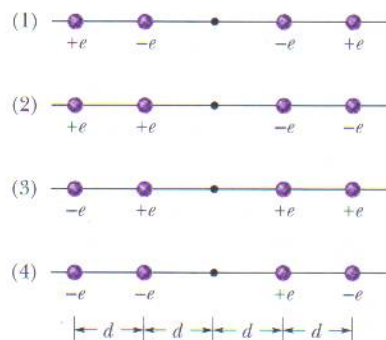



FIG. 22-22 Pergunta 2.

3 A Fig. 22-23 mostra duas partículas carregadas mantidas fixas sobre um eixo. (a) Em que ponto do eixo (além do infinito) o campo elétrico é zero: à esquerda das cargas, entre as cargas ou à direita das cargas? (b) Existe algum ponto (além do infinito) *fora* do eixo em que o campo elétrico seja zero?

FIG. 22-23 Pergunta 3.

4 A Fig. 22-24 mostra dois conjuntos de partículas carregadas em forma de quadrado. Os lados dos quadrados, cujo centro é o ponto P, não são paralelos. A distância entre as partículas situadas no mesmo quadrado é d ou $d/2$. Determine o módulo e a direção do campo elétrico total no ponto P.

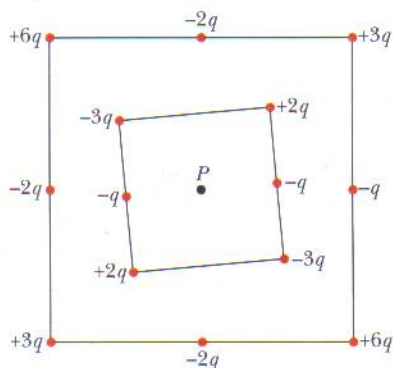



FIG. 22-24 Pergunta 4.

5 Na Fig. 22-25 duas partículas de carga $-q$ estão dispostas simetricamente em relação ao eixo y e produzem campos elétricos em um ponto P situado sobre o mesmo eixo. (a) Os módulos dos dois campos no ponto P são iguais? (b) Os campos apontam na direção das cargas ou para longe das cargas? (c) O módulo do campo elétrico total no ponto P é igual à soma dos módulos E dos campos elétricos produzidos pelas duas cargas (ou seja, é igual a $2E$)? (d) As componentes x dos campos produzidos pelas duas cargas se somam ou se cancelam? (e) As componentes y se somam ou se cancelam? (f) A direção do campo total no ponto P é a das componentes que se somam ou a das componentes que se cancelam? (g) Qual é a direção do campo total?

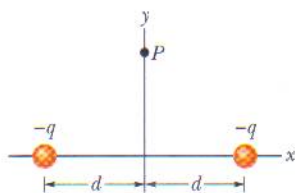



FIG. 22-25 Pergunta 5.

6 Na Fig. 22-26 um elétron e atravessa um pequeno orifício da placa A e se dirige para a placa B. Um campo elétrico uniforme na região entre as placas desacelera o elétron sem mudar sua trajetória. (a) Qual é a direção do campo? (b) Quatro outras partículas também atravessam pequenos orifícios da placa A ou da placa B e se movem na região entre as placas. Três possuem cargas $+q_1$, $+q_2$ e $-q_3$. A quarta (n, na figura) é um nêutron, que é eletricamente neutro. A velocidade de cada uma das outras quatro partículas aumenta, diminui ou permanece a mesma na região entre as placas?

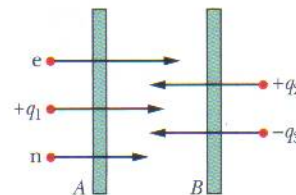



FIG. 22-26 Pergunta 6.

7 Na Fig. 22-27*a* uma barra de plástico circular, com uma carga elétrica uniforme $+Q$, produz um campo elétrico de módulo E no centro de curvatura da barra (situado na origem). Nas Figs. 22-27*b*, *c* e *d* outras barras circulares, todas com a mesma forma e a mesma carga que a primeira, são acrescentadas até que a circunferência fique completa. Um quinto arranjo (que pode ser chamado de *e*) é semelhante ao arranjo *d*, exceto pelo fato de que a barra do quarto quadrante tem carga $-Q$. Ordene os cinco arranjos de acordo com o módulo do campo elétrico no centro de curvatura, em ordem decrescente.

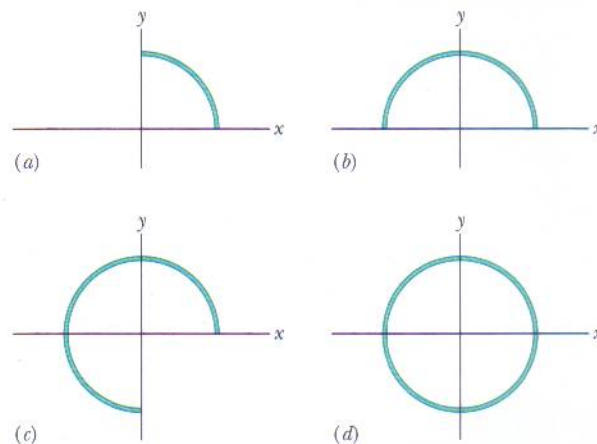



FIG. 22-27 Pergunta 7.

8 Na Fig. 22-28 dois anéis circulares iguais, não-condutores, têm os centros sobre a mesma reta perpendicular aos planos dos anéis. Em três sistemas as cargas uniformes dos anéis A e B são, respectivamente, (1) q_0 e q_0, (2) $-q_0$ e $-q_0$; (3) $-q_0$ e q_0. Ordene os sistemas de acordo com o módulo do campo elétrico total (a) no ponto P_1, a meio caminho entre os anéis; (b) no ponto P_2, no centro do anel B; (c) no ponto P_3, à direita do anel B, em ordem decrescente.

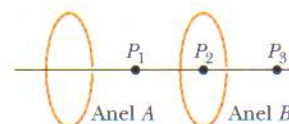



FIG. 22-28 Pergunta 8.

9 As energias potenciais associadas a quatro orientações de um dipolo elétrico em relação a um campo elétrico são (1) $-5U_0$; (2) $-7U_0$; (3) $3U_0$; (4) $5U_0$, onde U_0 é uma constante positiva. Ordene as orientações de acordo (a) com o ângulo entre o momento dipolar $\vec{p}$ e o campo elétrico $\vec{E}$; (b) com o módulo do torque exercido pelo campo sobre o dipolo, em ordem decrescente.

10 (a) No Teste 4, se o dipolo gira da orientação 1 para a orientação 2 o trabalho realizado pelo campo sobre o dipolo é positivo, negativo ou nulo? (b) Se o dipolo gira da orientação 1 para a orientação 4 o trabalho realizado pelo campo é maior, menor ou igual ao trabalho do item (a)?

11 A Fig. 22-29 mostra dois discos e um anel plano, todos com a mesma carga uniforme Q. Ordene os objetos de acordo com o módulo elétrico criado no ponto P (situado à mesma distância vertical), em ordem decrescente.

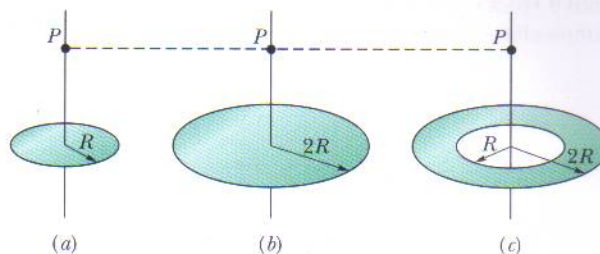



FIG. 22-29 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 22-3 Linhas de Campo Elétrico

•1 Na Fig. 22-30 as linhas de campo elétrico do lado esquerdo têm uma separação duas vezes maior que as linhas do lado direito. (a) Se o módulo do campo elétrico no ponto A é 40 N/C, qual é o módulo da força a que é submetido um próton no ponto A? (b) Qual é o módulo do campo elétrico no ponto B?

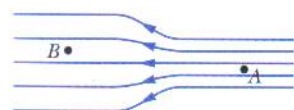



FIG. 22-30 Problema 1.

•2 Faça um esboço das linhas de campo elétrico entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas e do lado de fora da casca de maior raio, supondo que existe uma carga positiva uniforme q_1 na casca de menor raio e uma carga negativa uniforme $-q_2$ na casca de maior raio. Considere os casos $q_1 > q_2$, $q_1 = q_2$ e $q_1 < q_2$.

seção 22-4 Campo Elétrico Produzido por uma Carga Pontual

•3 Qual é o módulo de uma carga pontual cujo campo elétrico a 50 cm de distância tem um módulo de 2,0 N/C?

•4 Qual é o módulo de uma carga pontual capaz de criar um campo elétrico de 1,00 N/C em um ponto a 1,00 m de distância?

•5 O núcleo de um átomo de plutônio 239 contém 94 prótons. Suponha que o núcleo é uma esfera com 6,64 fm de raio e que a carga dos prótons está distribuída uniformemente nessa esfera. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do campo elétrico produzido pelos prótons na superfície do núcleo.

•6 Duas partículas são mantidas fixas sobre o eixo x: a partícula 1, de carga $-2,00 \times 10^{-7}$ C, no ponto $x = 6,00$ cm, e a partícula 2, de carga $+2,00 \times 10^{-7}$ C, no ponto $x = 21,0$ cm. Qual é o campo elétrico total a meio caminho entre as partículas, em termos dos vetores unitários?

••7 Duas partículas são mantidas fixas sobre o eixo x: a partícula 1, de carga $q_1 = 2,1 \times 10^{-8}$ C, no ponto $x = 20$ cm, e a partícula 2, de carga $q_2 = -4,00q_1$, no ponto $x = 70$ cm. Em que ponto do eixo x o campo elétrico total é nulo?

••8 Na Fig. 22-31 a partícula 1, de carga $q_1 = -5,00q$, e a partícula 2, de carga $q_2 = +2,00q$, são mantidas fixas sobre o eixo x. (a) Em que ponto do eixo, em termos da distância L, o campo elétrico total é nulo? (b) Faça um esboço das linhas de campo elétrico.

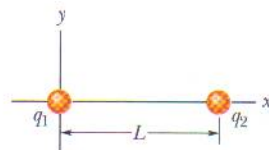



FIG. 22-31 Problema 8.

••9 Na Fig. 22-32 as quatro partículas formam um quadrado de lado $a = 5,00$ cm e têm cargas $q_1 = +10,0$ nC, $q_2 = -20,0$ nC, $q_3 = +20,0$ nC e $q_4 = -10,0$ nC. Qual é o campo elétrico no centro do quadrado, em termos dos vetores unitários?

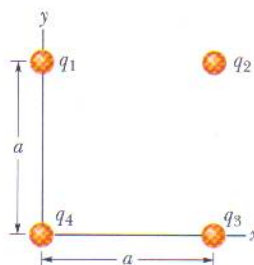



FIG. 22-32 Problema 9.

••10 Na Fig. 22-33 as quatro partículas são mantidas fixas e têm cargas $q_1 = q_2 = +5e$, $q_3 = +5e$ e $q_4 = -12e$. A distância $d = 5,0$ μm. Qual é o módulo do campo elétrico no ponto P?

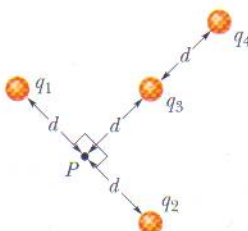



FIG. 22-33 Problema 10.

••11 A Fig. 22-34 mostra duas partículas carregadas mantidas fixas sobre o eixo x: $-q = -3{,}20 \times 10^{-19}$ C, no ponto $x = -3{,}00$ m, e $q = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C, no ponto $x = +3{,}00$ m. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico no ponto P, para o qual $y = 4{,}00$ m.

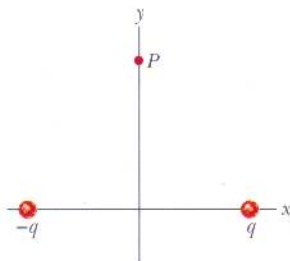



FIG. 22-34 Problema 11.

••12 A Fig. 22-35a mostra duas partículas carregadas mantidas fixas sobre o eixo x a uma distância L uma da outra. A razão q_1/q_2 entre os valores absolutos das cargas das duas partículas é 4,00. A Fig. 22-35b mostra a componente x, $E_{tot,x}$ do campo elétrico no eixo x, à direita da partícula 2, em função de x. A escala do eixo x é definida por $x_s = 30{,}0$ cm. (a) Para que valor de $x > 0$ o valor de $E_{tot,x}$ é máximo? (b) Se a carga da partícula 2 é $-q_2 = -3e$, qual é o valor desse campo máximo?

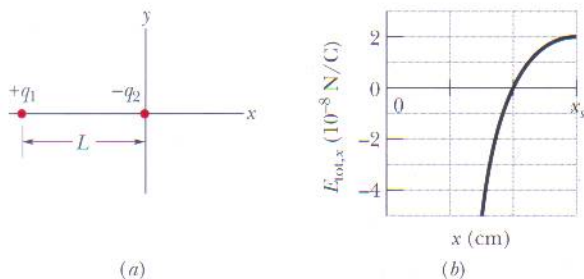



FIG. 22-35 Problema 12.

••13 Na Fig. 22-36 as três partículas são mantidas fixas no lugar e têm cargas $q_1 = q_2 = +e$ e $q_3 = +2e$. A distância $a = 6{,}00$ μm. Determine (a) o módulo e (b) a direção do campo elétrico no ponto P.

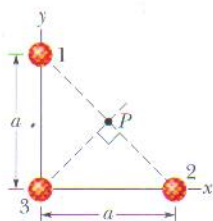



FIG. 22-36 Problema 13.

••14 A Fig. 22-37 mostra um arranjo irregular de elétrons (e) e prótons (p) sobre um arco de circunferência de raio $r = 2{,}00$ cm, com ângulos $\theta_1 = 30{,}0°$, $\theta_2 = 50{,}0°$, $\theta_3 = 30{,}0°$ e $\theta_4 = 20{,}0°$. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico no centro do arco.

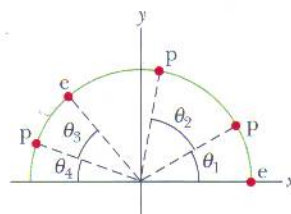



FIG. 22-37 Problema 14.

••15 A Fig. 22-38 mostra um próton (p) sobre o eixo central de um disco com uma densidade uniforme de cargas devido a um excesso de elétrons. Três desses elétrons são mostrados na figura: o elétron e_c, no centro do disco, e os elétrons e_s, em extremidades opostas do disco, a uma distância R do centro. O próton se encontra inicialmente a uma distância $z = R = 2{,}00$ cm do disco. Com o próton nessa posição, determine o módulo (a) do campo elétrico $\vec{E}_c$ produzido pelo elétron e_c e (b) do campo elétrico total $\vec{E}_{s,tot}$ produzido pelos elétrons e_s. O próton é transferido para o ponto $z = R/10{,}0$. Determine os novos valores (c) do módulo de $\vec{E}_c$ e (d) do módulo de $\vec{E}_{s,tot}$. (e) Os resultados dos itens (a) e (c) mostram que o módulo de $\vec{E}_c$ aumenta quando o próton se aproxima do disco. Por que, nas mesmas condições, o módulo de $\vec{E}_{s,tot}$ diminui, como mostram os resultados dos itens (b) e (d)?

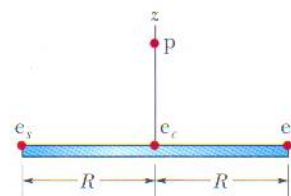



FIG. 22-38 Problema 15.

•••16 A Fig. 22-39 mostra um anel de plástico de raio $R = 50{,}0$ cm. Duas pequenas contas coloridas estão sobre o anel: a conta 1, de carga $+2{,}00$ μC, que é mantida fixa na extremidade esquerda, e a conta 2, de carga $+6{,}00$ μC, que pode ser deslocada ao longo do anel. As duas contas produzem, juntas, um campo elétrico de módulo E no centro do anel. Determine (a) um valor positivo e (b) um valor negativo do ângulo θ para que $E = 2{,}00 \times 10^5$ N/C.

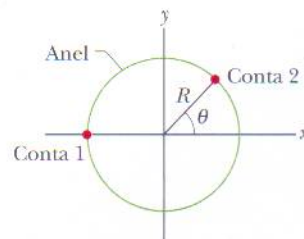



FIG. 22-39 Problema 16.

•••17 Duas contas carregadas estão sobre o anel da Fig. 22-40a, que possui um raio $R = 60{,}0$ cm. A conta 2, que não aparece na figura, é mantida fixa. A conta 1 está inicialmente sobre o eixo x, na posição $\theta = 0°$, mas é deslocada para a extremidade oposta do anel, ou seja, para a posição $\theta = 180°$, passando pelo primeiro e segundo quadrantes do sistema de coordenadas xy. A Fig. 22-40b mostra a componente x do campo elétrico produzido na origem pelas duas contas em função de θ, e a Fig. 22-40c mostra a componente y do campo. As escalas dos eixos verticais são definidas por $E_{xs} = 5{,}0 \times 10^4$ N/C e $E_{ys} = -9{,}0 \times 10^4$ N/C. (a) Qual é o ângulo θ da conta 2? Determine as cargas (b) da conta 1 e (c) da conta 2.

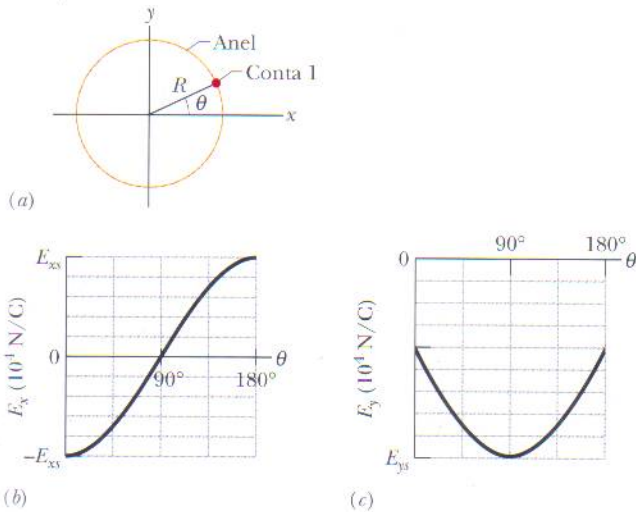



FIG. 22-40 Problema 17.

seção 22-5 Campo Elétrico Produzido por um Dipolo Elétrico

••18 As Eqs. 22-8 e 22-9 fornecem o valor aproximado do módulo do campo elétrico de um dipolo elétrico em pontos sobre o eixo do dipolo. Considere um ponto P sobre este eixo a uma distância $z = 5{,}00d$ do centro do dipolo, onde d é a distância entre as partículas que formam o dipolo. Seja E_{apr} o valor aproximado do módulo do campo no ponto P, dado pelas Eqs. 22-8 e 22-9, e E_{ver} o valor verdadeiro do campo. Determine a razão E_{apr}/E_{ver}.

••19 A Fig. 22-41 mostra um dipolo elétrico. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico produzido pelo dipolo em um ponto P situado a uma distância $r \gg d$.

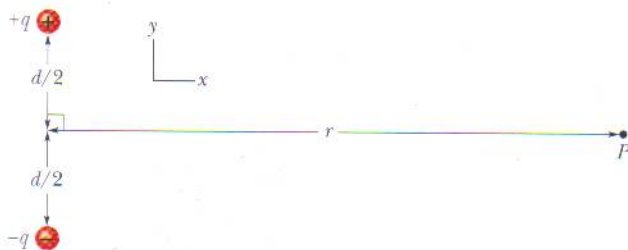



FIG. 22-41 Problema 19.

••20 O campo elétrico de um dipolo elétrico em pontos sobre o eixo do dipolo é dado aproximadamente pelas Eqs. 22-8 e 22-9. Se é feita uma expansão binomial da Eq. 22-7, qual é o termo seguinte da expressão do campo elétrico do dipolo em pontos sobre o eixo do dipolo? Em outras palavras, qual é o valor de E_1 na expressão

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3} + E_1?$$

•••21 *Quadrupolo elétrico.* A Fig. 22-42 mostra um quadrupolo elétrico, formado por dois dipolos de mesmo módulo e sentidos opostos. Mostre que o valor de E em um ponto P sobre o eixo do quadrupolo situado a uma distância z do centro (supondo $z \gg d$) é dado por

$$E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4},$$

onde Q ($= 2qd^2$) é chamado de *momento quadrupolar* da distribuição de cargas.

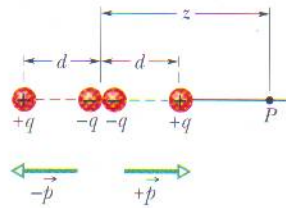



FIG. 22-42 Problema 21.

seção 22-6 Campo Elétrico Produzido por uma Linha de Cargas

•22 *Densidade, densidade, densidade.* (a) Uma carga de $-300e$ está distribuída uniformemente em um arco de circunferência de 4,00 cm de raio, que subtende um ângulo de 40°. Qual é a densidade linear de cargas do arco? (b) Uma carga de $-300e$ está distribuída uniformemente em uma das superfícies de um disco circular de 2,00 cm de raio. Qual é a densidade superficial de cargas da superfície? (c) Uma carga de $-300e$ está distribuída uniformemente na superfície de uma esfera de 2,00 cm de raio. Qual é a densidade superficial de cargas da superfície? (d) Uma carga de $-300e$ está distribuída uniformemente em uma esfera de 2,00 cm de raio. Qual é a densidade volumétrica de cargas da esfera?

•23 A Fig. 22-43 mostra dois anéis não-condutores paralelos, com os centros sobre a mesma reta perpendicular aos planos dos anéis. O anel 1, de raio R, possui uma carga uniforme q_1; o anel 2, também de raio R, possui uma carga uniforme q_2. Os anéis estão separados por uma distância $d = 3{,}00R$. O campo elétrico no ponto P situado na reta que passa pelos centros dos anéis, a uma distância R do anel 1, é zero. Determine a razão q_1/q_2.

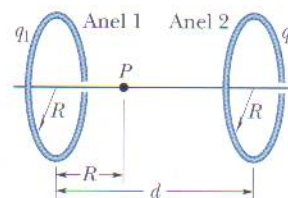



FIG. 22-43 Problema 23.

••24 Na Fig. 22-44 uma barra fina de vidro forma uma semicircunferência de raio $r = 5{,}00$ cm. Uma carga $+q = 4{,}50$ pC está distribuída uniformemente na metade superior da barra, e uma carga $-q = -4{,}50$ pC está distribuída uniformemente na metade inferior. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P, situado no centro do semicírculo.

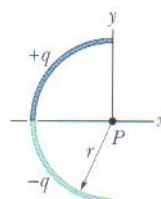



FIG. 22-44 Problema 24.

••25 Na Fig. 22-45 duas barras curvas de plástico, uma de carga $+q$ e outra de carga $-q$, formam uma circunferência de raio R = 8,50 cm no plano xy. O eixo x passa pelos dois pontos de ligação entre os arcos, e a carga está distribuída uniformemente nos dois arcos. Se $q = 15{,}0$ pC, determine (a) o módulo e (b) a orientação

(em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P, situado no centro da circunferência.

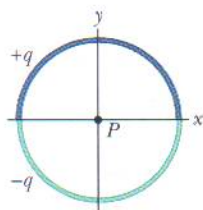



FIG. 22-45 Problema 25.

••26 Um anel de raio $R = 2{,}40$ cm de raio contém uma distribuição uniforme de cargas, e o módulo do campo elétrico E resultante é medido ao longo do eixo central do anel (perpendicular ao plano do anel). A que distância do centro do anel o campo E é máximo?

••27 Na Fig. 22-46, uma barra não-condutora de comprimento $L = 8{,}15$ cm tem uma carga $-q = -4{,}23$ fC uniformemente distribuída. (a) Qual é a densidade linear de cargas da barra? Determine (b) o módulo e (c) a direção (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico produzido no ponto P, situado no eixo x, a uma distância $a = 12{,}0$ cm da extremidade da barra. Determine o módulo do campo elétrico produzido em um ponto situado no eixo x, a uma distância $a = 50$ m do centro da barra, (d) pela barra e (e) por uma partícula de carga $-q = -4{,}23$ fC colocada no lugar anteriormente ocupado pelo centro da barra.

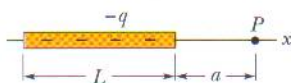



FIG. 22-46 Problema 27.

••28 A Fig. 22-47 mostra dois anéis concêntricos, de raios R e $R' = 3{,}00R$, que estão no mesmo plano. O ponto P está no eixo central z, a uma distância $D = 2{,}00R$ do centro dos anéis. O anel menor possui uma carga uniformemente distribuída $+Q$. Em termos de Q, qual deve ser a carga uniformemente distribuída no anel maior para que o campo elétrico no ponto P seja nulo?

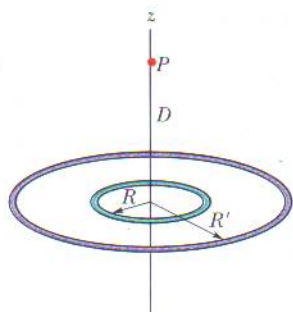



FIG. 22-47 Problema 28.

••29 A Fig. 22-48 mostra três arcos de circunferência cujo centro está na origem de um sistema de coordenadas. Em cada arco a carga uniformemente distribuída é dada em termos de $Q = 2{,}00$ μC. Os raios são dados em termos de $R = 10{,}0$ cm. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico na origem.

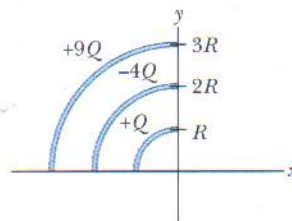



FIG. 22-48 Problema 29.

••30 Uma barra fina não-condutora, com uma distribuição uniforme de carga positiva Q, tem a forma de um círculo de raio R (Fig. 22-49). O eixo central do anel é o eixo z, com a origem no centro do anel. Determine o módulo do campo elétrico (a) no ponto $z = 0$ e (b) no ponto $z = \infty$. (c) Em termos de R, para que valor positivo de z o módulo do campo é máximo? (d) Se $R = 2{,}00$ cm e $Q = 4{,}00$ μC, qual é o valor máximo do campo?

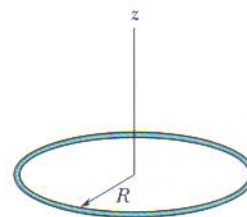



FIG. 22-49 Problema 30.

••31 A Fig. 22-50a mostra uma barra não-condutora com uma carga $+Q$ distribuída uniformemente. A barra forma um semicírculo de raio R e produz um campo elétrico de módulo E no centro de curvatura P. Se a barra é substituída por uma carga pontual situada a uma distância R do ponto P (Fig. 22-50b), qual é a razão entre o novo valor de E e o antigo valor?

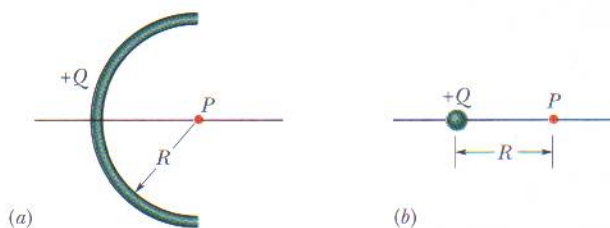



FIG. 22-50 Problema 31.

•••32 Na Fig. 22-51, uma carga positiva $q = 7{,}81$ pC está distribuída uniformemente em uma barra fina, não-condutora, de comprimento $L = 14{,}5$ cm. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico produzido no ponto P, situado sobre a mediatriz da barra, a uma distância $R = 6{,}00$ cm da barra.

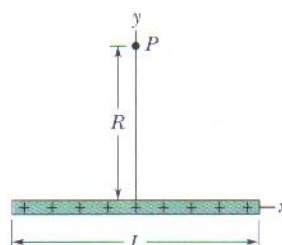



FIG. 22-51 Problema 32.

•••33 Na Fig. 22-52, uma barra não-condutora "semi-infinita" (ou seja, infinita apenas em um sentido) possui uma densidade linear de cargas uniforme λ. Mostre que o campo elétrico $\vec{E}_p$ no ponto P faz um ângulo de 45° com a barra e que esse resultado não depende da distância R. (*Sugestão:* Calcule separadamente as componentes de $\vec{E}_p$ nas direções paralela e perpendicular à barra.)

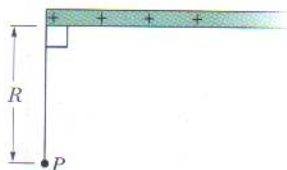



FIG. 22-52 Problema 33.

seção 22-7 Campo Elétrico Produzido por um Disco Carregado

•34 Um disco de 2,5 cm de raio possui uma densidade superficial de cargas de 5,3 μC/m^2 na superfície superior. Qual é o módulo do campo elétrico produzido pelo disco em um ponto sobre o eixo central a uma distância z = 12 cm do centro do disco?

•35 A que distância ao longo do eixo de um disco de plástico uniformemente carregado de 0,600 m de raio o módulo do campo elétrico é igual à metade do módulo do campo no centro do disco?

••36 A Fig. 22-53a mostra um disco circular uniformemente carregado. O eixo central z é perpendicular ao plano do disco, e sua origem está no plano do disco. A Fig. 22-53b mostra o módulo do campo elétrico sobre o eixo z em função do valor de z, em termos do valor máximo E_m do módulo do campo elétrico. A escala do eixo z é definida por z_s = 8,0 cm. Qual é o raio do disco?

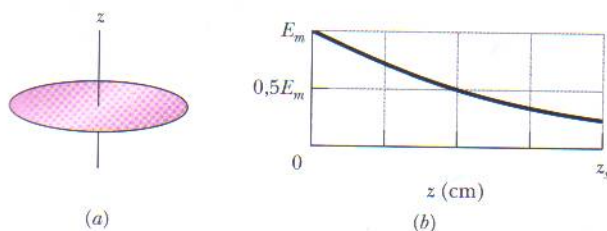



FIG. 22-53 Problema 36.

••37 Um engenheiro foi encarregado de projetar um dispositivo no qual um disco uniformemente carregado de raio R produz um campo elétrico. O módulo do campo é mais importante em um ponto P sobre o eixo do disco, a uma distância 2,00R do plano do disco (Fig. 22-54a). Para economizar material decidiu-se substituir o disco por um anel com o mesmo raio externo R e um raio interno R/2,00 (Fig. 22-54b). O anel tem a mesma densidade superficial de cargas que o disco original. Qual é a razão entre o novo campo no ponto P e o campo antigo?

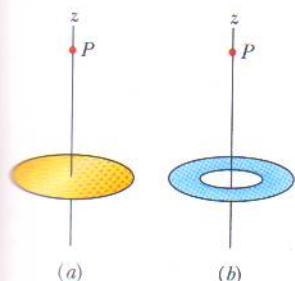



FIG. 22-54 Problema 37.

••38 Um disco circular de plástico de raio R = 2,00 cm tem uma carga uniformemente distribuída $Q = +(2{,}00 \times 10^6)e$ na superfície. Qual é a carga, em coulombs, de um anel circular de 30 μm de largura e raio médio r = 0,50 cm extraído do disco?

seção 22-8 Uma Carga Pontual em um Campo Elétrico

•39 Um elétron é liberado a partir do repouso em um campo elétrico uniforme de módulo $2{,}00 \times 10^4$ N/C. Determine a aceleração do elétron. (Ignore os efeitos da gravitação.)

•40 Um elétron adquire uma aceleração para leste de $1{,}80 \times 10^9$ m/s^2 na presença de um campo elétrico. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do campo elétrico.

•41 Um elétron está sobre o eixo de um dipolo elétrico, a 25 nm de distância do centro do dipolo. Qual é o módulo da força eletrostática a que está submetido o elétron se o momento do dipolo é $3{,}6 \times 10^{-29}$ C·m? Suponha que a distância entre as cargas do dipolo é muito menor que 25 nm.

•42 Uma partícula alfa (núcleo de um átomo de hélio) tem uma massa de $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg e uma carga de $+2e$. Determine (a) o módulo e (b) a direção de um campo elétrico capaz de equilibrar o peso da partícula.

•43 Um grupo de nuvens carregadas produz um campo elétrico no ar perto da superfície da Terra. Na presença desse campo uma partícula com uma carga de $-2{,}0 \times 10^{-9}$ C é submetida a uma força eletrostática para baixo de $3{,}0 \times 10^{-6}$ N. (a) Qual é o módulo do campo elétrico? Determine (b) o módulo e (c) a orientação da força eletrostática $\vec{F}_{el}$ exercida pelo campo sobre um próton. (d) Qual é o módulo da força gravitacional $\vec{F}_g$ a que está sujeito o próton? (e) Qual é a razão $\vec{F}_{el}/\vec{F}_g$ neste caso?

•44 O ar úmido se torna um condutor (as moléculas se ionizam) quando é submetido a um campo elétrico maior que $3{,}0 \times 10^6$ N/C. Para esse valor de campo, determine o módulo da força eletrostática a que é submetido (a) um elétron e (b) uma molécula da qual foi removido um elétron.

•45 Feixes de prótons de alta energia podem ser produzidos por "canhões" que usam campos elétricos para acelerar os prótons. (a) Qual é a aceleração experimentada por um próton em um campo elétrico de $2{,}00 \times 10^4$ N/C? (b) Na presença desse campo, qual é a velocidade adquirida pelo próton depois de percorrer uma distância de 1,00 cm?

•46 Um elétron com uma velocidade de $5{,}00 \times 10^8$ cm/s entra em uma região em que existe um campo elétrico uniforme de $1{,}00 \times 10^3$ N/C e se move paralelamente ao campo, sendo desacelerado por este. Determine (a) a distância percorrida pelo elétron até inverter seu movimento; (b) o tempo necessário para que o elétron inverta seu movimento. (c) Se a região em que existe o campo tem 8,00 mm de largura (uma distância insuficiente para que o elétron inverta seu movimento), que fração da energia cinética inicial do elétron é perdida na região?

•47 No experimento de Millikan, uma gota de óleo com um raio de 1,64 μm e uma massa específica de 0,851 g/cm^3 permanece imóvel na câmara C (Fig. 22-14) quando um campo vertical de $1{,}92 \times 10^5$ N/C é aplicado. Determine a carga da gota em termos de e.

••48 Em um certo instante, as componentes da velocidade de um elétron que se move entre duas placas paralelas carregadas são $v_x = 1{,}5 \times 10^5$ m/s e $v_y = 3{,}0 \times 10^3$ m/s. O campo elétrico entre as placas é dado por $\vec{E} = (120\ \text{N/C})\hat{j}$. Em termos dos vetores unitários, determine (a) a aceleração do elétron; (b) a velocidade do elétron no instante em que sua coordenada x variou de 2,0 cm.

••49 Há um campo elétrico uniforme em uma região entre duas placas com cargas elétricas opostas. Um elétron é liberado a partir do repouso da superfície da placa negativamente carregada e atinge a superfície da outra placa, a 2,0 cm de distância, em $1,5 \times 10^{-8}$ s. (a) Qual é a velocidade do elétron ao atingir a segunda placa? (b) Qual é o módulo do campo elétrico $\vec{E}$?

••50 Na Fig. 22-55 um elétron é lançado com uma velocidade inicial $v_0 = 2,00 \times 10^6$ m/s a um ângulo $\theta_0 = 40,0°$ com o eixo x em uma região na qual existe um campo elétrico uniforme $\vec{E} = (5,00\ \text{N/C})\hat{j}$. Uma tela para detectar elétrons é instalada paralelamente ao eixo y, a uma distância $x = 3,00$ m do ponto de lançamento do elétron. Em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade do elétron ao atingir a tela?

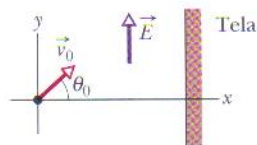



FIG. 22-55 Problema 50.

••51 Duas grandes placas de cobre, mantidas a 5,0 cm de distância uma da outra, são usadas para criar um campo elétrico uniforme, como mostra a Fig. 22-56. Um elétron é liberado da placa negativa ao mesmo tempo em que um próton é liberado da placa positiva. Desprezando a interação entre as partículas, determine a que distância da placa positiva as partículas passam uma pela outra. (Por que não é necessário conhecer o valor do campo elétrico para resolver o problema?)

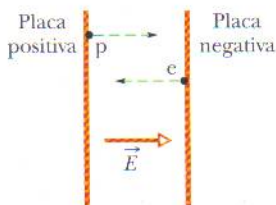



FIG. 22-56 Problema 51.

••52 Na Fig. 22-57 um elétron (e) é liberado a partir do repouso no eixo central de um disco uniformemente carregado de raio R. A densidade superficial de cargas do disco é $+4,00\ \mu\text{C/m}^2$. Determine o módulo da aceleração inicial do elétron se ele for liberado a uma distância (a) R, (b) $R/100$, (c) $R/1000$ do centro do disco. (d) Por que o módulo da aceleração quase não varia com a distância entre a carga e o disco?

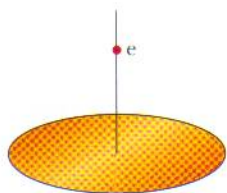



FIG. 22-57 Problema 52.

••53 Um bloco de 10,0 g com uma carga de $+8,00 \times 10^{-5}$ C é submetido a um campo elétrico $\vec{E} = (3000\hat{i} - 600\hat{j})$ N/C. Determine (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) da força eletrostática que age sobre o bloco. Se o bloco é liberado na origem, a partir do repouso, no instante $t = 0$, determine (c) a coordenada x e (d) a coordenada y do bloco no instante $t = 3,00$ s.

••54 Um elétron penetra em uma região em que existe um campo elétrico uniforme com uma velocidade inicial de 40 km/s e se move paralelamente ao campo elétrico, cujo módulo é $E = 50$ N/C. (a) Qual é a velocidade do elétron 1,5 ns depois de entrar na região? (b) Que distância o elétron percorre nesse intervalo de 1,5 ns?

••55 Suponha que uma abelha pode ser aproximada por uma esfera de 1,000 cm de diâmetro com uma carga de +45,0 pC distribuída uniformemente na superfície. Suponha também que um grão de pólen com 40,0 μm de diâmetro é mantido eletricamente na superfície da esfera porque a carga da abelha induz uma carga de −1,00 pC no lado mais próximo da esfera e uma carga de +1,00 pC no lado mais distante. (a) Qual é o módulo da força eletrostática resultante que a abelha exerce sobre o grão de pólen? Suponha que a abelha transporte o grão de pólen até uma distância de 1,000 mm da ponta do estigma de uma flor e que a ponta é uma partícula de carga −45 pC. (b) Qual é o módulo da força eletrostática resultante que o estigma exerce sobre o grão? (c) O grão permanece no corpo da abelha ou salta para o estigma?

seção 22-9 Um Dipolo em um Campo Elétrico

•56 Um dipolo elétrico formado por cargas de $+2e$ e $-2e$ separadas por uma distância de 0,78 nm é submetido a um campo elétrico de $3,4 \times 10^6$ N/C. Calcule o módulo do torque exercido pelo campo elétrico sobre o dipolo se o momento do dipolo está (a) paralelo; (b) perpendicular; (c) antiparalelo ao campo elétrico.

•57 Um dipolo elétrico formado por cargas de +1,50 nC e −1,50 nC separadas por uma distância de 6,20 μm é submetido a um campo elétrico de 1100 N/C. Determine (a) o módulo do momento dipolar elétrico e (b) a diferença entre as energias potenciais quando o dipolo está orientado paralelamente e antiparalelamente a $\vec{E}$.

••58 Um certo dipolo elétrico é submetido a um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ de módulo 40 N/C. A Fig. 22-58 mostra o módulo τ do torque exercido sobre o dipolo em função do ângulo θ entre o campo $\vec{E}$ e o momento dipolar $\vec{p}$. A escala do eixo vertical é definida por $\tau_s = 100 \times 10^{-28}$ N·m. Qual é o módulo de $\vec{p}$?

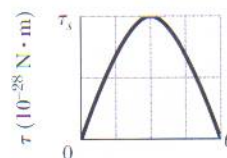



FIG. 22-58 Problema 58.

••59 Escreva uma expressão para a freqüência de oscilação de um dipolo elétrico de momento dipolar $\vec{p}$ e momento de inércia I para pequenas amplitudes de oscilação em torno da posição de equilíbrio na presença de um campo elétrico uniforme de módulo E.

••60 Um certo dipolo elétrico é submetido a um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ cujo módulo é 20 N/C. A Fig. 22-59 mostra a energia potencial U do dipolo em função do ângulo θ entre $\vec{E}$ e o momento do dipolo $\vec{p}$. A escala do eixo vertical é definida por $U_s = 100 \times 10^{-28}$ J. Qual é o módulo de $\vec{p}$?

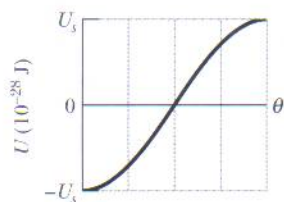



FIG. 22-59 Problema 60.

••61 Qual é o trabalho necessário para fazer girar de 180° um dipolo elétrico em um campo elétrico uniforme de módulo E = 46,0 N/C se $p = 3{,}02 \times 10^{-25}$ C · m e o ângulo inicial é 64°?

Problemas Adicionais

62 Em um de seus experimentos, Millikan observou que as cargas a seguir, entre outras, eram observadas na mesma gota em diferentes ocasiões:

$6{,}563 \times 10^{-19}$ C	$13{,}13 \times 10^{-19}$ C	$19{,}71 \times 10^{-19}$ C
$8{,}204 \times 10^{-19}$ C	$16{,}48 \times 10^{-19}$ C	$22{,}89 \times 10^{-19}$ C
$11{,}50 \times 10^{-19}$ C	$18{,}08 \times 10^{-19}$ C	$26{,}13 \times 10^{-19}$ C

Que valor da carga elementar e pode ser calculado a partir desses dados?

63 Na Fig. 22-60a uma partícula de carga $+Q$ produz um campo elétrico de módulo E_{part} no ponto P, a uma distância R da partícula. Na Fig. 22-60b a mesma carga está distribuída uniformemente em um arco de circunferência de raio R, que subtende um ângulo θ. A carga do arco produz um campo elétrico de módulo E_{arco} no centro de curvatura P. Para que valor de θ temos $E_{arco} = 0{,}500E_{part}$? (*Sugestão:* Use uma solução gráfica.)

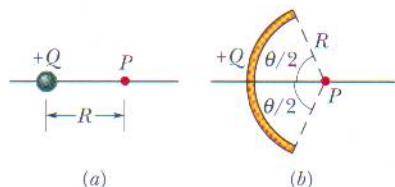



FIG. 22-60 Problema 63.

64 Na Fig. 22-61 oito partículas formam um quadrado onde d = 2,0 cm. As cargas são $q_1 = +3e, q_2 = +e, q_3 = -5e, q_4 = -2e, q_5 = +3e, q_6 = +e, q_7 = -5e$ e $q_8 = +e$. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo elétrico produzido pelas partículas no centro do quadrado?

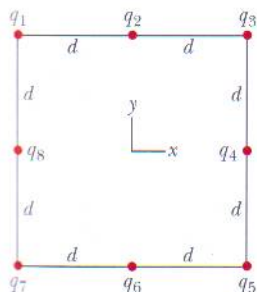



FIG. 22-61 Problema 64.

65 Duas partículas, ambas com uma carga de valor absoluto 12 nC, ocupam dois vértices de uma triângulo eqüilátero com 2,0 m de lado. Determine o módulo do campo elétrico no terceiro vértice (a) se as duas cargas forem positivas e (b) se uma das cargas for positiva e a outra for negativa.

66 Três partículas com a mesma carga positiva Q formam um triângulo eqüilátero de lado d. Qual é o módulo do campo elétrico produzido pelas partículas no ponto médio de um dos lados?

67 Uma partícula de carga $-q_1$ é mantida fixa na origem do eixo x. (a) Em que ponto do eixo x deve ser colocada uma partícula de carga $-4q_1$ para que o campo elétrico seja zero no ponto x = 2,0 mm? (b) Se uma partícula de carga $+4q_1$ é colocada no ponto determinado no item (a), qual é a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do campo elétrico no ponto x = 2,00 mm?

68 Um próton e um elétron ocupam dois vértices de um triângulo eqüilátero de lado $2{,}0 \times 10^{-6}$ m. Qual é o módulo do campo elétrico no terceiro vértice do triângulo?

69 Na Fig. 22-62 a partícula 1 (de carga +1,00 μC), a partícula 2 (de carga +1,00 μC) e a partícula 3 (de carga Q) formam um triângulo eqüilátero de lado a. Para que valor de Q (sinal e valor) o campo elétrico no centro do triângulo é nulo?

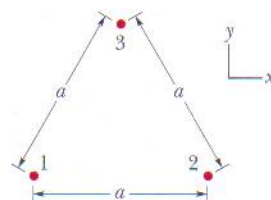



FIG. 22-62 Problemas 69 e 82.

70 (a) Qual deve ser a carga total q (em excesso) do disco da Fig. 22-13 para que o campo elétrico no centro da superfície do disco seja $3{,}0 \times 10^6$ N/C, o valor de E para o qual o ar se torna um condutor e emite centelhas? Tome o raio do disco como sendo 2,5 cm e use os dados para o ar da Tabela 22-1. (b) Suponha que os átomos da superfície têm uma seção reta efetiva de 0,015 nm². Quantos átomos são necessários para preencher superfície do disco? (c) A carga calculada em (a) é a soma das cargas dos átomos da superfície que possuem um elétron em excesso. Qual deve ser a fração desses elétrons?

71 Uma gota d'água esférica com 1,20 μm de diâmetro está suspensa no ar devido a um campo elétrico atmosférico vertical cujo módulo é E = 462 N/C. (a) Qual é o peso da gota? (b) Quantos elétrons em excesso possui a gota?

72 Na Fig. 22-63 um dipolo elétrico gira de uma orientação inicial i (θ_i = 20,0°) para uma orientação final f (θ_f = 20,0°) na presença de um campo elétrico externo uniforme $\vec{E}$. O momento do dipolo é $1{,}60 \times 10^{-27}$ C·m; o módulo do campo é $3{,}00 \times 10^6$ N/C. Qual é a variação da energia potencial do dipolo?

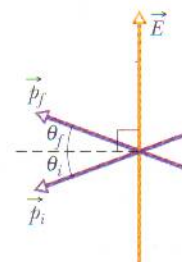



FIG. 22-63 Problema 72.

73 Uma carga de 20 nC está uniformemente distribuída ao longo de uma barra retilínea de 4,0 m de comprimento que é encurvada para formar um arco de circunferência com 2,0 m de raio. Qual é o módulo do campo elétrico no centro de curvatura do arco?

74 (a) Qual é o módulo da aceleração de um elétron submetido a um campo elétrico uniforme de $1{,}40 \times 10^6$ N/C? (b) Quanto tempo o elétron leva, partindo do repouso, para atingir um décimo da velocidade da luz? (c) Que distância o elétron percorre nesse período de tempo?

75 O mostrador de um relógio possui cargas negativas pontuais $-q, -2q, -3q, \ldots, -12q$ mantidas fixas nas posições dos números correspondentes. Os ponteiros do relógio não afetam o campo produzido pelas cargas pontuais. A que horas o ponteiro das horas aponta na mesma direção que o vetor campo elétrico no centro do mostrador? (*Sugestão:* Leve em conta a simetria das cargas.)

76 O movimento de um elétron se limita ao eixo central de um anel de raio R da Fig. 22-10, com $z \ll R$. Mostre que a força eletrostática a que o elétron é submetido faz com que a partícula oscile em torno do centro do anel com uma freqüência angular dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}},$$

onde q é a carga do anel e m é a massa do elétron.

77 Existe na atmosfera um campo elétrico $\vec{E}$, dirigido verticalmente para baixo, cujo módulo é da ordem de 150 N/C. Estamos interessados em fazer "flutuar" nesse campo uma esfera de enxofre com 4,4 N de peso carregando-a eletricamente. (a) Qual deve ser a carga da esfera (sinal e valor absoluto)? (b) Por que esse experimento não pode ser realizado na prática?

78 Calcule o momento dipolar elétrico de um elétron e um próton separados por uma distância de 4,30 nm.

79 O campo elétrico no plano xy produzido por uma partícula positivamente carregada é $7{,}2(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ N/C no ponto (3,0; 3,0) cm e $100\hat{i}$ N/C no ponto (2,0; 0) cm. Determine (a) a coordenada x e (b) a coordenada y da partícula. (c) Determine a carga da partícula.

80 Uma barra circular tem um raio de curvatura $R = 9{,}00$ cm, uma carga uniformemente distribuída $Q = 6{,}25$ pC e subtende um ângulo $\theta = 2{,}40$ rad. Qual é o módulo do campo elétrico no centro de curvatura?

81 Um dipolo elétrico de momento dipolar

$$\vec{p} = (3{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j})(1{,}24 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m})$$

é submetido a um campo elétrico $\vec{E} = (4000\ \mathrm{N/C})\hat{i}$. (a) Qual é a energia potencial do dipolo elétrico? (b) Qual é o torque que age sobre o dipolo? (c) Se um agente externo faz girar o dipolo até que o momento dipolar seja

$$\vec{p} = (-4{,}00\hat{i} + 3{,}00\hat{j})(1{,}24 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}),$$

qual é o trabalho realizado pelo agente externo?

82 Na Fig. 22-62 a partícula 1 (de carga +2,00 pC), a partícula 2 (de carga −2,00 pC) e a partícula 3 (de carga +5,00 pC) formam um triângulo eqüilátero de lado $a = 9{,}50$ cm. (a) Determine a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) da força $\vec{F}_3$ a que a partícula 3 é submetida pelas outras partículas fazendo um esboço das linhas de força associadas às outras partículas. (b) Calcule o módulo da força $\vec{F}_3$.

83 Uma corda com uma densidade linear uniforme de cargas de 9,0 nC/m é estendida ao longo do eixo x de $x = 0$ até $x = 3{,}0$ m. Determine o módulo do campo elétrico no ponto $x = 4{,}0$ m do eixo x.

84 Duas partículas com a mesma carga positiva q são mantidas fixas sobre o eixo y, uma em $y = d$ e a outra em $y = -d$. (a) Escreva uma expressão para o módulo E do campo elétrico em pontos sobre o eixo x dados por $x = \alpha d$. (b) Plote E em função de α no intervalo $0 < \alpha < 4$. A partir do gráfico, determine os valores de α para os quais (c) o valor de E é máximo e (d) o valor de E é metade do valor máximo.

85 Na Fig. 22-64, a partícula 1, de carga $q_1 = 1{,}00$ pC, e a partícula 2, de carga $q_2 = -2{,}00$ pC, são mantidas fixas, separadas por uma distância $d = 5{,}00$ cm. Determine, em termos dos vetores unitários, o campo elétrico (a) no ponto A; (b) no ponto B; (c) no ponto C. (d) Faça um esboço das linhas de campo elétrico.

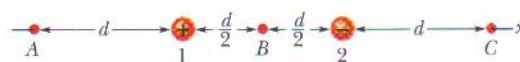



FIG. 22-64 Problema 85.

86 Na Fig. 22-65 um campo elétrico uniforme vertical $\vec{E}$ de módulo $2{,}00 \times 10^3$ N/C foi estabelecido entre duas placas horizontais carregando positivamente a placa de baixo e negativamente a placa de cima. As placas têm um comprimento $L = 10{,}0$ cm e estão separadas por uma distância $d = 2{,}00$ cm. Um elétron é lançado no espaço entre as placas a partir da extremidade esquerda da placa de baixo. A velocidade inicial $\vec{v}_0$ faz um ângulo $\theta = 45{,}0°$ com a placa de baixo e tem um módulo de $6{,}00 \times 10^6$ m/s. (a) O elétron irá se chocar com uma das placas? (b) Se a resposta for afirmativa, com qual das placas o elétron irá se chocar e a que distância horizontal da extremidade esquerda das placas?

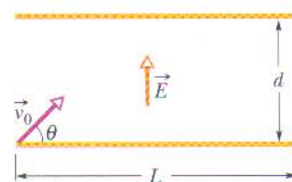



FIG. 22-65 Problema 86.

87 Para os dados do Problema 62, suponha que a carga q da gota é dada por $q = ne$, onde n é um número inteiro e e é a carga elementar. (a) Determine o valor de n para cada valor experimental de q. (b) Faça uma regressão linear dos valores de q em função de n e use o resultado para determinar o valor de e.

88 Suponha que na Fig. 22-8 as duas cargas são positivas. Mostre que para $z \gg d$ o campo E no ponto P da figura é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{z^2}.$$

Lei de Gauss 23

C. Johnny Autery

As tempestades elétricas são perigosas por várias razões: (1) se um relâmpago atingir o leitor ou um objeto que o leitor esteja segurando, poderá produzir um choque fatal; (2) se um relâmpago atingir um objeto próximo, parte da carga poderá saltar e atingir o leitor (um efeito conhecido como descarga lateral); (3) se um relâmpago atingir o solo nas proximidades do leitor, parte da carga produzida no solo poderá atravessar o corpo do leitor. Recentemente, um quarto perigo associado às tempestades elétricas foi reconhecido. A fotografia ao lado, na qual um relâmpago atinge uma árvore, contém uma pista.

Qual é este perigo adicional de uma tempestade elétrica?

A resposta está neste capítulo.

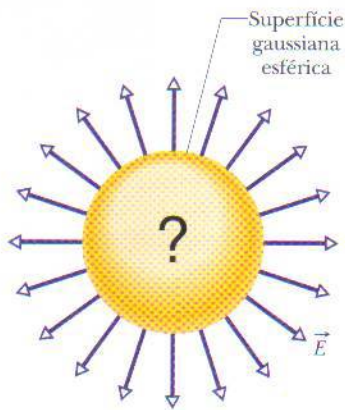



FIG. 23-1 Uma superfície gaussiana esférica. Se os vetores campo elétrico têm o mesmo módulo e apontam radialmente para fora da superfície em todos os pontos, podemos concluir que existe uma carga positiva no interior da superfície e que essa carga possui simetria esférica.

23-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos principais objetivos da física é descobrir formas simples de resolver problemas aparentemente complexos. Um dos instrumentos usados pela física para conseguir esse objetivo é a simetria. Assim, por exemplo, para determinar o campo elétrico $\vec{E}$ do anel carregado da Fig. 22-10 e da barra carregada da Fig. 22-11 consideramos os campos $d\vec{E}$ ($= k\ dq/r^2$) criados por elementos de carga do anel e da barra. Em seguida, simplificamos o cálculo de $\vec{E}$ usando a simetria para descartar as componentes perpendiculares dos vetores $d\vec{E}$, o que nos poupou algum trabalho.

Para certas distribuições simétricas de cargas, podemos poupar muito mais trabalho usando uma lei conhecida como lei de Gauss, descoberta pelo matemático e físico Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Em vez de considerar os campos $d\vec{E}$ criados pelos elementos de carga de uma dada distribuição de cargas, a lei de Gauss considera uma superfície fechada imaginária que envolve a distribuição de cargas. Esta **superfície gaussiana**, como é chamada, pode ter qualquer forma, mas a forma que facilita o cálculo do campo elétrico é a que reflete a simetria da distribuição de cargas. Assim, por exemplo, se a carga está distribuída uniformemente em uma esfera podemos usar uma superfície gaussiana esférica como a da Fig. 23-1 para envolver a esfera e, em seguida, como discutimos neste capítulo, determinar o campo elétrico na superfície usando o fato de que

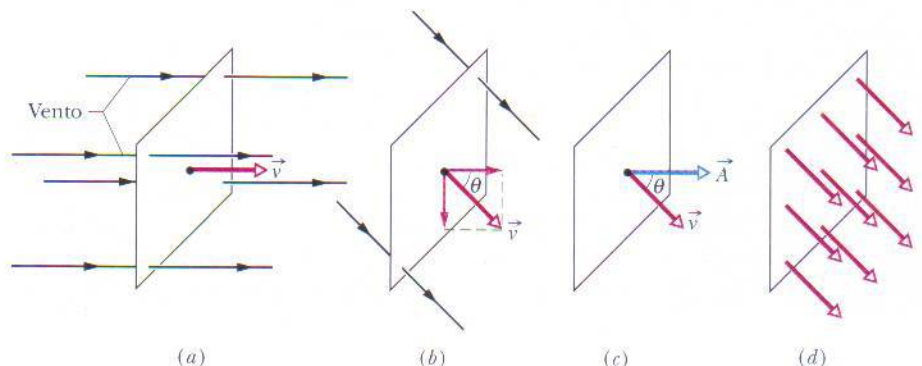
> A lei de Gauss relaciona os campos elétricos nos pontos de uma superfície gaussiana à carga total envolvida pela superfície.

Podemos também usar a lei de Gauss no sentido inverso: se conhecemos o campo elétrico em uma superfície gaussiana podemos determinar a carga total envolvida pela superfície. Para dar um exemplo simples, suponha que todos os vetores campo elétrico da Fig. 23-1 apontem radialmente para longe do centro da esfera e tenham o mesmo módulo. A lei de Gauss nos diz imediatamente que a superfície esférica está envolvendo uma carga positiva pontual ou uma distribuição esférica de cargas positivas. Entretanto, para calcular o *valor* da carga precisamos calcular a quantidade de campo elétrico que é interceptada pela superfície gaussiana da Fig. 23-1. A medida da quantidade de campo interceptada, conhecida como *fluxo*, é discutida a seguir.

23-2 | Fluxo

Suponha que, como na Fig. 23-2*a*, uma espira quadrada de área A seja exposta a um vento uniforme cuja velocidade é $\vec{v}$. Seja Φ a *vazão* (volume por unidade de tempo) do ar através da espira. Essa vazão depende do ângulo entre $\vec{v}$ e o plano da espira. Se $\vec{v}$ é perpendicular ao plano da espira, a vazão Φ é igual a vA.

Se $\vec{v}$ é paralela ao plano da espira, o ar não passa pela espira e, portanto, Φ é zero. Para um ângulo intermediário θ, a vazão Φ depende da componente de $\vec{v}$ nor-

FIG. 23-2 (*a*) Um vento uniforme de velocidade $\vec{v}$ incide perpendicularmente ao plano de uma espira quadrada de área A. (*b*) A componente de $\vec{v}$ perpendicular ao plano da espira é $v \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{v}$ e uma normal ao plano. (*c*) O vetor área $\vec{A}$ é perpendicular ao plano da espira e faz um ângulo θ com $\vec{v}$. (*d*) O campo de velocidades é interceptado pela espira.

mal ao plano (Fig. 23-2*b*). Como essa componente é $v \cos\theta$, a vazão através da espira é dada por

$$\Phi = (v \cos\theta)A. \tag{23-1}$$

Esta vazão através de uma área é um exemplo de **fluxo**; nessa situação, trata-se de um *fluxo volumétrico*.

Antes de discutir o fluxo associado à eletrostática precisamos escrever a Eq. 23-1 em forma vetorial. Para isso, definimos um *vetor área* $\vec{A}$ como um vetor cujo módulo é igual a uma área (no caso que estamos considerando, a área da espira) e cuja direção é perpendicular ao plano da área (Fig. 23-2*c*). Podemos então escrever a Eq. 23-1 como o produto escalar do vetor velocidade do vento $\vec{v}$ pelo vetor área da espira $\vec{A}$:

$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A}, \tag{23-2}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{A}$.

A palavra "fluxo" vem do latim e pode ser definida como "ato ou modo de fluir". Esse nome faz sentido quando pensamos na passagem do ar pela espira. Entretanto, a Eq. 23-2 pode ser interpretada de forma mais abstrata. Observe que é possível associar um vetor velocidade do vento a cada ponto no interior da espira (Fig. 23-2*d*). Como o conjunto de todos esses vetores é um *campo de velocidades*, podemos interpretar a Eq. 23-2 como uma expressão para o *fluxo do campo de velocidades através da espira*. Nessa interpretação o fluxo não significa a passagem de algo por uma área, mas o produto de uma área pelo campo que existe no interior dessa área.

23-3 | Fluxo de um Campo Elétrico

Considere a Fig. 23-3, que mostra uma superfície gaussiana arbitrária (assimétrica) imersa em um campo elétrico não-uniforme. Vamos dividir a superfície em pequenos quadrados de área ΔA suficientemente pequenos para que a curvatura local da superfície possa ser desprezada e os quadrados possam ser considerados planos. Estes elementos de área podem ser representados por vetores área $\Delta\vec{A}$ cujo módulo é a área ΔA. Todos os vetores $\Delta\vec{A}$ são perpendiculares à superfície gaussiana e apontam para fora da superfície.

Como os quadrados são arbitrariamente pequenos, o campo elétrico $\vec{E}$ pode ser considerado constante no interior de cada quadrado; assim, para cada quadrado, os vetores $\Delta\vec{A}$ e $\vec{E}$ fazem um certo ângulo θ. A Fig. 23-3 mostra ampliações de três desses quadrados e os ângulos θ correspondentes.

Uma definição provisória do fluxo do campo elétrico para a superfície gaussiana da Fig. 23-3 é a seguinte:

$$\Phi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}. \tag{23-3}$$

De acordo com essa equação, devemos examinar cada quadrado da superfície gaussiana, calcular o produto escalar $\vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$ dos vetores $\vec{E}$ e $\Delta\vec{A}$ associados ao quadrado que estamos examinando e somar algebricamente (isto é, levando em conta o sinal) os resultados para todos os quadrados. O valor do produto escalar (positivo, negativo ou nulo) determina se o fluxo através do quadrado é positivo, negativo ou nulo. Quadrados como o quadrado 1 da Fig. 23-3, nos quais $\vec{E}$ aponta para dentro, representam uma contribuição negativa para o somatório da Eq. 23-3. Quadrados como 2, em que $\vec{E}$ é paralelo à superfície, não contribuem para o somatório. Quadrados como 3, em que $\vec{E}$ aponta para fora, representam uma contribuição positiva.

A definição exata do fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é obtida fazendo a área dos quadrados da Fig. 23-3 tender a zero, tornando-se uma área diferencial dA. Nesse caso, os vetores área se tornam vetores diferenciais $d\vec{A}$. O somatório da Eq. 23-3 se torna uma integral e temos, para a definição de fluxo elétrico,

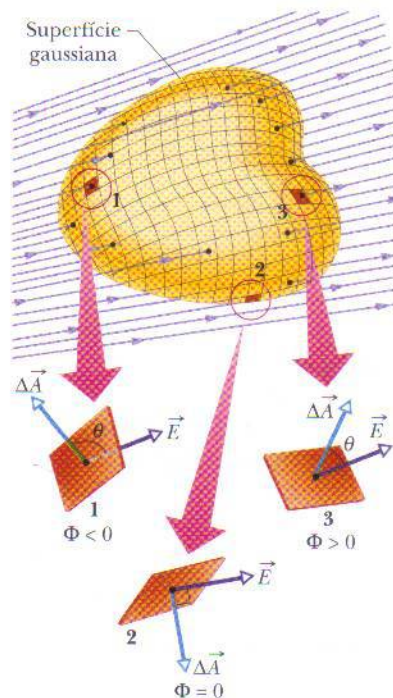



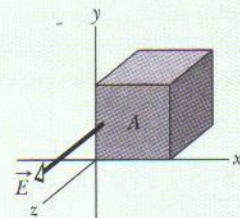
FIG. 23-3 Uma superfície gaussiana de forma arbitrária imersa em um campo elétrico. A superfície é dividida em pequenos quadrados de área ΔA. Os vetores campo elétrico $\vec{E}$ e os vetores área $\Delta\vec{A}$ são mostrados para três quadrados representativos, rotulados como 1, 2 e 3.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(fluxo elétrico através de uma superfície gaussiana).} \tag{23-4}$$

O círculo no sinal de integral indica que a integração deve ser realizada para uma superfície fechada. O fluxo do campo elétrico é um escalar, e sua unidade no SI é o newton-metro quadrado por coulomb ($N \cdot m^2/C$).

Podemos interpretar a Eq. 23-4 da seguinte forma: como vimos, é possível usar a densidade de linhas de campo elétrico que atravessam uma certa região como uma medida da intensidade do campo elétrico nessa região. Mais especificamente, o módulo E do campo elétrico é proporcional ao número de linhas de campo por unidade de área. Assim, o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ da Eq. 23-4 é proporcional ao número de linhas de campo elétrico que passam pela área $d\vec{A}$. Nesse caso, como a integração da Eq. 23-4 é executada para uma superfície gaussiana, que é fechada, vemos que

> O fluxo elétrico através de uma superfície gaussiana é proporcional ao número de linhas de campo elétrico que atravessam a superfície.

TESTE 1 A figura mostra um cubo gaussiano cujas faces têm área A imerso em um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ orientado no sentido positivo do eixo z. Determine, em termos de E e A, o fluxo através (a) da face frontal do cubo (a face situada no plano xy); (b) da face traseira; (c) da face superior; (d) do cubo como um todo.

Exemplo 23-1

A Fig. 23-4 mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cilindro de raio R imersa em um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo Φ do campo elétrico através dessa superfície fechada?

IDÉIA-CHAVE Podemos calcular o fluxo Φ através da superfície gaussiana integrando o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ para toda a superfície.

Cálculos: Podemos realizar a integração escrevendo o fluxo como a soma de três termos: integrais para a base esquerda do cilindro, a, para a superfície lateral do cilindro, b, e para a base direita do cilindro, c. Nesse caso, de acordo com a Eq. 23-4,

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}.\end{aligned} \tag{23-5}$$

Para todos os pontos da base esquerda, o ângulo θ entre $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ é 180° e o módulo E do campo é o mesmo. Assim,

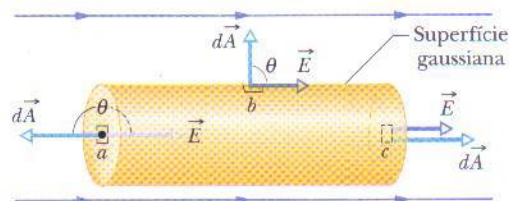



FIG. 23-4 Uma superfície gaussiana cilíndrica, fechada pelos planos das bases, imersa em um campo elétrico uniforme. O eixo do cilindro é paralelo à direção do campo.

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180°)\, dA = -E \int dA = -EA,$$

onde $\int dA$ nos dá a área da base, A $(= \pi R^2)$. Analogamente, na base da direita, onde $\theta = 0$ para todos os pontos,

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0)\, dA = EA.$$

Finalmente, para a superfície lateral do cilindro, onde $\theta = 90°$ para todos os pontos,

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90°)\, dA = 0.$$

Substituindo esses resultados na Eq. 23-5, obtemos:

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esse resultado já era esperado, já que todas as linhas de campo que representam o campo elétrico atravessam a superfície gaussiana, entrando pela base esquerda e saindo pela base direita, o que significa que o fluxo total deve ser nulo.

Exemplo 23-2 Aumente sua capacidade

Um campo elétrico *não-uniforme* dado por $\vec{E} = 3{,}0x\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ atravessa o cubo gaussiano que aparece na Fig. 23-5. (E está expresso em newtons por coulomb e x em metros.) Qual é o fluxo elétrico na face direita, na face esquerda e na face superior do cubo? (As outras faces são consideradas no Exemplo 23-4.)

FIG. 23-5 Um cubo gaussiano, com uma aresta sobre o eixo x, imerso em um campo elétrico não-uniforme.

IDÉIA-CHAVE Podemos calcular o fluxo Φ através de uma superfície integrando o produto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{A}$ para a superfície.

Face direita: O vetor área $\vec{A}$ é sempre perpendicular à superfície e sempre aponta para fora de uma superfície gaussiana. Assim, no caso da face direita do cubo o vetor $d\vec{A}$ aponta no sentido positivo do eixo x. Em termos dos vetores unitários,

$$d\vec{A} = dA\hat{\mathrm{i}}.$$

De acordo com a Eq. 23-4, o fluxo Φ_d através da face direita do cubo é dado por

$$\Phi_d = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int (3{,}0x\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(dA\hat{\mathrm{i}})$$
$$= \int [(3{,}0x)(dA)\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} + (4{,}0)(dA)\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{i}}]$$
$$= \int (3{,}0x\,dA + 0) = 3{,}0\int x\,dA.$$

Deveríamos calcular a integral acima para a face direita, mas observamos que x tem o mesmo valor, 3,0 m, em todos os pontos dessa face. Isso significa que podemos substituir x por esse valor e escrever:

$$\Phi_d = 3{,}0\int (3{,}0)\,dA = 9{,}0\int dA.$$

A integral $\int dA$ nos dá simplesmente a área $A = 4{,}0\ \mathrm{m}^2$ da face direita; assim,

$$\Phi_d = (9{,}0\ \mathrm{N/C})(4{,}0\ \mathrm{m}^2) = 36\ \mathrm{N\cdot m^2/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Face esquerda: O método para calcular o fluxo através da face esquerda é o mesmo que foi usado para a face direita. Apenas duas coisas mudam: (1) o vetor área elementar $d\vec{A}$ agora aponta no sentido negativo do eixo x e, portanto, $d\vec{A} = -dA\hat{\mathrm{i}}$; (2) o termo x agora é igual a 1,0 m. Com essas duas mudanças verificamos que o fluxo Φ_e através da face esquerda é dado por

$$\Phi_e = -12\ \mathrm{N\cdot m^2/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Face superior: Como o vetor área elementar $d\vec{A}$ agora aponta no sentido positivo do eixo y, $d\vec{A} = dA\hat{\mathrm{j}}$. O fluxo Φ_s através da face superior é, portanto,

$$\Phi_s = \int (3{,}0x\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(dA\hat{\mathrm{j}})$$
$$= \int [(3{,}0x)(dA)\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} + (4{,}0)(dA)\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}]$$
$$= \int (0 + 4{,}0\,dA) = 4{,}0\int dA$$
$$= 16\ \mathrm{N\cdot m^2/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

23-4 | Lei de Gauss

A lei de Gauss relaciona o fluxo total Φ de um campo elétrico através de uma superfície fechada (superfície gaussiana) à carga total q_{env} que é *envolvida* por essa superfície. Em notação matemática,

$$\varepsilon_0\Phi = q_{env} \qquad \text{(lei de Gauss).} \qquad (23\text{-}6)$$

Usando a Eq. 23-4, a definição de fluxo, podemos escrever a lei de Gauss na forma

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{env}} \quad \text{(lei de Gauss).} \tag{23-7}$$

As Eqs. 23-6 e 23-7 são válidas apenas se a carga está situada no vácuo ou no ar (que, para efeitos práticos, quase sempre pode ser considerado equivalente ao vácuo). No Capítulo 25 a lei de Gauss será modificada para permitir sua aplicação a materiais como a mica, o óleo e o vidro.

Nas Eqs. 23-6 e 23-7 a carga total q_{env} é a soma algébrica das cargas positivas e negativas *envolvidas* pela superfície gaussiana e pode ser positiva, negativa ou nula. Incluímos o sinal, em vez de usar o valor absoluto da carga envolvida, porque o sinal nos diz alguma coisa a respeito do fluxo total através da superfície gaussiana: se q_{env} é positiva, o fluxo é *para fora*; se q_{env} é negativa, o fluxo é *para dentro*.

A carga do lado de fora da superfície, mesmo que seja muito grande ou esteja muito próxima, não é incluída no termo q_{env} da lei de Gauss. A localização das cargas no interior da superfície de Gauss é irrelevante; as únicas coisas que importam para calcular o lado direito das Eqs. 23-6 e 23-7 são o valor absoluto e o sinal da carga total envolvida. A grandeza $\vec{E}$ do lado esquerdo da Eq. 23-7, por outro lado, é o campo elétrico produzido por *todas* as cargas, tanto as que estão do lado de dentro da superfície de Gauss como as que estão do lado de fora. Isso pode parecer incoerente, mas é preciso ter em mente o que vimos no Exemplo 23-1: A contribuição do campo elétrico produzido por uma carga do lado de fora da superfície gaussiana para o fluxo *através* da superfície é sempre nula, já que o número de linhas de campo que entram na superfície devido a essa carga é igual ao número de linhas que saem.

Vamos aplicar essas idéias à Fig. 23-6, que mostra duas cargas pontuais de mesmo valor absoluto e sinais opostos, e às linhas de campo que descrevem os campos elétricos criados pelas cargas no espaço em torno. A figura mostra quatro superfícies gaussianas vistas de perfil. Vamos discuti-las uma a uma.

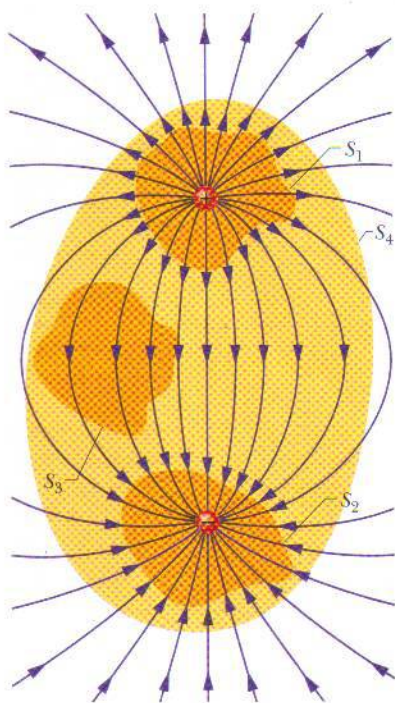



FIG. 23-6 Duas cargas pontuais, de mesmo valor absoluto e sinais opostos, e as linhas de campo que representam o campo elétrico. Quatro superfícies gaussianas são mostradas vistas de perfil. A superfície S_1 envolve a carga positiva. A superfície S_2 envolve a carga negativa. A superfície S_3 não envolve nenhuma carga. A superfície S_4 envolve as duas cargas.

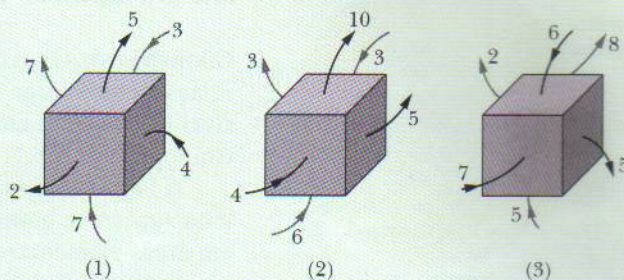
Superfície S_1. O campo elétrico aponta para fora em todos os pontos da superfície; assim, o fluxo do campo elétrico através da superfície é positivo e, de acordo com a lei de Gauss, a carga envolvida pela superfície também é positiva. (Em outras palavras, se Φ é positivo na Eq. 23-6, q_{env} também deve ser positiva.)

Superfície S_2. O campo elétrico aponta para dentro em todos os pontos da superfície; assim, o fluxo do campo elétrico é negativo e, portanto, de acordo com a lei de Gauss, a carga envolvida também é negativa.

Superfície S_3. De acordo com a lei de Gauss, como a superfície não envolve nenhuma carga o fluxo do campo elétrico através da superfície é nulo. Isso é razoável, já que todas as linhas de campo que entram na superfície pela parte de cima saem pela parte de baixo.

Superfície S_4. A carga *total* envolvida pela superfície é nula, já que as cargas positiva e negativa envolvidas pela superfície têm o mesmo valor absoluto. Assim, de acordo com a lei de Gauss o fluxo do campo elétrico através dessa superfície deve ser zero. Isso é razoável, já que o número de linhas de campo que entram na superfície pela parte de baixo é igual ao número de linhas de campo que saem pela parte de cima.

O que aconteceria se colocássemos uma carga gigantesca Q nas proximidades da superfície S_4 da Fig. 23-6? A configuração de linhas de campo certamente seria modificada, mas o fluxo total através das quatro superfícies gaussianas continuaria o mesmo. Isso é uma conseqüência do fato de que todas as linhas de campo produzidas pela carga Q atravessariam totalmente as quatro superfícies gaussianas sem contribuir para o fluxo total. O valor de Q não apareceria de nenhuma forma na lei de Gauss, já que Q estaria do lado de fora das quatro superfícies gaussianas que estamos discutindo.

TESTE 2 A figura mostra três situações nas quais um cubo gaussiano está imerso em um campo elétrico. As setas e valores indicam a direção das linhas de campo e o módulo (em $N \cdot m^2/C$) do fluxo que atravessa a seis faces de cada cubo. (As setas mais claras estão associadas às faces ocultas.) Em que situação o cubo envolve (a) uma carga total positiva; (b) uma carga total negativa; (c) uma carga total nula?

Exemplo 23-3

A Figura 23-7 mostra cinco pedaços de plástico eletricamente carregados e uma moeda neutra. A figura mostra também uma superfície gaussiana S vista de perfil. Qual é o fluxo elétrico que atravessa a superfície S se $q_1 = q_4 = +3{,}1$ nC, $q_2 = q_5 = -5{,}9$ nC e $q_3 = -3{,}1$ nC?

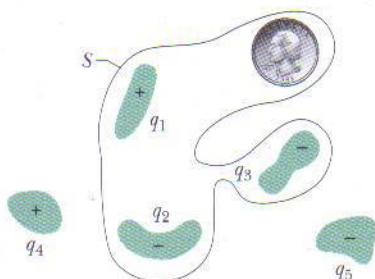



FIG. 23-7 Cinco pedaços de plástico eletricamente carregados e uma moeda neutra. Uma superfície gaussiana, vista de perfil, envolve três dos pedaços de plástico e a moeda.

IDÉIA-CHAVE O fluxo *total* Φ que atravessa a superfície S depende da carga *total* q_{env} envolvida pela superfície.

Cálculo: A moeda não contribui para Φ porque é neutra e, portanto, contém quantidades iguais de cargas positivas e negativas. As cargas q_4 e q_5 não contribuem porque estão do lado se fora da superfície S. Assim, q_{env} é igual a $q_1 + q_2 + q_3$, e a Eq. 23-6 nos dá

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0} = \frac{+3{,}1 \times 10^{-9}\,\text{C} - 5{,}9 \times 10^{-9}\,\text{C} - 3{,}1 \times 10^{-9}\,\text{C}}{8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} = -670\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}. \quad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo indica que o fluxo total que atravessa a superfície é para dentro e, portanto, a carga total envolvida pela superfície é negativa.

Exemplo 23-4 Aumente sua capacidade

Qual é a carga total envolvida pelo cubo gaussiano do Exemplo 23-2 e da Fig. 23-5?

IDÉIA-CHAVE A carga total envolvida por uma superfície fechada (real ou matemática) está relacionada ao fluxo total do campo elétrico através da superfície pela lei de Gauss, dada pela Eq. 23-6 ($\varepsilon_0\Phi = q_{env}$).

Fluxo: Para aplicar a Eq. 23-6 precisamos conhecer o fluxo através das seis faces do cubo. Já conhecemos o fluxo através da face direita ($\Phi_d = 36\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, da face esquerda ($\Phi_e = -12\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$) e da face superior ($\Phi_s = 16\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$).

No caso da face inferior o cálculo é o mesmo da face superior, *exceto* pelo fato de que a área elementar $d\vec{A}$ agora aponta para baixo ao longo do eixo y (lembre-se de que o sentido de $d\vec{A}$ é sempre *para fora* da superfície gaussiana). Assim, $d\vec{A} = -dA\hat{\mathrm{j}}$ e

$$\Phi_b = -16\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

No caso da fase dianteira, $d\vec{A} = dA\hat{\mathrm{k}}$; no caso da face traseira, $d\vec{A} = -dA\hat{\mathrm{k}}$. Quando calculamos o produto escalar do campo elétrico dado $\vec{E} = 3{,}0x\hat{\mathrm{i}}\ \ 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ por essas duas expressões de $d\vec{A}$ o resultado é nulo, o que significa que o fluxo através dessas faces é zero. Podemos agora calcular o fluxo total através das seis faces do cubo:

$$\Phi = (36 - 12 + 16 - 16 + 0 + 0)\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C} = 24\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}.$$

Carga envolvida: Em seguida, usamos a lei de Gauss para calcular a carga q_{env} envolvida pelo cubo:

$$q_{env} = \varepsilon_0\Phi = (8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(24\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) = 2{,}1 \times 10^{-10}\,\text{C}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a carga *total* envolvida pelo cubo é positiva.

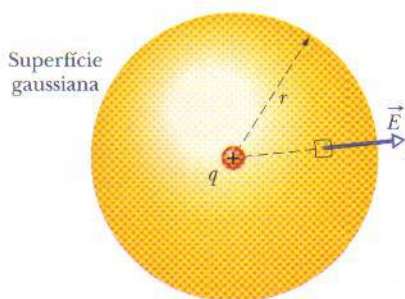



FIG. 23-8 Uma superfície gaussiana esférica com centro em uma carga pontual q.

23-5 | Lei de Gauss e Lei de Coulomb

Como a lei de Gauss e a lei de Coulomb são formas diferentes de descrever a mesma relação entre carga elétrica e campo elétrico em situações estáticas, deve ser possível demonstrar uma das leis a partir da outra. Vamos agora demonstrar a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss e algumas considerações de simetria.

A Fig. 23-8 mostra uma carga pontual positiva q em torno da qual foi desenhada uma superfície gaussiana esférica concêntrica de raio r. Vamos dividir a superfície em áreas elementares dA. Por definição, o vetor área $d\vec{A}$ em qualquer ponto é perpendicular à superfície e dirigido para fora. Pela simetria da situação sabemos que o campo elétrico $\vec{E}$ também é perpendicular à superfície e dirigido para fora. Assim, como o ângulo θ entre $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ é zero, podemos escrever a lei de Gauss (Eq. 23-7) na forma

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q_{\text{env}}, \tag{23-8}$$

onde $q_{\text{env}} = q$. Embora E varie radialmente com a distância, tem o mesmo valor em todos os pontos da superfície esférica. Como a integral da Eq. 23-8 é calculada nessa superfície, E é constante na integração e pode ser colocado do lado de fora do sinal de integral. Isso nos dá

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q. \tag{23-9}$$

A integral agora é simplesmente a soma de todos os elementos de área dA da esfera e, portanto, é igual à área da superfície da esfera, $4\pi r^2$. Fazendo essa substituição, temos:

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

ou

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}. \tag{23-10}$$

Esta é exatamente a Eq. 22-3, que foi obtida usando a lei de Coulomb.

TESTE 3 Um certo fluxo Φ_i atravessa uma esfera gaussiana de raio r que envolve uma única partícula carregada. Suponha que a esfera gaussiana seja substituída (a) por uma esfera gaussiana maior, (b) por um cubo gaussiano de lado r e (c) por um cubo gaussiano de lado $2r$. Em cada caso, o fluxo total através da nova superfície gaussiana é maior, menor ou igual a Φ_i?

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Escolha de uma Superfície Gaussiana* Como a demonstração da Eq. 23-10 usando a lei de Gauss serve de aquecimento para o cálculo de campos elétricos produzidos por outras configurações de cargas mais complexas, vamos repassar o processo utilizado. Começamos com uma carga positiva dada q; sabemos que as linhas de campo elétrico se estendem radialmente para fora a partir de q, em um padrão de simetria esférica.

Para determinar o módulo E do campo elétrico a uma distância r usando a lei de Gauss (Eq. 23-7), tivemos que envolver a carga q com uma superfície gaussiana que passasse por um ponto situado a uma distância r de q. Em seguida, somamos, por integração, os valores de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ para toda a superfície gaussiana. Para tornar essa integração o mais simples possível escolhemos uma superfície gaussiana esférica (isto é, uma superfície com a mesma simetria do campo elétrico). Essa escolha resultou em três simplificações: (1) o produto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ se tornou mais simples, já que em todos os pontos da superfície gaussiana o ângulo entre $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ é zero; (2) como o módulo do campo elétrico, E, é o mesmo em todos os pontos da superfície gaussiana, ele pôde ser colocado de fora do sinal de integral; (3) o resultado foi uma integral muito simples, a soma dos elementos de área para uma esfera, que sabemos ser igual a $4\pi r^2$.

Observe que a lei de Gauss é válida para qualquer forma de superfície gaussiana. Entretanto, se tivéssemos escolhido, digamos, uma superfície gaussiana cúbica as três simplificações mencionadas desapareceriam e a integração de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ para a superfície cúbica teria sido muito difícil. A idéia é escolher a superfície gaussiana que facilite ao máximo a integração associada à lei de Gauss.

23-6 | Um Condutor Carregado

A lei de Gauss permite demonstrar um teorema importante a respeito dos condutores:

> Se uma carga em excesso é introduzida em um condutor, a carga se concentra na superfície do condutor; o interior do condutor continua a ser neutro.

Este comportamento dos condutores é razoável, já que cargas de mesmo sinal se repelem. A idéia é que ao se acumularem na superfície as cargas em excesso se mantêm afastadas o máximo possível umas das outras. Podemos usar a lei de Gauss para demonstrar matematicamente essa afirmação.

A Fig. 23-9*a* mostra uma vista de perfil de um pedaço de cobre, pendurado por um fio isolante, com uma carga em excesso q. Colocamos uma superfície gaussiana logo abaixo da superfície do condutor.

O campo elétrico no interior do condutor deve ser nulo; se não fosse assim o campo exerceria uma força sobre os elétrons de condução (elétrons livres), que estão sempre presentes em um condutor, e isso produziria uma corrente elétrica. (Em outras palavras, haveria um movimento de cargas no interior do condutor.) Como não pode haver uma corrente perpétua em um condutor que não faz parte de um circuito elétrico, o campo elétrico deve ser nulo.

(Um campo elétrico interno *existe* durante um certo tempo, enquanto o condutor está sendo carregado. Entretanto, a carga adicional logo se distribui de tal forma que o campo elétrico interno se anula e as cargas param de se mover. Quando isso acontece, dizemos que as cargas estão em *equilíbrio eletrostático*.)

Se $\vec{E}$ é zero em todos os pontos do interior do pedaço de cobre, deve ser zero em todos os pontos da superfície gaussiana, já que a superfície escolhida, embora esteja próxima da superfície, fica no interior do pedaço de cobre. Isso significa que o fluxo que atravessa a superfície gaussiana também é zero. De acordo com a lei de Gauss, portanto, a carga total envolvida pela superfície de Gauss deve ser nula. Como o excesso de cargas não está no interior da superfície de Gauss, só pode estar na superfície do condutor.

FIG. 23-9 (*a*) Um pedaço de cobre com uma carga q pendurado por um fio não-condutor. Uma superfície gaussiana é colocada logo abaixo da superfície do condutor. (*b*) O pedaço de cobre agora possui uma cavidade. Uma superfície gaussiana é colocada em torno da cavidade, perto da superfície, no interior do condutor.

Um Condutor Carregado com uma Cavidade Interna

A Fig. 23-9*b* mostra o mesmo condutor, mas agora com uma cavidade interna. É talvez razoável supor que quando removemos material eletricamente neutro para formar a cavidade não mudamos a distribuição de cargas nem de campos elétricos, que continua a ser a mesma da Fig. 23-9*a*. Mais uma vez, vamos usar a lei de Gauss para demonstrar matematicamente essa afirmação.

Colocamos uma superfície gaussiana envolvendo a cavidade, próximo da superfície, mas no interior do condutor. Como $\vec{E} = 0$ no interior do condutor, o fluxo através dessa superfície também é nulo. Assim, a superfície não pode envolver nenhuma carga. A conclusão é que não existe carga em excesso na superfície da cavidade; toda a carga em excesso permanece na superfície externa do condutor, como na Fig. 23-9*a*.

Remoção do Condutor

Suponha que, por um passe de mágica, fosse possível "congelar" as cargas em excesso na superfície do condutor, talvez revestindo-as com uma fina camada de plástico, e que o condutor pudesse ser removido totalmente. Isso seria equivalente a aumentar a cavidade da Fig. 23-9*b* até que ocupasse todo o condutor. O campo elétrico não sofreria nenhuma alteração: continuaria a ser nulo no interior da fina camada de cargas e permaneceria o mesmo em todos os pontos do exterior. Isso mostra que o campo elétrico é criado pelas cargas, e não pelo condutor. O condutor constitui apenas um veículo para que as cargas assumam suas posições de equilíbrio.

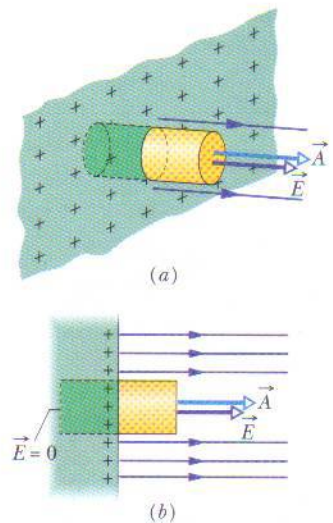



FIG. 23-10 (*a*) Vista em perspectiva e (*b*) vista de perfil de uma pequena parte de um condutor de grande extensão com uma carga positiva na superfície. Uma superfície gaussiana cilíndrica, engastada perpendicularmente na superfície, envolve parte das cargas. Linhas de campo elétrico atravessam a base do cilindro que está do lado de fora do condutor, mas não a base que está do lado de dentro. A base que está do lado de fora tem área A e o vetor área é $\vec{A}$.

O Campo Elétrico Externo

Vimos que as cargas em excesso de um condutor isolado se concentram na superfície do condutor. Entretanto, a menos que o condutor seja esférico as cargas não se distribuem de modo uniforme. Em outras palavras, a densidade de cargas superficiais σ (carga por unidade de área) varia ao longo da superfície de um condutor não-esférico. Em geral, essa variação torna muito difícil determinar o campo elétrico criado por cargas superficiais.

Entretanto, o campo elétrico próximo à superfície de um condutor pode ser determinado com facilidade usando a lei de Gauss. Para isso, consideramos uma região da superfície suficientemente pequena para que possamos desprezar a curvatura e usamos um plano para representar a região. Em seguida, imaginamos um pequeno cilindro gaussiano engastado na superfície, como na Fig. 23-10: Uma das bases está do lado de dentro do condutor, a outra base está do lado de fora e o eixo do cilindro é perpendicular à superfície do condutor.

O campo elétrico $\vec{E}$ na superfície e logo acima da superfície também é perpendicular à superfície. Se não fosse, teria uma componente paralela à superfície do condutor que exerceria forças sobre as cargas superficiais, fazendo com que se movessem. Este movimento, porém, violaria nossa suposição implícita de que estamos lidando com um corpo em equilíbrio eletrostático. Assim, $\vec{E}$ é perpendicular à superfície do condutor.

Vamos agora calcular o fluxo através da superfície gaussiana. Não há fluxo através da base que se encontra dentro do condutor, já que nesta região o campo elétrico é nulo. Também não há fluxo através da superfície lateral do cilindro, pois do lado de dentro do condutor o campo é nulo e do lado de fora o campo elétrico é paralelo à superfície lateral do cilindro. Assim, o único fluxo que atravessa a superfície gaussiana é o que atravessa a base que se encontra fora do condutor, onde $\vec{E}$ é perpendicular ao plano da base. Supomos que a área da base, A, é suficientemente pequena para que o módulo E do campo seja constante em toda a base. Nesse caso, o fluxo através da base do cilindro é EA e este é o fluxo total Φ que atravessa a superfície gaussiana.

A carga q_{env} envolvida pela superfície gaussiana está na superfície do condutor e ocupa uma área A. Se σ é a carga por unidade de área, q_{env} é igual a σA. Quando substituímos q_{env} por σA e Φ por EA, a lei de Gauss (Eq. 23-6) se torna

$$\varepsilon_0 EA = \sigma A,$$

e, portanto,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(superfície condutora).} \qquad (23\text{-}11)$$

Assim, o módulo do campo elétrico logo acima da superfície de um condutor é proporcional à densidade de cargas superficiais do condutor. Se a carga do condutor é positiva, o campo elétrico aponta para fora do condutor, como na Fig. 23-10; se é negativa, o campo elétrico aponta para dentro do condutor.

As linhas de campo da Fig. 23-10 devem terminar em cargas negativas externas ao condutor. Se aproximamos essas cargas do condutor a densidade de cargas na superfície do condutor é modificada, o que também acontece com o módulo do campo elétrico. Entretanto, a relação entre σ e E continuará a ser dada pela Eq. 23-11.

Exemplo 23-5

A Fig. 23-11a mostra uma seção reta de uma casca metálica esférica de raio interno R. Uma carga pontual de $-5{,}0$ μC está situada a uma distância $R/2$ do centro da casca. Se a casca é eletricamente neutra, quais são as cargas (induzidas) na superfície interna e na superfície interna? Essas cargas estão distribuídas uniformemente? Qual é a configuração do campo elétrico do lado de dentro e do lado de fora da casca?

IDÉIA-CHAVE A Fig. 23-11*b* mostra uma seção reta de uma superfície gaussiana esférica no interior do metal, perto da superfície interna da casca. O campo elétrico deve ser nulo no interior do metal (e, portanto, na superfície gaussiana, que está no interior do metal). Isso significa que o fluxo elétrico através da superfície gaussiana também deve ser nulo. De acordo com a lei de Gauss, portanto, a carga *total* envolvida pela superfície gaussiana deve ser nula.

Raciocínio: Como existe uma carga pontual de $-5{,}0\ \mu C$ no interior da casca, deve haver uma carga de $+5{,}0\ \mu C$ na superfície interna da casca para que a carga envolvida seja zero. Se a carga pontual estivesse no centro de curvatura da casca as cargas positivas estariam distribuídas uniformemente ao longo da superfície interna da casca. Como, porém, a carga pontual está fora do centro a distribuição de cargas positivas é assimétrica, como mostra a Fig. 23-11*b*, já que as cargas positivas tendem a se concentrar na parte da superfície interna que está mais próxima da carga pontual (que é negativa).

Como a casca é eletricamente neutra, para que a superfície interna tenha uma carga de $+5{,}0\ \mu C$ é preciso que elétrons, com uma carga total de $-5{,}0\ \mu C$, sejam transferidos da superfície interna para a superfície externa, onde se distribuem uniformemente, como mostra a Fig. 23-11*b*. A distribuição de cargas negativas é uniforme porque a casca é esférica e porque a distribuição assimétrica de cargas positivas na superfície interna não pode produzir um campo elétrico no interior do metal para afetar a distribuição de cargas na superfície externa.

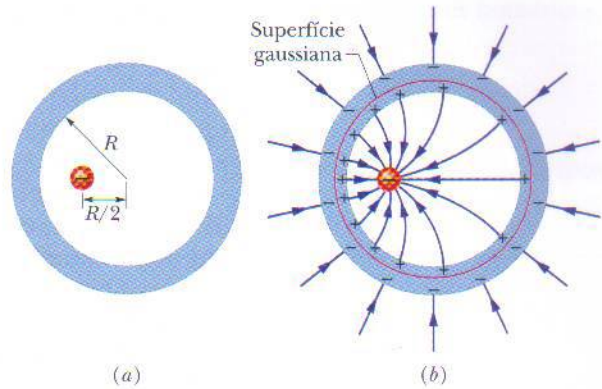



FIG. 23-11 (*a*) Uma carga pontual negativa está situada no interior de uma casca metálica esférica eletricamente neutra. (*b*) Em conseqüência, cargas positivas se distribuem de modo assimétrico na superfície interna da casca, e uma quantidade igual de cargas negativas se distribui uniformemente na superfície externa.

A Fig. 23-11*b* mostra também as linhas de campo do lado de dentro e do lado de fora da casca. Todas as linhas de campo interceptam perpendicularmente a casca e convergem para a carga pontual. Do lado de dentro da casca a configuração de linhas de campo é assimétrica por causa da assimetria da distribuição de cargas positivas. Do lado de fora o padrão é igual ao que teríamos se a carga pontual estivesse no centro de curvatura e a casca não existisse. Na verdade, a configuração seria a mesma para qualquer posição da carga pontual no interior da casca.

23-7 | Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Cilíndrica

A Fig. 23-12 mostra uma parte de uma barra de plástico cilíndrica de comprimento infinito com uma densidade linear uniforme de cargas positivas λ. Vamos obter uma expressão para o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ a uma distância r do eixo da barra.

Para facilitar os cálculos, a superfície gaussiana escolhida deve ter a mesma simetria do problema, que no caso é cilíndrica. Assim, escolhemos um cilindro circular de raio r e altura h, coaxial com a barra. Como a superfície gaussiana deve ser fechada, incluímos duas bases como parte da superfície.

Imagine agora que, enquanto você não está olhando, alguém faça girar a barra de plástico de um ângulo qualquer em torno do eixo ou imprima à barra uma rotação de 180° em torno do centro. Nos dois casos, você não notaria nenhuma mudança. Concluímos dessa simetria que a única direção especificada de forma definida neste problema é ao longo de uma reta radial. Assim, em todos os pontos da parte lateral da superfície gaussiana $\vec{E}$ deve ter o mesmo módulo E e (no caso de uma barra carregada positivamente) apontar para longe da barra.

FIG. 23-12 Uma superfície gaussiana cilíndrica envolvendo parte de uma barra de plástico cilíndrica de comprimento infinito com uma densidade linear uniforme de cargas positivas.

Como a circunferência do cilindro é $2\pi r$ e a altura é h, a área A da superfície lateral é $2\pi rh$. O fluxo de $\vec{E}$ através dessa superfície é, portanto,

$$\Phi = EA\cos\theta = E(2\pi rh)\cos 0 = E(2\pi rh).$$

O fluxo através das bases do cilindro é zero porque $\vec{E}$ é paralelo aos planos das bases.

Como a carga envolvida pela superfície gaussiana é λh, temos, de acordo com a lei de Gauss,

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{env}},$$

se reduz a

$$\varepsilon_0 E(2\pi r h) = \lambda h,$$

o que nos dá

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(linha de cargas).} \tag{23-12}$$

Este é o campo elétrico produzido por uma reta de cargas infinitamente longa em um ponto situado a uma distância r da reta. O sentido de $\vec{E}$ é para longe da reta, se a carga é positiva, e na direção da reta, se a carga é negativa. A Eq. 23-12 também fornece o valor aproximado do campo produzido por um *segmento de reta* de cargas em pontos não muito próximos das extremidades (em comparação com a distância entre o ponto e o segmento de reta).

Exemplo 23-6

Descarga para cima em uma tempestade elétrica. A mulher da Fig. 23-13 estava em uma plataforma de observação do Sequoia National Park quando uma grande nuvem de tempestade passou no céu. Muitos elétrons de condução do corpo da mulher foram repelidos para a terra pela base da nuvem, negativamente carregada (Fig. 23-14*a*), o que deixou o corpo da mulher positivamente carregado. Observando a fotografia da Fig. 23-13 é possível concluir que o corpo da mulher está carregado, já que os fios de cabelo se repelem mutuamente e se projetam para cima, ao longo das linhas de campo elétrico produzidas pela carga do corpo.

A mulher não foi atingida por um relâmpago mas estava correndo um sério risco, pois o campo elétrico estava a ponto de causar uma ruptura dielétrica no ar à sua volta. Essa ruptura teria ocorrido ao longo de uma trajetória ascendente, no que é chamado de *descarga para cima*. Na foto que abre este capítulo pode-se ver uma descarga para cima na copa de uma árvore. Uma descarga para cima é perigosa, porque a ionização que produz nas moléculas do ar libera um grande número de elétrons. Se a mulher da Fig. 23-13 tivesse provocado uma descarga para cima os elétrons livres do ar teriam sido atraídos para o seu corpo (Fig. 23-14*b*), produzindo um choque possivelmente fatal.

Vamos modelar o corpo da mulher como um cilindro vertical estreito de altura L = 1,8 m e raio R = 0,10 m (Fig. 23-14*c*). Suponha que a carga Q esteja uniformemente distribuída ao longo do cilindro e que a ruptura dielétrica ocorra quando o módulo do campo elétrico exceder o valor crítico E_c = 2,4 MN/C. Para que valor de Q o ar em volta da mulher está a ponto de sofrer uma ruptura dielétrica?

FIG. 23-13 Uma nuvem de tempestade deixou esta mulher positivamente carregada. *(Cortesia da NOAA)*

IDÉIA-CHAVE Como $R \ll L$, podemos aproximar a distribuição de cargas por uma linha comprida de cargas. Além disso, como estamos supondo que a distribuição de cargas é uniforme o módulo do campo elétrico é dado aproximadamente pela Eq. 23-12 ($E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$).

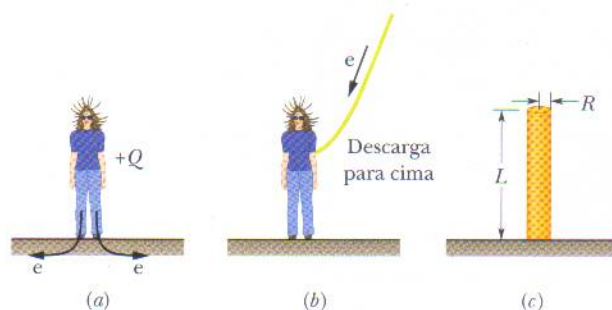



FIG. 23-14 (*a*) Muitos elétrons de condução do corpo da mulher foram repelidos para a terra pela base da nuvem, negativamente carregada, o que deixou o corpo positivamente carregado. (*b*) Em uma descarga para cima o ar sofre uma ruptura dielétrica, o que permite que elétrons livres no ar sejam atraídos para o corpo da mulher. (*c*) O corpo da mulher é representado por um cilindro.

Cálculos: Substituindo o campo elétrico E pelo valor crítico E_c, a distância radial r pelo raio do cilindro R e a densidade linear de cargas λ pela razão Q/L, temos:

$$E_c = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 R},$$

ou $$Q = 2\pi\varepsilon_0 RLE_c.$$

Substituindo as constantes por seus valores numéricos, temos

$$Q = (2\pi)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0{,}10\ \text{m}) \times (1{,}8\ \text{m})(2{,}4 \times 10^6\ \text{N/C})$$
$$= 2{,}402 \times 10^{-5}\ \text{C} \approx 24\mu\text{C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

23-8 | Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Planar

Placa Não-condutora

A Fig. 23-15 mostra uma parte de uma placa fina, infinita, não-condutora, com uma densidade superficial de cargas positivas σ. Uma folha de plástico, com uma das superfícies uniformemente carregada, pode ser um bom modelo. Vamos calcular o campo elétrico $\vec{E}$ a uma distância r da placa.

Uma superfície gaussiana adequada para esse tipo de problema é um cilindro com o eixo perpendicular à placa e com uma base de cada lado da placa, como mostra a figura. Por simetria, $\vec{E}$ deve ser perpendicular à placa e, portanto, às bases do cilindro. Além disso, como a carga é positiva $\vec{E}$ deve apontar *para longe* da placa e, portanto, as linhas de campo elétrico atravessam as duas bases do cilindro no sentido de dentro para fora. Como as linhas de campo são paralelas à superfície lateral do cilindro, o produto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ é nulo nessa parte da superfície gaussiana. Assim, $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ é igual a EdA nas bases do cilindro e é igual a zero na superfície lateral. Nesse caso, a lei de Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{env}},$$

se torna $$\varepsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

onde σA é a carga envolvida pela superfície gaussiana. Isso nos dá

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(placa de cargas).} \qquad (23\text{-}13)$$

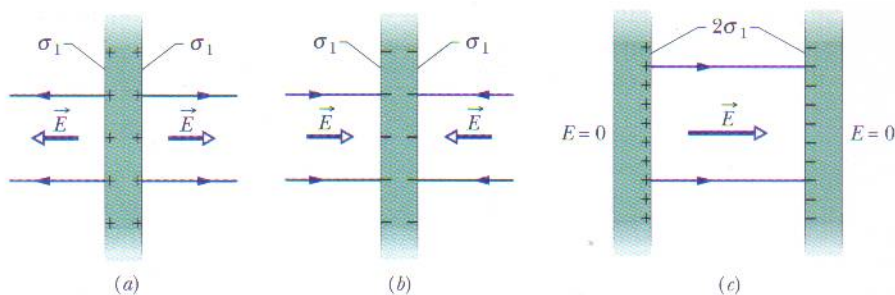
Como estamos considerando uma placa infinita com uma densidade de cargas uniforme, esse resultado é válido para qualquer ponto que se encontre a uma distância finita da placa. A Eq. 23-13 é igual à Eq. 22-27, que foi obtida por integração das componentes do campo elétrico produzido por elementos de carga. (Volte à Seção 22-7 e reveja o processo difícil e trabalhoso de integração; note como foi muito mais fácil obter o resultado usando a lei de Gauss. Esta é uma boa razão para dedicarmos um capítulo inteiro a essa lei; no caso de muitas distribuições simétricas de cargas é muito mais fácil aplicar a lei de Gauss do que integrar as componentes do campo elétrico.)

FIG. 23-15 (*a*) Vista em perspectiva e (*b*) vista de perfil de uma pequena parte de uma placa de grande extensão com uma carga positiva na superfície. Uma superfície gaussiana cilíndrica, engastada perpendicularmente na superfície, envolve parte das cargas.

Duas Placas Condutoras

A Fig. 23-16*a* mostra uma vista de perfil de uma placa condutora, fina, infinita, com um excesso de cargas positivas. Como vimos na Seção 23-6, essa carga em excesso está na superfície da placa. Como a placa é muito fina e muito extensa, podemos supor que praticamente toda a carga em excesso se encontra nas duas faces maiores da placa.

Se não existe um campo elétrico externo para forçar as cargas positivas a assumirem uma certa distribuição, as cargas se distribuem uniformemente nas duas faces

FIG. 23-16 (*a*) Uma placa condutora, fina, infinita, com um excesso de cargas positivas. (*b*) Uma placa do mesmo tipo com um excesso de cargas negativas. (*c*) As duas placas colocadas lado a lado.

com uma densidade superficial de cargas σ_1. De acordo com a Eq. 23-11, essas cargas criam nas proximidades da superfície um campo elétrico de módulo $E = \sigma_1/\varepsilon_0$. Como a carga em excesso é positiva, o campo aponta para longe da placa.

A Fig. 23-16*b* mostra uma placa do mesmo tipo com um excesso de cargas negativas e uma densidade superficial de cargas com o mesmo valor absoluto σ_1. A única diferença é que agora o campo aponta na direção da placa.

Suponha que as placas das Figs. 23-16*a* e *b* sejam colocadas lado a lado (Fig. 23-16*c*). Como as placas são condutoras, quando as aproximamos as cargas em excesso de uma placa atraem as cargas em excesso da outra, e todas as cargas em excesso se concentram nas superfícies internas das placas, como mostra a Fig. 23-16*c*. Como existe agora uma quantidade de cargas duas vezes maior nas superfícies internas, a nova densidade superficial de cargas (que vamos chamar de σ) nas faces internas é $2\sigma_1$. Assim, o módulo do campo elétrico em qualquer ponto entre as placas é dado por

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{23-14}$$

Este campo aponta para longe da placa positiva e na direção da placa negativa. Como não existe excesso de cargas nas faces externas, o campo elétrico do lado de fora das placas é zero.

Como as cargas das placas se moveram quando as placas foram aproximadas, a Fig. 23-16*c* *não* é a superposição das Figs. 23-16*a* e *b*; em outras palavras, a distribuição de cargas no sistema de duas placas não é simplesmente a soma das distribuições de cargas das placas isoladas.

O leitor deve estar se perguntando por que nos demos ao trabalho de discutir situações tão pouco realistas como os campos produzidos por uma linha infinita de cargas, uma placa infinita de cargas e um par de placas infinitas de cargas. Uma razão é que é muito fácil analisar essas situações usando a lei de Gauss. Uma razão mais importante é que a análise de situações "infinitas" permite obter boas aproximações para problemas reais. Assim, a Eq. 23-13 vale também para uma placa não-condutora finita, contanto que estejamos lidando com pontos próximos da placa e razoavelmente distantes das bordas. A Eq. 23-14 se aplica a um par de placas condutoras finitas, contanto que não estejamos lidando com pontos muito próximos das bordas.

O problema das bordas de uma placa, e o motivo pelo qual procuramos, na medida do possível, nos manter afastados delas, é que perto de uma borda não podemos usar a simetria planar para determinar as expressões dos campos. Perto da borda as linhas de campo são curvas (é o chamado *efeito de borda*), e os campos elétricos são muito difíceis de expressar matematicamente.

Exemplo 23-7

A Fig. 23-17*a* mostra partes de duas placas de grande extensão, paralelas, não-condutoras, ambas com uma carga uniforme de um dos lados. Os valores das densidades superficiais de cargas são $\sigma_{(+)} = 6{,}8\ \mu\text{C/m}^2$ para a placa positivamente carregada e $\sigma_{(-)} = 4{,}3\ \mu\text{C/m}^2$ para a placa negativamente carregada.

Determine o campo elétrico $\vec{E}$ (a) à esquerda das placas; (b) entre as placas; (c) à direita das placas.

IDÉIA-CHAVE Como as cargas estão fixas (as placas são não-condutoras), podemos determinar os campos elétricos produzidos pelas placas da Fig. 23-17*a* (1) calculando o campo produzido pela primeira placa como se a segunda não existisse e vice-versa, e somando algebricamente os resultados. (Não há necessidade de usar somas vetoriais porque os campos são paralelos.)

Cálculos: Em qualquer ponto o campo elétrico $\vec{E}_{(+)}$ produzido pela placa positiva aponta *para longe* da placa e, de acordo com a Eq. 23-13, tem um módulo dado por

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} = \frac{6{,}8 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}}{(2)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})}$$
$$= 3{,}84 \times 10^5\ \mathrm{N/C}.$$

Analogamente, em qualquer ponto o campo elétrico $\vec{E}_{(-)}$ produzido pela placa negativa aponta *na direção* da placa e tem um módulo dado por

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} = \frac{4{,}3 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}}{(2)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})}$$
$$= 2{,}43 \times 10^5\ \mathrm{N/C}.$$

A Fig. 23-17*b* mostra os campos criados pelas placas à esquerda das placas (E), entre as placas (C) e à direita das placas (D).

Os campos resultantes nas três regiões podem ser obtidos usando o princípio de superposição. À esquerda, o módulo do campo é

$$E_E = E_{(+)} - E_{(-)}$$
$$= 3{,}84 \times 10^5\ \mathrm{N/C} - 2{,}43 \times 10^5\ \mathrm{N/C}$$
$$= 1{,}4 \times 10^5\ \mathrm{N/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como $E_{(+)}$ é maior que $E_{(-)}$, o campo elétrico total $\vec{E}_E$ nessa região aponta para a esquerda, como mostra a Fig. 23-17*c*. À direita das placas o campo elétrico $\vec{E}_D$ tem o mesmo módulo, mas aponta para a direita, como mostra a Fig. 23-17*c*.

Entre as placas os dois campos se somam, e temos

$$E_C = E_{(+)} + E_{(-)}$$
$$= 3{,}84 \times 10^5\ \mathrm{N/C} + 2{,}43 \times 10^5\ \mathrm{N/C}$$
$$= 6{,}3 \times 10^5\ \mathrm{N/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O campo elétrico $\vec{E}_C$ aponta para a direita.

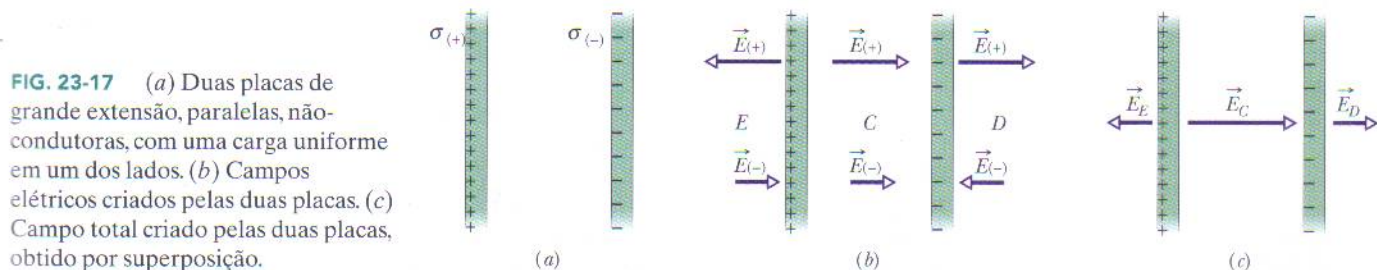



FIG. 23-17 (*a*) Duas placas de grande extensão, paralelas, não-condutoras, com uma carga uniforme em um dos lados. (*b*) Campos elétricos criados pelas duas placas. (*c*) Campo total criado pelas duas placas, obtido por superposição.

23-9 | Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Esférica

Vamos agora usar a lei de Gauss para demonstrar os dois teoremas das cascas que foram apresentados na Seção 21-4:

Uma casca uniforme de cargas atrai ou repele uma partícula carregada situada do lado de fora da casca como se toda a carga da casca estivesse situada no centro.

Se uma partícula carregada está situada no interior de uma casca uniforme de cargas a casca não exerce nenhuma força eletrostática sobre a partícula.

FIG. 23-18 Vista de perfil de uma casca esférica fina, uniformemente carregada, com uma carga total q. Duas superfícies gaussianas, S_1 e S_2, também são mostradas. A superfície S_2 envolve a casca e a superfície S_1 envolve apenas a cavidade vazia que existe no interior da casca.

A Fig. 23-18 mostra uma casca esférica carregada de carga total q e raio R e duas superfícies gaussianas concêntricas, S_1 e S_2. Se seguirmos o método da Seção 23-5 e aplicarmos a lei de Gauss à superfície S_2, para a qual $r \geq R$, o resultado é o seguinte:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(casca esférica, campo em } r \geq R). \qquad (23\text{-}15)$$

Este campo é igual ao que seria criado por uma carga pontual q localizada no centro da casca. Assim, a força produzida por uma casca de carga q sobre uma partícula carregada localizada do lado de fora da casca é igual à força produzida por uma par-

FIG. 23-19 Os pontos representam uma distribuição de cargas fixas com simetria esférica e raio R, cuja densidade volumétrica de cargas ρ é função apenas da distância do centro. Uma superfície gaussiana concêntrica com $r > R$ é mostrada em (*a*). Uma superfície gaussiana semelhante, com $r < R$, é mostrada em (*b*).

tícula pontual de carga q situada no centro da casca. Fica assim demonstrado o primeiro teorema das cascas.

Aplicando a lei de Gauss à superfície S_1, para a qual $r < R$, obtemos:

$$E = 0 \qquad \text{(casca esférica, campo em } r < R\text{)}, \tag{23-16}$$

já que essa superfície gaussiana não envolve nenhuma carga. Assim, se existe uma partícula carregada no interior da casca a casca não exerce nenhuma força sobre a partícula. Fica então demonstrado o segundo teorema das cascas.

Toda distribuição de cargas esfericamente simétrica, como a da Fig. 23-19, pode ser substituída por um conjunto de cascas esféricas concêntricas. Para fins de aplicação dos dois teoremas das cascas a densidade volumétrica de cargas ρ deve ter um valor único para cada casca, mas não é necessariamente a mesma para todas as cascas. Assim, para a distribuição de cargas como um todo ρ pode variar, mas apenas em função de r, a distância radial a partir do centro de curvatura. Podemos assim examinar o efeito da distribuição de cargas "camada por camada".

Na Fig. 23-19*a* todas as cargas estão no interior de uma superfície gaussiana com $r > R$. As cargas produzem um campo elétrico na superfície gaussiana como se houvesse apenas uma carga pontual situada no centro, e a Eq. 23-15 pode ser aplicada.

A Fig. 23-19*b* mostra uma superfície gaussiana com $r < R$. Para determinar o campo elétrico em pontos sobre esta superfície gaussiana consideramos dois conjuntos de cascas carregadas: um conjunto do lado de dentro da superfície gaussiana e outro conjunto do lado de fora. De acordo com a Eq. 23-16, as cargas *do lado de fora* da superfície gaussiana não criam um campo elétrico na superfície gaussiana. De acordo com a Eq. 23-15, as cargas *do lado de dentro* da superfície gaussiana criam o mesmo campo que uma carga pontual de mesmo valor situada no centro. Chamando essa carga de q', podemos escrever a Eq. 23-15 na forma

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2} \qquad \text{(distribuição esférica, campo em } r \le R\text{)}. \tag{23-17}$$

Se toda a distribuição de cargas de raio R é uniforme, a carga q' envolvida por uma superfície esférica de raio r na Fig. 23-19*b* pode ser obtida a partir da seguinte relação:

$$\frac{\text{(carga envolvida por uma esfera de raio } r\text{)}}{\text{(volume envolvido por uma esfera de raio } r\text{)}} = \frac{\text{carga total}}{\text{volume total}}$$

ou

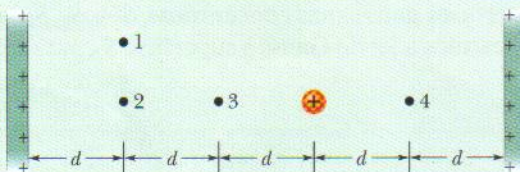
$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \tag{23-18}$$

Explicitando q', obtemos:

$$q' = q\frac{r^3}{R^3}. \tag{23-19}$$

Substituindo na Eq. 23-17, temos:

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r \qquad \text{(distribuição uniforme, campo em } r \le R\text{)} \tag{23-20}$$

TESTE 4 A figura mostra duas placas de grande extensão, paralelas, não-condutoras, com densidades superficiais de cargas iguais, uniformes e positivas, e uma esfera com uma densidade volumétrica de cargas uniforme e positiva. Ordene os quatro pontos numerados de acordo com o módulo do campo elétrico total existente no local, em ordem decrescente.

REVISÃO E RESUMO

Lei de Gauss A *lei de Gauss* e a lei de Coulomb são formas diferentes de descrever a relação entre carga e campo elétrico em situações estáticas. A lei de Gauss é expressa pela equação

$$\varepsilon_0\Phi = q_{env} \quad \text{(lei de Gauss)}, \tag{23-6}$$

onde q_{env} é a carga total no interior de uma superfície imaginária fechada (conhecida como *superfície gaussiana*) e Φ é o *fluxo* total do campo elétrico através da superfície:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} \quad \text{(fluxo elétrico através de uma superfície gaussiana)}. \tag{23-4}$$

A lei de Coulomb pode ser demonstrada a partir da lei de Gauss.

Aplicações da lei de Gauss Usando a lei de Gauss e, em alguns casos, princípios de simetria é possível demonstrar várias propriedades importantes de sistemas eletrostáticos, entre as quais as seguintes:

1. As cargas em excesso de um *condutor* estão concentradas na superfície externa do condutor.
2. O campo elétrico externo nas vizinhanças da *superfície de um condutor carregado* é perpendicular à superfície e tem um módulo dado por

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(superfície condutora)}. \tag{23-11}$$

onde σ é a densidade superficial de cargas.
No interior do condutor, $E = 0$.

3. O campo elétrico em qualquer ponto de uma *linha de cargas* infinita com uma densidade linear de cargas uniforme λ é perpendicular à linha de cargas e tem um módulo dado por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(linha de cargas)}, \tag{23-12}$$

onde r é a distância perpendicular entre a linha de cargas e o ponto.

4. O campo elétrico produzido por uma *placa não-condutora infinita* com uma densidade superficial de cargas uniforme σ é perpendicular ao plano da placa e tem um módulo dado por

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(placa de cargas)}. \tag{23-13}$$

5. O campo elétrico *do lado de fora de uma casca esférica uniformemente carregada* de raio R e carga total q aponta na direção radial e tem um módulo dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \text{(casca esférica, para } r \geq R). \tag{23-15}$$

Onde r é a distância entre o centro da casca e o ponto no qual o campo E é medido. (A carga se comporta, para pontos externos, como se estivesse concentrada no centro da esfera.) O campo *do lado de dentro* de uma casca esférica uniformemente carregada é zero:

$$E = 0 \quad \text{(casca esférica, para } r < R). \tag{23-16}$$

6. O campo elétrico *no interior de uma esfera uniformemente carregada* aponta na direção radial e tem um módulo dado por

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r. \tag{23-20}$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 23-20 mostra, em seção reta, uma esfera central metálica, duas cascas metálicas e três superfícies gaussianas esféricas concêntricas de raio R, $2R$ e $3R$. As cargas dos três corpos, distribuídas uniformemente, são as seguintes: esfera, Q; casca menor, $3Q$; casca maior, $5Q$. Coloque as três superfícies gaussianas na ordem do módulo do campo elétrico em qualquer ponto da superfície, começando pelo maior.

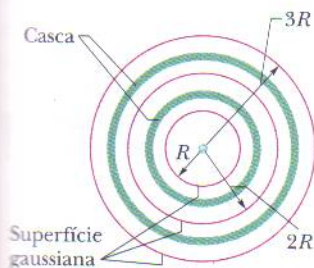



FIG. 23-20 Pergunta 1.

2 A Fig. 23-21 mostra, em seção reta, duas esferas gaussianas e dois cubos gaussianos no centro dos quais existe uma partícula de carga positiva. (a) Coloque as quatro superfícies gaussianas na ordem do fluxo elétrico que as atravessa, começando pelo maior. (b) Coloque as quatro superfícies gaussianas na ordem do módulo do campo elétrico em qualquer ponto da superfície, começando pelo maior, e informe se os módulos são uniformes ou variam de ponto para ponto da superfície.

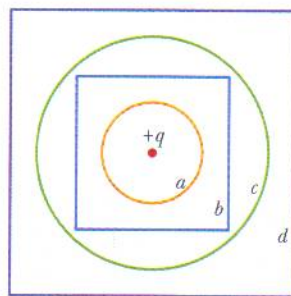



FIG. 23-21 Pergunta 2.

3 O vetor área de uma superfície é $\vec{A} = (2\hat{\text{i}} + 3\hat{\text{j}})\text{m}^2$. Qual é o fluxo de um campo elétrico através dessa superfície se o campo é (a) $\vec{E} = 4\hat{\text{e}}$ N/C; (b) $\vec{E} = 4\hat{\text{k}}$ N/C?

4 A Fig. 23-22 mostra, em seção reta, três cilindros maciços de comprimento L e carga uniforme Q. Concêntrica com cada cilindro existe uma superfície gaussiana cilíndrica; as três superfícies gaussianas têm o mesmo raio. Coloque as superfícies gaussianas

na ordem do módulo do campo elétrico em qualquer ponto da superfície, começando pelo maior.

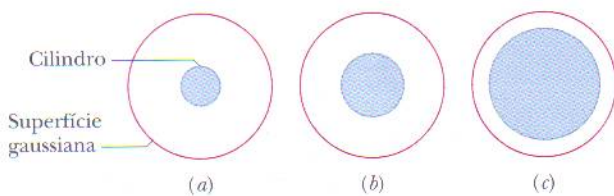



FIG. 23-22 Pergunta 4.

5 A Fig. 23-23 mostra as seções retas de quatro conjuntos de barras finas e muito compridas perpendiculares ao plano da figura. O valor abaixo de cada barra indica a densidade linear uniforme de cargas da barra em microcoulombs por metro. As barras estão separadas por distâncias d ou $2d$, e um ponto central é mostrado a meio caminho entre as barras internas. Coloque os conjuntos na ordem do módulo do campo elétrico no ponto central, começando pelo maior.

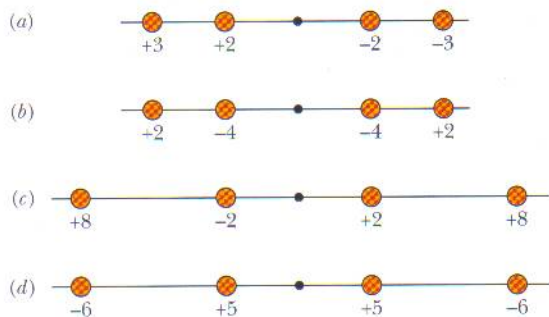



FIG. 23-23 Pergunta 5.

6 Uma pequena esfera carregada está no interior de uma casca esférica metálica de raio R. Para três situações, as cargas da esfera e da casca, respectivamente, são (1) $+4q$, 0; (2) $-6q$, $+10q$; (3) $+16q$, $-12q$. Coloque as situações em ordem de acordo com a carga (a) da superfície interna da casca; (b) da superfície externa da casca, começando pela mais positiva.

7 Coloque as situações da Pergunta 6 em ordem de acordo com o módulo do campo elétrico (a) no centro da casca; (b) em um ponto a uma distância $2R$ do centro da casca, começando pelo maior.

8 Três placas infinitas não-condutoras, com densidades superficiais de cargas positivas σ, 2σ e 3σ, foram alinhadas paralelamente, como as duas barras da Fig. 23-17a. Qual é a ordem das placas, da esquerda para a direita, se o campo elétrico $\vec{E}$ produzido pelas barras tem módulo $E = 0$ em uma região e $E = 2\sigma/\varepsilon_0$ em outra região?

9 Na Fig. 23-24 um elétron é liberado entre duas placas infinitas não-condutoras horizontais, com densidades superficiais de cargas $\sigma_{(+)}$ e $\sigma_{(-)}$, como mostra a figura. O elétron é submetido às três situações mostradas na tabela a seguir, que envolvem as densidades superficiais de cargas e a distância entre as placas. Coloque as situações na ordem do módulo da aceleração do elétron, começando pelo maior.

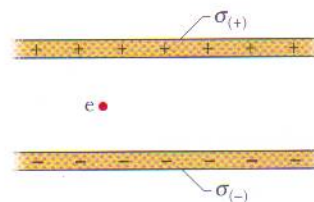



FIG. 23-24 Pergunta 9.

Situação	$\sigma_{(+)}$	$\sigma_{(-)}$	Distância
1	$+4\sigma$	-4σ	d
2	$+7\sigma$	$-\sigma$	$4d$
3	$+3\sigma$	-5σ	$9d$

10 A Fig. 23-25 mostra quatro esferas maciças, todas com uma carga Q distribuída uniformemente. (a) Coloque as esferas em ordem de acordo com a densidade volumétrica de cargas, começando pela maior. A figura mostra também um ponto P para cada esfera, todos à mesma distância do centro da esfera. (b) Coloque as esferas em ordem de acordo com o módulo do campo elétrico no ponto P, começando pelo maior.

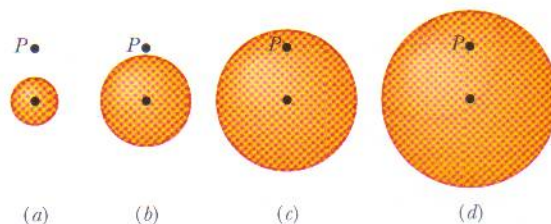



FIG. 23-25 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 23-3 Fluxo de um Campo Elétrico

•1 A superfície quadrada da Fig. 23-26 tem 3,2 mm de lado e está imersa em um campo elétrico uniforme de módulo $E = 1800$ N/C e com linhas de campo fazendo um ângulo de 35° com a normal, como mostra a figura. Tome essa normal como apontando "para fora", como se a superfície fosse a tampa de uma caixa. Calcule o fluxo elétrico através da superfície.

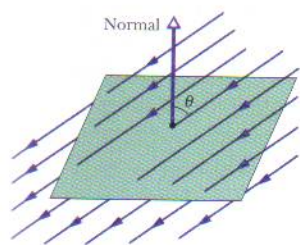



FIG. 23-26 Problema 1.

••2 Um campo elétrico dado por $\vec{E} = 4{,}0\hat{i} - 3{,}0(y^2 + 2{,}0)\hat{j}$ atravessa um cubo gaussiano com 2,0 m de aresta, posicionado da forma mostrada na Fig. 23-5. (E é dado em newtons por coulomb e x em metros.) Determine o fluxo elétrico (a) através da face superior; (b) através da face inferior; (c) através da face da esquerda; (d) através da face traseira. (e) Qual é o fluxo elétrico total através do cubo?

••3 O cubo da Fig. 23-27 tem 1,40 m de aresta e está orientado da forma mostrada na figura em uma região onde existe um campo elétrico uniforme. Determine o fluxo elétrico através da face direita do cubo se o campo elétrico, em newtons por coulomb, é dado por (a) $6{,}00\hat{i}$; (b) $-2{,}00\hat{j}$; (c) $-3{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{k}$. (d) Qual é o fluxo total através do cubo nos três casos?

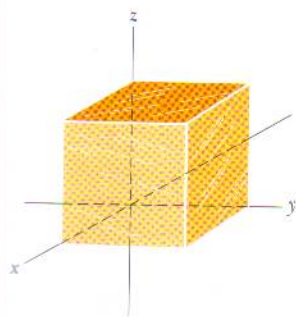



FIG. 23-27 Problemas 3, 4 e 11.

seção 23-4 Lei de Gauss

•4 Em todos os pontos da superfície do cubo da Fig. 23-27 o campo elétrico é paralelo ao eixo z. O cubo tem 3,0 m de aresta. Na face superior do cubo $\vec{E} = -34\hat{k}$ N/C; na face inferior, $\vec{E} = +20\hat{k}$ N/C. Determine a carga que existe no interior do cubo.

•5 Uma carga pontual de 1,8 μC está no centro de uma superfície gaussiana cúbica de 55 cm de aresta. Qual é o fluxo elétrico através da superfície?

•6 Na Fig. 23-28, uma rede para pegar borboletas está imersa em um campo elétrico uniforme de módulo $E = 3{,}0$ mN/C. O plano do aro da rede, uma circunferência de raio $a = 11$ cm, é mantido perpendicular à direção do campo. A rede é eletricamente neutra. Determine o fluxo elétrico através da rede.

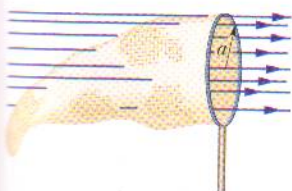



FIG. 23-28 Problema 6.

•7 Na Fig. 23-29 um próton se encontra a uma distância vertical $d/2$ do centro de um quadrado de aresta d. Qual é o módulo do fluxo elétrico através do quadrado? (*Sugestão:* Pense no quadrado como uma das faces de um cubo de aresta d.)

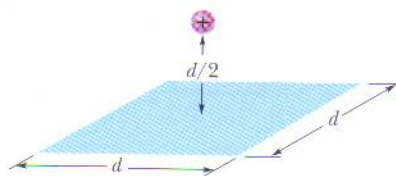



FIG. 23-29 Problema 7.

••8 A Fig. 23-30 mostra duas cascas esféricas não-condutoras mantidas fixas no lugar. A casca 1 possui uma densidade superficial de cargas uniforme de $+6{,}0\ \mu C/m^2$ na superfície externa e um raio de 3,0 cm; a casca 2 possui uma densidade superficial de cargas uniforme de $+4{,}0\ \mu C/m^2$ na superfície externa e raio de 2,0 cm; os centros das cascas estão separados por uma distância $L = 10$ cm. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo elétrico no ponto $x = 2{,}0$ cm?

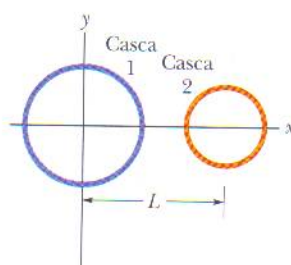



FIG. 23-30 Problema 8.

••9 Observa-se experimentalmente que o campo elétrico em uma certa região da atmosfera terrestre aponta verticalmente para baixo. A uma altitude de 300 m o campo tem um módulo de 60,0 N/C; a uma altitude de 200 m o módulo é de 100 N/C. Determine a carga em excesso contida em um cubo com 100 m de aresta e faces horizontais a 200 e 300 m de altitude.

••10 Quando um chuveiro é aberto em um banheiro fechado os respingos de água no piso do boxe podem encher o ar de íons negativos e produzir um campo elétrico no ar de até 1000 N/C. Considere um banheiro de dimensões 2,5 m × 3,0 m × 2,0 m. Suponha que no teto, no piso e nas quatro paredes o campo elétrico no ar é perpendicular à superfície e possui um módulo uniforme de 600 N/C. Suponha também que essas superfícies formam uma superfície gaussiana que envolve o ar do banheiro. Determine (a) a densidade volumétrica de cargas ρ e (b) o número de cargas elementares e em excesso por metro cúbico de ar.

••11 A Fig. 23-27 mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cubo com 1,40 m de aresta. Determine (a) o fluxo Φ através da superfície; (b) a carga q_{env} envolvida pela superfície se $\vec{E} = 3{,}00y\hat{j}$ N/C, com y em metros; os valores de (c) Φ e (d) q_{env} se $\vec{E} = [-4{,}00\hat{i} + (6{,}00 + 3{,}00y)\hat{j}]$ N/C.

••12 *Fluxo e cascas não-condutoras.* Uma partícula carregada está suspensa no centro de duas cascas esféricas concêntricas que são muito finas e feitas de um material não-condutor. A Fig. 23-31*a* mostra uma seção reta do sistema, e a Fig. 23-31*b* o fluxo Φ através de uma esfera gaussiana com centro na partícula em função do raio r da esfera. A escala do eixo vertical é definida por $\Phi_s = 5{,}0 \times 10^5\ N \cdot m^2/C$. (a) Determine a carga da partícula central. (b) Determine a carga da casca A. (c) Determine a carga da casca B.

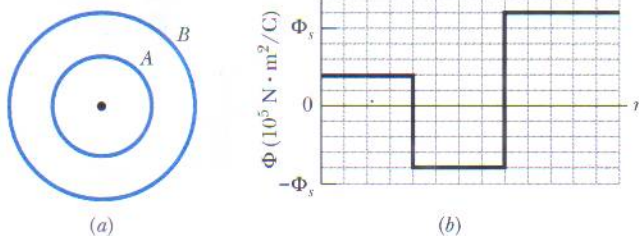



FIG. 23-31 Problema 12.

••13 Uma partícula de carga $+q$ é colocada em um dos vértices de um cubo gaussiano. Determine o múltiplo de q/ε_0 que corresponde ao fluxo através de (a) uma das faces do cubo que contêm o vértice; (b) uma das outras faces do cubo.

••14 A Fig. 23-32 mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cubo de 2,00 m de aresta, imersa em um campo elétrico dado por $\vec{E} = (3{,}00x + 4{,}00)\hat{i} + 6{,}00\hat{j} + 7{,}00\hat{k}$ N/C, com x em metros. Qual é a carga total contida no cubo?

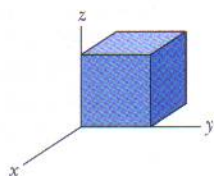



FIG. 23-32 Problema 14.

••15 A Fig. 23-33 mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cubo de 2,00 m de aresta, com um vértice no ponto $x_1 = 5{,}00$ m, $y_1 = 4{,}00$ m. O cubo está imerso em um campo elétrico dado por $\vec{E} = -3{,}00\hat{i} - 4{,}00y^2\hat{j} + 3{,}00\hat{k}$ N/C, com y em metros. Qual é a carga total contida no cubo?

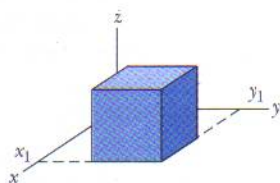



FIG. 23-33 Problema 15.

•••16 A superfície gaussiana em forma de paralelepípedo da Fig. 23-34 envolve uma carga de $+24{,}0\varepsilon_0$ C e está imersa em um campo elétrico dado por $\vec{E} = [(10{,}0 + 2{,}00x)\hat{i} - 3{,}00\hat{j} + bz\hat{k}]$ N/C, com x e z em metros e b constante. A face inferior está no plano xz; a face superior está no plano horizontal que passa pelo ponto $y_2 = 1{,}00$ m. Para $x_1 = 1{,}00$ m, $x_2 = 4{,}00$ m, $z_1 = 1{,}00$ m e $z_2 = 3{,}00$, qual é o valor de b?

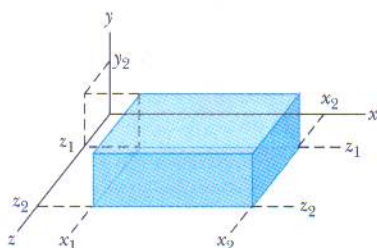



FIG. 23-34 Problema 16.

seção 23-6 Um Condutor Carregado

•17 Os veículos espaciais que atravessam os cinturões de radiação da Terra podem interceptar um número significativo de elétrons. O acúmulo de cargas resultante pode danificar componentes eletrônicos e prejudicar o funcionamento de alguns circuitos. Suponha que um satélite esférico feito de metal, com 1,3 m de diâmetro, acumule 2,4 μC de carga. (a) Determine a densidade superficial de cargas do satélite. (b) Calcule o módulo do campo elétrico nas vizinhanças do satélite devido à carga superficial.

•18 *Fluxo e cascas condutoras.* Uma partícula carregada é mantida no centro de duas cascas esféricas condutoras concêntricas, cuja seção reta aparece na Fig. 23-35*a*. A Fig. 23-35*b* mostra o fluxo Φ através de uma esfera gaussiana com centro na partícula em função do raio r da esfera. A escala do eixo vertical é definida por $\Phi_s = 5{,}0 \times 10^5$ N · m²/C. Determine (a) a carga da partícula central; (b) a carga da casca A; (c) a carga da casca B.

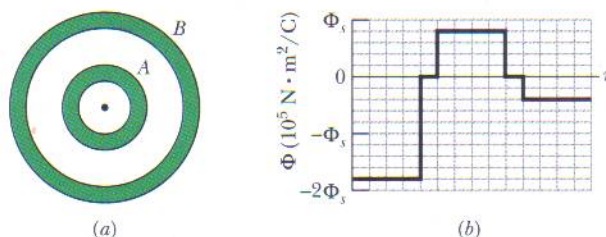



FIG. 23-35 Problema 18.

•19 Uma esfera condutora uniformemente carregada com 1,2 m de diâmetro possui uma densidade superficial de cargas de 8,1 μC/m². (a) Determine a carga da esfera. (b) Determine o fluxo elétrico através da superfície da esfera.

•20 O campo elétrico nas vizinhanças do tambor carregado de uma fotocopiadora tem um módulo E de $2{,}3 \times 10^5$ N/C. Qual é a densidade superficial de cargas, supondo que o tambor é feito de material condutor?

••21 Um condutor isolado de forma arbitrária possui uma carga de $+10 \times 10^{-6}$ C. No interior do condutor existe uma cavidade; no interior da cavidade está uma carga pontual $q = +3{,}0 \times 10^{-6}$ C. Determine a carga (a) da superfície da cavidade; (b) da superfície externa do condutor.

seção 23-7 Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Cilíndrica

•22 A Fig. 23-36 mostra uma seção de um tubo longo de metal, de paredes finas, com um raio $R = 3{,}00$ cm e uma carga por unidade de comprimento $\lambda = 2{,}00 \times 10^{-8}$ C/m. Determine o módulo E do campo elétrico a uma distância radial (a) $r = R/2{,}00$; (b) $r = 2{,}00R$. (c) Faça um gráfico de E em função de r para $0 \le r \le 2{,}00R$.

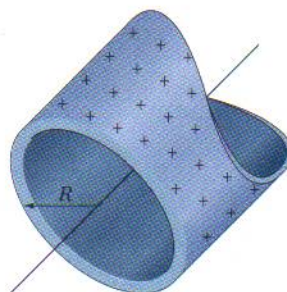



FIG. 23-36 Problema 22.

•23 Uma linha infinita de cargas produz um campo de módulo $4{,}5 \times 10^4$ N/C a uma distância de 2,0 m. Calcule a densidade linear de cargas.

•24 Um elétron é liberado a partir do repouso a uma distância perpendicular de 9,0 cm de uma barra não-condutora retilínea muito longa com uma densidade de cargas uniforme de 6,0 μC por metro. Qual é o módulo da aceleração inicial do elétron?

•25 (a) O tambor de uma fotocopiadora tem um comprimento de 42 cm e um diâmetro de 12 cm. O campo elétrico nas proximidades da superfície do tambor é de $2{,}3 \times 10^5$ N/C. Qual é a carga total do tambor? (b) O fabricante deseja produzir uma versão compacta da máquina. Para isso é necessário reduzir o comprimento do tambor para 28 cm e o diâmetro para 8,0 cm. O campo elétrico na superfície do tambor deve permanecer o mesmo. Qual deve ser a carga do novo tambor?

••26 Na Fig. 23-37 pequenas partes de duas linhas paralelas de cargas muito compridas são mostradas, fixas no lugar, separadas por uma distância L = 8,0 cm. A densidade uniforme de cargas das linhas é +6,0 μC/m para a linha 1 e −2,0 μC/m para a linha 2. Em que ponto do eixo x o campo elétrico é zero?

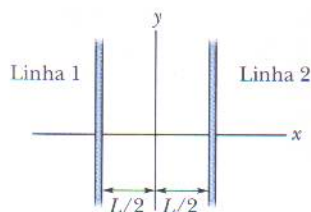



FIG. 23-37 Problema 26.

••27 A Fig. 23-38 é uma seção de uma barra condutora de raio R_1 = 1,30 mm e comprimento L = 11,00 m no interior de uma casca coaxial, de paredes finas, de raio $R_2 = 10{,}0R_1$ e mesmo comprimento L. A carga da barra é $Q_1 = +3{,}40 \times 10^{-12}$ C; a carga da casca é $Q_2 = -2{,}00Q_1$. Determine (a) o módulo E e (b) a direção (para dentro ou para fora) do campo elétrico a uma distância radial $r = 2{,}00R_2$. Determine (c) E e (d) a direção do campo elétrico para $r = 5{,}00R_1$. Determine a carga (e) na superfície interna e (f) na superfície interna da casca.

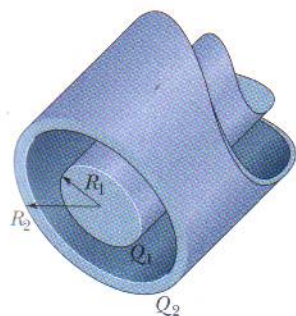



FIG. 23-38 Problema 27.

••28 A Fig. 23-39a mostra um cilindro fino, maciço, carregado e uma casca cilíndrica coaxial, também carregada. Os dois objetos são feitos de material não-condutor e possuem uma densidade superficial de cargas uniforme na superfície externa. A Fig. 23-39b mostra a componente radial E do campo elétrico em função da distância radial r a partir do eixo comum. A escala do eixo vertical é definida por $E_s = 3{,}0 \times 10^3$ N/C. Qual é a densidade linear de cargas da casca?

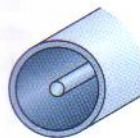
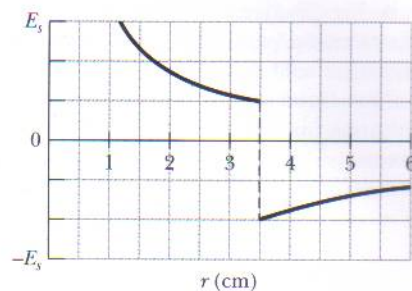



FIG. 23-39 Problema 28.

••29 Duas cascas cilíndricas longas, carregadas, coaxiais, de paredes finas, têm 3,0 e 6,0 m de raio. A carga por unidade de comprimento é $5{,}0 \times 10^{-6}$ C/m para a casca interna e $-7{,}0 \times 10^{-6}$ C/m na casca externa. Determine (a) o módulo E e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do campo elétrico a uma distância radial r = 4,0 cm. Determine (c) E e (d) o sentido para r = 8,0 cm.

••30 Uma carga de densidade linear uniforme 2,0 nC/m está distribuída ao longo de uma barra longa, fina, não-condutora. A barra está envolvida por uma casca longa, cilíndrica, coaxial, condutora (raio interno: 5,0 cm; raio externo, 10 cm). A carga da casca é zero. (a) Determine o módulo do campo elétrico a 15 cm de distância do eixo da casca. Determine a densidade superficial de cargas (b) na superfície interna e (c) na superfície externa da casca.

••31 Um fio reto longo possui cargas negativas fixas com uma densidade linear de 3,6 nC/m. O fio é envolvido por uma casca coaxial cilíndrica, não-condutora, de paredes finas, com 1,5 cm de raio. A casca possui uma carga positiva na superfície externa com uma densidade superficial σ, que anula o campo elétrico do lado de fora da casca. Determine o valor de σ.

•••32 Um cilindro maciço, longo, não-condutor, com 4,0 cm de raio, possui uma densidade volumétrica de cargas não-uniforme ρ que é função da distância radial r a partir do eixo do cilindro: $\rho = Ar^2$. Para $A = 2{,}5\ \mu\text{C/m}^5$, determine o módulo do campo elétrico (a) para r = 3,0 cm; (b) para r = 5,0 cm.

seção 23-8 Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Planar

•33 A Fig. 23-40a mostra três placas de plástico de grande extensão, paralelas e uniformemente carregadas. A Fig. 23-40b mostra a componente x do campo elétrico em função de x. A escala do eixo vertical é definida por $E_s = 6{,}0 \times 10^5$ N/C. Determine a razão entre a densidade de cargas na placa 3 e a densidade de cargas na placa 2.

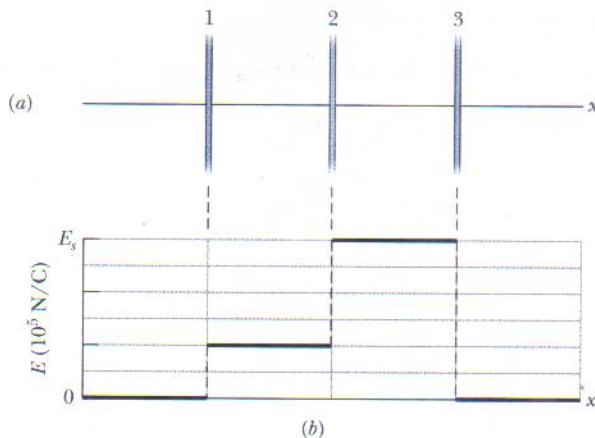



FIG. 23-40 Problema 33.

•34 A Fig. 23-41 mostra as seções retas de duas placas de grande extensão, paralelas, não-condutoras, positivamente carregadas, ambas com distribuição superficial de cargas $\sigma = 1{,}77 \times 10^{-22}$ C/m². Determine o campo elétrico $\vec{E}$, em termos dos vetores unitários, (a) acima das placas; (b) entre as placas; (c) abaixo das placas.

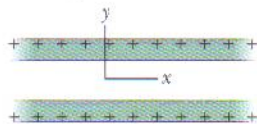



FIG. 23-41 Problema 34.

•35 Uma placa metálica quadrada de 8,0 cm de lado e espessura insignificante possui uma carga total de $6{,}0 \times 10^{-6}$ C. (a) Estime o módulo E do campo elétrico perto do centro da placa (a 0,50 mm do centro, por exemplo) supondo que a carga está distribuída uniformemente pelas duas faces da placa. (b) Estime E a 30 m de distância (uma distância grande, em comparação com as dimensões da placa) supondo que a placa é uma carga pontual.

•36 Na Fig. 23-42 um pequeno furo circular de raio $R = 1{,}80$ cm foi aberto no meio de uma placa fina, infinita, não-condutora, com uma densidade superficial de cargas $\sigma = 4{,}50$ pC/m². O eixo z, cuja origem está no centro do furo, é perpendicular à placa. Determine, em termos dos vetores unitários, o campo elétrico no ponto P, situado em $z = 2{,}56$ cm. (*Sugestão:* Use a Eq. 22-26 e o princípio de superposição.)

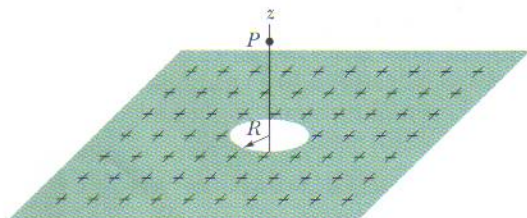



FIG. 23-42 Problema 36.

•37 Na Fig. 23-43 duas placas finas, de grande extensão, são mantidas paralelas e a uma pequena distância uma da outra. Nas faces internas as placas possuem densidades superficiais de cargas de sinais opostos e valor absoluto $7{,}00 \times 10^{-22}$ C/m². Em termos dos vetores unitários, determine o campo elétrico (a) à esquerda das placas; (b) à direita das placas; (c) entre as placas.

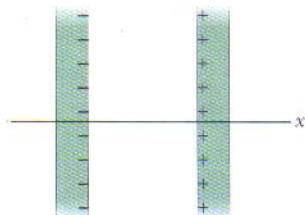



FIG. 23-43 Problema 37.

••38 Duas grandes placas de metal com 1,0 m² de área são mantidas paralelas a 5,0 cm de distância e possuem cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos nas superfícies internas. Se o módulo E do campo elétrico entre as placas é 55 N/C, qual é o módulo da carga em cada placa? Despreze o efeito de borda.

••39 Um elétron é arremessado na direção do centro de uma placa metálica que possui uma densidade superficial de cargas de $-2{,}0 \times 10^{-6}$ C/m². Se a energia cinética inicial do elétron é $1{,}60 \times 10^{-17}$ J e o movimento do elétron muda de sentido (devido à repulsão eletrostática da placa) a uma distância insignificante da placa, de que distância da placa o elétron foi arremessado?

••40 Na Fig. 23-44*a* um elétron é arremessado verticalmente para cima, com uma velocidade $v_s = 2{,}0 \times 10^5$ m/s, a partir das vizinhanças de placa de plástico uniformemente carregada. A placa é não-condutora e muito extensa. A Fig. 23-44*b* mostra a velocidade escalar v em função do tempo t até o elétron voltar ao ponto de partida. Qual é a densidade superficial de cargas da placa?

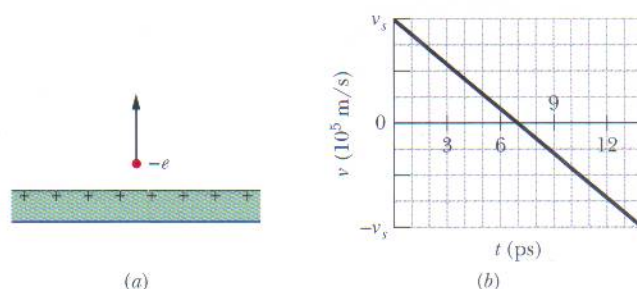



FIG. 23-44 Problema 40.

••41 Na Fig. 23-45 uma pequena esfera não-condutora de massa $m = 1{,}0$ mg e carga $q = 2{,}0 \times 10^{-8}$ C (distribuída uniformemente em todo o volume) está pendurada em um fio não-condutor que faz um ângulo $\theta = 30°$ com uma placa vertical, não-condutora, uniformemente carregada (vista de perfil). Considerando a força gravitacional a que a esfera está submetida e supondo que a placa possui uma grande extensão, calcule a densidade superficial de cargas σ da placa.

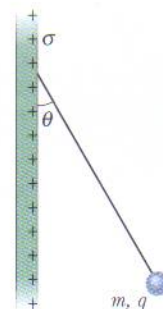



FIG. 23-45 Problema 41.

••42 A Fig. 23-46 mostra uma placa não-condutora muito extensa que possui uma densidade superficial de cargas uniforme $\sigma = -2{,}00\ \mu$C/m²; a figura mostra também uma partícula de carga $Q = 6{,}00\ \mu$C, a uma distância d da placa. Ambas estão fixas no lugar. Se $d = 0{,}200$ m, para que coordenada (a) positiva e (b) negativa sobre o eixo x (além do infinito) o campo elétrico total $\vec{E}_{tot}$

é zero? (c) Se $d = 0{,}800$ m, para que coordenada sobre o eixo x o campo $\vec{E}_{tot}$ é 0?

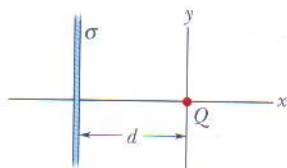



FIG. 23-46 Problema 42.

•••43 A Fig. 23-47 mostra uma seção reta de uma placa não-condutora muito extensa com uma espessura $d = 9{,}40$ mm e uma densidade volumétrica de cargas uniforme $\rho = 5{,}80$ fC/m³. A origem do eixo x está no centro da placa. Determine o módulo do campo elétrico (a) em $x = 0$; (b) em $x = 2{,}00$ mm; (c) em $x = 4{,}70$ mm; (d) em $x = 26{,}0$ mm.

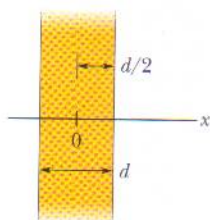



FIG. 23-47 Problema 43.

seção 23-9 Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Esférica

•44 Uma carga pontual produz um fluxo elétrico de -750 N · m²/C através de uma superfície esférica gaussiana de 10,0 cm de raio com centro na carga. (a) Se o raio da superfície gaussiana é multiplicado por dois, qual é o novo valor do fluxo? (b) Qual é o valor da carga pontual?

•45 Uma esfera condutora com 10 cm de raio possui uma carga desconhecida. Se o campo elétrico a 15 cm do centro da esfera tem um módulo de $3{,}0 \times 10^3$ N/C e aponta para o centro da esfera, qual é a carga da esfera?

•46 A Fig. 23-48 mostra o módulo do campo elétrico do lado de dentro e do lado de fora de uma esfera com uma distribuição uniforme de cargas positivas em função da distância do centro da esfera. A escala do eixo vertical é definida por $E_s = 5{,}0 \times 10^7$ N/C. Qual é a carga da esfera?

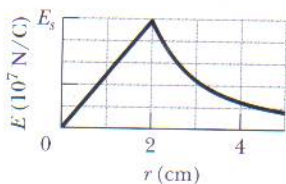



FIG. 23-48 Problema 46.

•47 Duas cascas esféricas concêntricas carregadas têm raios de 10,0 cm e 15,0 cm. A carga da casca menor é $4{,}00 \times 10^{-8}$ C, e a da casca maior é $2{,}00 \times 10^{-8}$ C. Determine o campo elétrico (a) em $r = 12{,}0$ cm; (b) em $r = 20{,}0$ cm.

••48 A Fig. 23-49 mostra duas cascas esféricas não-condutoras mantidas fixas no lugar sobre o eixo x. A casca 1 possui uma densidade uniforme de cargas superficiais $+4{,}0\ \mu$C/m² na superfície externa e um raio de 0,50 cm, enquanto a casca 2 possui uma densidade uniforme de cargas superficiais $-2{,}0\ \mu$C/m² na superfície externa e um raio de 2,00 cm; a distância entre os centros é $L = 6{,}0$ cm. Determine o(s) ponto(s) sobre o eixo x (além do infinito) onde o campo elétrico é zero.

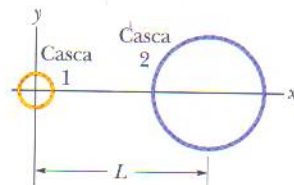



FIG. 23-49 Problema 48.

••49 Na Fig. 23-50 uma casca esférica não-condutora com um raio interno $a = 2{,}00$ cm e um raio externo $b = 2{,}40$ cm possui uma densidade volumétrica uniforme de cargas positivas $\rho = A/r$, onde A é uma constante e r é a distância em relação ao centro da casca. Além disso, uma pequena esfera de carga $q = 45{,}0$ fC está situada no centro da casca. Qual deve ser o valor de A para que o campo elétrico no interior da casca ($a \leq r \leq b$) seja uniforme?

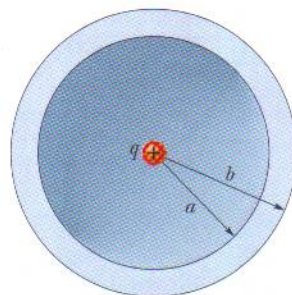



FIG. 23-50 Problema 49.

••50 A Fig. 23-51 mostra uma casca esférica com uma densidade volumétrica de cargas uniforme $\rho = 1{,}84$ nC/m³, raio interno $a = 10{,}0$ cm e raio externo $b = 2{,}00a$. Determine o módulo do campo elétrico (a) em $r = 0$; (b) em $r = a/2{,}00$; (c) em $r = a$; (d) em $r = 1{,}50a$; (e) em $r = b$; (f) em $r = 3{,}00b$.

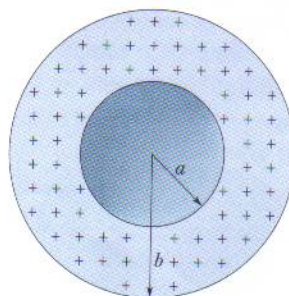



FIG. 23-51 Problema 50.

••51 Na Fig. 23-52 uma esfera maciça de raio $a = 2{,}00$ cm é concêntrica com uma casca esférica condutora de raio interno

$b = 2{,}00a$ e raio externo $c = 2{,}40a$. A esfera possui uma carga uniforme $q_1 = +5{,}00$ fC e a casca possui uma carga $q_2 = -q_1$. Determine o módulo do campo elétrico (a) em $r = 0$; (b) em $r = a/2{,}00$; (c) em $r = a$; (d) em $r = 1{,}50a$; (e) em $r = 2{,}30a$; (f) em $r = 3{,}50a$. Determine a carga (g) na superfície interna e (h) na superfície externa da casca.

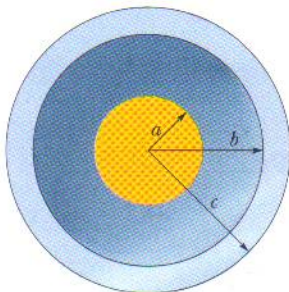



FIG. 23-52 Problema 51.

••52 Uma partícula carregada é mantida fixa no centro de uma casca esférica. A Fig. 23-53 mostra o módulo E do campo elétrico em função da distância radial r. A escala do eixo vertical é definida por $E_s = 10{,}0 \times 10^7$ N/C. Estime o valor da carga da casca.

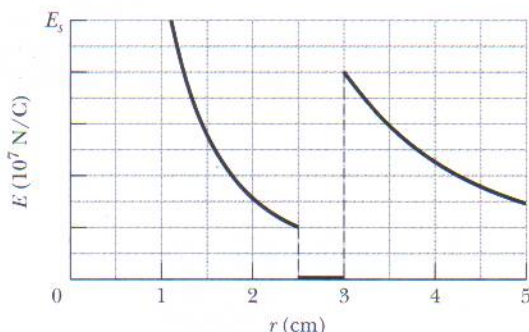



FIG. 23-53 Problema 52.

•••53 Uma distribuição de cargas não-uniforme, mas com simetria esférica, produz um campo elétrico de módulo $E = Kr^4$, onde K é uma constante e r é a distância do centro da esfera. O campo aponta para longe do centro da esfera. Qual é a distribuição volumétrica de cargas ρ?

•••54 A Fig. 23-54 mostra, em seção reta, duas esferas de raio R, com distribuições volumétricas uniformes de cargas. O ponto P está sobre a reta que liga os centros das esferas, a uma distância $R/2{,}00$ do centro da esfera 1. Se o campo elétrico no ponto P é zero, qual é a razão q_2/q_1 entre a carga da esfera 2 e a carga da esfera 1?

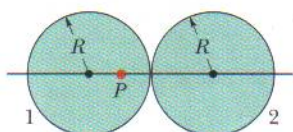



FIG. 23-54 Problema 54.

•••55 Uma esfera não-condutora de raio $R = 5{,}60$ cm possui uma distribuição de cargas não-uniforme $\rho = (14{,}1\ \text{pC/m}^3)r/R$, onde r é a distância em relação ao centro da esfera. (a) Determine a carga da esfera. Determine o módulo E do campo elétrico (b) em $r = 0$; (c) em $r = R/2{,}00$; (d) em $r = R$. (e) Faça um gráfico de E em função de r.

Problemas Adicionais

56 *O mistério do chocolate em pó.* Explosões provocadas por descargas elétricas (centelhas) constituem um sério perigo nas indústrias que lidam com pós muito finos. Uma dessas explosões aconteceu em uma fábrica de biscoitos na década de 1970. Os operários costumavam esvaziar os sacos de chocolate em pó que chegavam à fábrica em uma bandeja, na qual o material era transportado através de canos de plástico até o silo onde era armazenado. No meio desse percurso duas condições para que uma explosão ocorresse foram satisfeitas: (1) o módulo do campo elétrico ultrapassou $3{,}0 \times 10^6$ N/C, produzindo uma ruptura dielétrica do ar; (2) a energia da centelha resultante ultrapassou 150 mJ, fazendo com que o pó explodisse. Vamos discutir a primeira condição.

Suponha que um pó carregado *negativamente* esteja passando por um cano cilíndrico de plástico de raio $R = 5{,}0$ cm e que as cargas associadas ao pó estejam distribuídas uniformemente com uma densidade volumétrica ρ. (a) Usando a lei de Gauss, escreva uma expressão para o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ no interior do cano em função da distância r do eixo do cano. (b) O valor de E aumenta ou diminui quando r aumenta? (c) O campo $\vec{E}$ aponta para o eixo do cilindro ou para longe do eixo? (d) Para $\rho = 1{,}1 \times 10^{-3}$ C/m³ (um valor típico), determine o valor máximo de E e a que distância do eixo do cano esse campo máximo ocorre. (e) O campo pode produzir uma centelha? Onde? (Esta história continua no Problema 68 do Capítulo 24.)

57 Uma carga Q está distribuída uniformemente em uma esfera de raio R. (a) Que fração da carga está contida em uma esfera de raio $r = R/2{,}00$? (b) Qual é a razão entre o módulo do campo elétrico no ponto $r = R/2{,}00$ e o campo elétrico na superfície da esfera?

58 Uma esfera não-condutora com 5,0 cm de raio possui uma densidade volumétrica uniforme de cargas $\rho = 3{,}2\ \mu\text{C/m}^3$. Determine o módulo do campo elétrico (a) a 3,5 cm e (b) a 8,0 cm do centro da esfera.

59 O campo elétrico no ponto P, a uma pequena distância da superfície externa de uma casca esférica metálica com 10 cm de raio interno e 20 cm de raio externo, tem um módulo de 450 N/C e aponta para longe do centro. Quando uma carga pontual desconhecida Q é colocada no centro da casca, o sentido do campo permanece o mesmo e o módulo diminui para 180 N/C. (a) Determine a carga da casca. (b) Determine o valor da carga Q. Depois que a carga Q é colocada, determine a densidade superficial de cargas (c) na superfície interna da casca; (d) na superfície externa da casca.

60 Uma esfera carregada de raio R possui uma densidade de cargas negativas uniforme, exceto por um túnel estreito que atravessa totalmente a esfera, passando pelo centro. Um próton pode ser colocado em qualquer ponto do túnel ou de um prolongamento do túnel. Seja F_R o módulo da força eletrostática a que é submetido o próton quando se encontra na superfície da esfera. Determine, em termos de R, a que distância da superfície está o ponto no qual o módulo da força é $0{,}50F_R$ quando o próton se encontra (a) em um prolongamento do túnel; (b) dentro do túnel.

61 Uma placa infinita que ocupa o espaço entre os planos $x = -5{,}0$ cm e $x = +5{,}0$ cm tem uma densidade volumétrica de cargas uniforme $\rho = 1{,}2$ nC/m³. Determine o módulo do campo elétrico (a) no plano $x = 4{,}0$ cm; (b) no plano $x = 6{,}0$ cm.

62 Uma placa infinita de espessura insignificante, situada no plano xy, possui uma densidade superficial de cargas uniforme $\rho = 8{,}0\ \text{nC/m}^2$. Determine o fluxo elétrico através de uma esfera gaussiana com centro na origem e 5,0 cm de raio.

63 Uma esfera metálica de espessura insignificante possui um raio de 25,0 cm e uma carga de $2{,}00 \times 10^{-7}$ C. Determine o valor de E (a) no interior da esfera; (b) junto à superfície da esfera; (c) a 3,00 m de distância do centro da esfera.

64 O campo elétrico em uma certa região do espaço é dado por $\vec{E} = (x + 2)\hat{\text{i}}$ N/C, com x em metros. Considere uma superfície gaussiana cilíndrica, de raio 20 cm, coaxial com o eixo x. Uma das bases do cilindro está em $x = 0$. (a) Determine o valor absoluto do fluxo elétrico através da outra base do cilindro, situada em $x = 2{,}0$ m. (b) Determine a carga no interior do cilindro.

65 A Fig. 23-55 mostra uma vista de perfil de três placas não-condutoras de grande extensão com uma densidade uniforme de cargas. As densidades superficiais de cargas são $\sigma_1 = +2{,}00\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_2 = +4{,}00\ \mu\text{C/m}^2$ e $\sigma_3 = -5{,}00\ \mu\text{C/m}^2$; $L = 1{,}50$ cm. Qual é o campo elétrico no ponto P em termos dos vetores unitários?

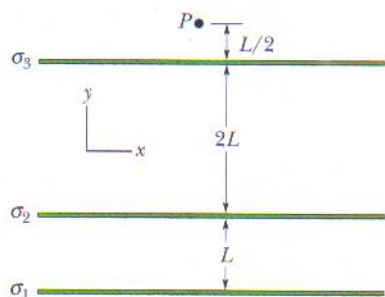



FIG. 23-55 Problema 65.

66 O fluxo de campo elétrico em cada face de um dado tem um valor absoluto, em unidades de $10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, igual ao número N de pontos da face ($1 \leq N \leq 6$). O fluxo é para dentro se N for ímpar e para fora se N for par. Qual é a carga no interior do dado?

67 Uma superfície gaussiana em forma de hemisfério, de raio $R = 5{,}68$ cm, está imersa em um campo elétrico uniforme de módulo $E = 2{,}50$ N/C. Não existe nenhuma carga no interior da superfície. Na base (plana) da superfície o campo é perpendicular à superfície e aponta para o interior da superfície. Determine o fluxo (a) através da base; (b) através da parte curva da superfície.

68 Uma carga pontual $q = 1{,}0 \times 10^{-7}$ C é colocada no centro de uma cavidade esférica com 3,0 cm de raio aberta em um bloco de metal. Use a lei de Gauss para determinar o campo elétrico (a) a 1,5 cm de distância do centro da cavidade; (b) no interior do bloco de metal.

69 Uma casca esférica metálica de raio a e espessura insignificante possui uma carga q_a. Uma segunda casca, concêntrica com a primeira, possui um raio $b > a$ e uma carga q_b. Determine o campo elétrico em pontos situados a uma distância r do centro das cascas (a) para $r < a$; (b) para $a < r < b$; (c) para $r > b$. (d) Discuta o método que você usaria para determinar o modo como as cargas estão distribuídas nas superfícies internas e externas das cascas.

70 Qual é a carga total envolvida pelo cubo gaussiano do Problema 2?

71 Um próton de velocidade $v = 3{,}00 \times 10^5$ m/s gira em órbita em torno de uma esfera carregada de raio $r = 1{,}00$ cm. Qual é a carga da esfera?

72 A Eq. 23-11 ($E = \sigma/\varepsilon_0$) pode ser usada para calcular o campo elétrico em pontos situados nas vizinhanças de uma esfera condutora carregada. Aplique esta equação a uma esfera condutora de raio r e carga q e mostre que o campo elétrico do lado de fora da esfera é igual ao campo produzido por uma carga pontual situada no centro da esfera.

73 A Fig. 23-56 mostra um contador Geiger, um aparelho usado para detectar radiação ionizante (radiação com energia suficiente para ionizar átomos). O contador é formado por um fio central positivamente carregado e um cilindro circular oco, coaxial, condutor, com uma carga negativa de mesmo valor absoluto. As cargas criam um campo elétrico radial de alta intensidade entre o cilindro, que contém um gás inerte rarefeito, e o fio. Uma partícula de radiação que penetre no aparelho através da parede do cilindro ioniza alguns átomos do gás, produzindo elétrons livres, que são acelerados na direção do fio positivo. Entretanto, o campo elétrico é tão intenso que no percurso os elétrons adquirem energia suficiente para ionizar outros átomos do gás através de colisões, criando assim outros elétrons livres. O processo se repete até os elétrons chegarem ao fio. A "avalanche" de elétrons resultante é recolhida pelo fio, gerando um sinal que é usado para assinalar a passagem da partícula original de radiação. Suponha que o fio central tem um raio de 25 μm e o cilindro tem um raio interno de 1,4 cm e um comprimento de 16 cm. Se o campo elétrico na superfície interna do cilindro é $2{,}9 \times 10^4$ N/C, qual é a carga positiva do fio central?

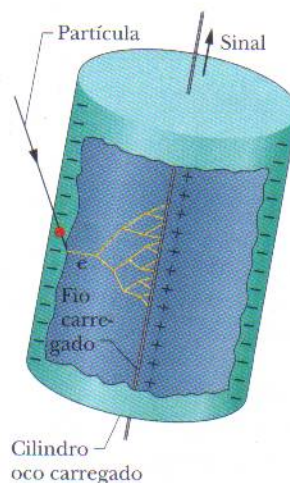



FIG. 23-56 Problema 73.

74 Um cilindro muito longo de raio R possui uma distribuição volumétrica de cargas uniforme. (a) Mostre que, a uma distância $r < R$ do eixo do cilindro,

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0},$$

onde ρ é a densidade volumétrica de cargas. (b) Escreva uma expressão para E do lado de fora do cilindro.

75 A água em uma vala de irrigação de largura $w = 3{,}22$ m e profundidade $d = 1{,}04$ m corre com uma velocidade de 0,207 m/s. O *fluxo mássico* da água através de uma superfície imaginária é o

produto da massa específica da água (1000 kg/m^3) pelo fluxo volumétrico através da superfície. Determine o fluxo mássico através das seguintes superfícies imaginárias: (a) uma superfície de área wd, totalmente submersa, perpendicular à correnteza; (b) uma superfície de área $3wd/2$, da qual uma área wd está submersa, perpendicular à correnteza; (c) uma superfície de área $wd/2$, totalmente submersa, perpendicular à correnteza; (d) uma superfície de área wd, metade da qual está submersa, perpendicular à correnteza; (e) uma superfície de área wd, totalmente submersa, com a normal fazendo um ângulo de 34° com a direção da correnteza.

76 Um elétron livre é colocado entre duas placas paralelas de grande extensão, não-condutoras, mantidas na horizontal a 2,3 cm de distância uma da outra. Uma das placas possui uma carga positiva uniforme; a outra, uma carga negativa uniforme com o mesmo valor absoluto. A força exercida pelo campo elétrico $\vec{E}$ sobre o elétron equilibra a força gravitacional. Determine (a) o módulo da densidade superficial de cargas das placas; (b) o sentido (para cima ou para baixo) do campo $\vec{E}$.

77 Uma esfera não-condutora tem uma densidade volumétrica de cargas uniforme ρ. Seja $\vec{r}$ o vetor que liga o centro da esfera a um ponto genérico P no interior da esfera. (a) Mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\varepsilon_0$. (Observe que este resultado não depende do raio da esfera.) (b) Uma cavidade esférica é aberta na esfera, como mostra a Fig. 23-57. Usando o princípio da superposição, mostre que o campo elétrico no interior da cavidade é uniforme e é dado por $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\varepsilon_0$, onde $\vec{a}$ é o vetor que liga o centro da esfera ao centro da cavidade. (Observe que este resultado não depende do raio da esfera e do raio da cavidade.)

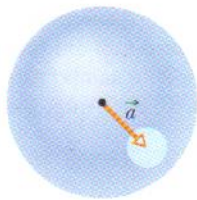



FIG. 23-57 Problema 77.

78 Uma esfera com 6,00 cm de raio possui uma densidade de cargas uniforme de 500 nC/m^3. Considere uma superfície gaussiana cúbica concêntrica com a esfera. Determine o fluxo elétrico através da superfície cúbica se a aresta do cubo for (a) 4,00 cm; (b) 14,0 cm.

79 Uma casca condutora esférica possui uma carga de $-14\ \mu$C na superfície externa e uma partícula carregada na cavidade interna. Se a carga total da casca é $-10\ \mu$C, determine a carga (a) da superfície interna da casca; (b) da partícula.

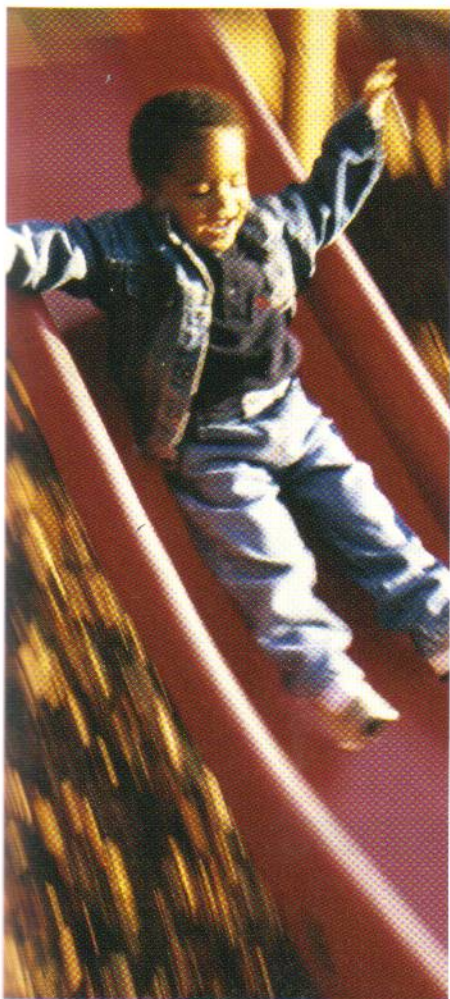
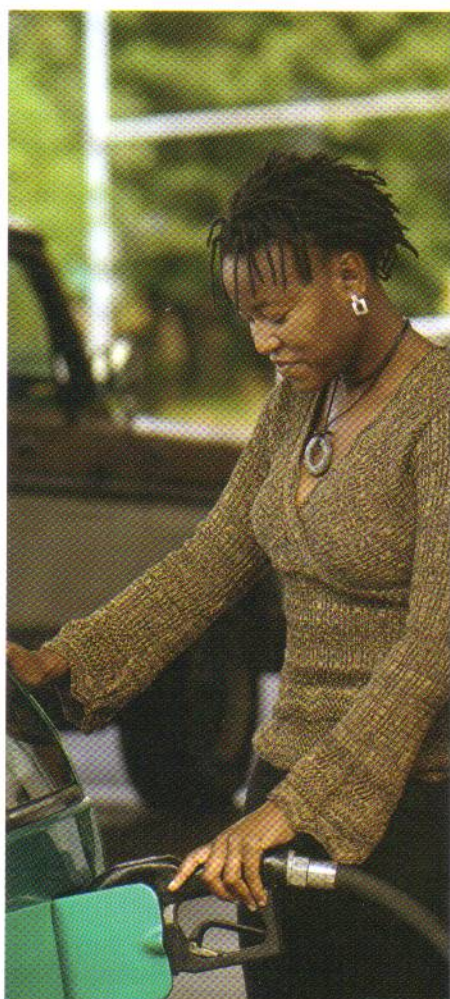
80 Uma carga de 6,00 pC está distribuída uniformemente em uma esfera de raio r = 4,00 cm. Determine o módulo do campo elétrico (a) a 6,00 cm do centro da esfera; (b) a 3,00 cm do centro da esfera.

81 Uma bola esférica de partículas carregadas tem uma densidade de cargas uniforme. Determine, em termos do raio R da bola, a que distância do centro (a) do lado de dentro da bola e (b) do lado de fora da bola o módulo do campo elétrico é igual a 1/4 do valor máximo.

82 Uma placa infinita de espessura insignificante, situada no plano xy, possui uma densidade superficial de cargas uniforme ρ = 8,00 nC/m^2; uma placa semelhante, situada no plano z = 2,00m, possui uma densidade superficial de cargas uniforme ρ = 3,00 nC/m^2. Determine o módulo do campo elétrico (a) no plano z = 1,00 m; (b) no plano z = 3,00 m.

Potencial Elétrico 24

Jim Doberman/The Image Bank/Getty Images

Andrew Olney/Digital Vision/AFP/Getty Images

Vladimir Pcholkin/Taxi/AFP/Getty Images

OnRequest Images/Index Stock

Se uma pessoa tira um casaco ou um suéter enquanto está usando um computador, o computador pode queimar. Se uma criança desce em um escorregador de plástico e abraça outra criança, pode levar um choque. Se um anestesista não usa sapatos adequados durante uma cirurgia, o paciente corre risco de vida. Se um freguês de um posto de gasolina com auto-serviço entra de novo no carro enquanto o veículo está sendo abastecido e torna a sair para remover a mangueira, pode provocar um incêndio.

Qual é o perigo nessas situações?

A resposta está neste capítulo.

24-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos objetivos da física é identificar as forças básicas da natureza, como as forças elétricas que foram discutidas no Capítulo 21. Um objetivo secundário é determinar se uma força é conservativa, ou seja, se pode ser associada a uma energia potencial. A razão para associar uma energia potencial a uma força é que isso permite aplicar o princípio de conservação da energia mecânica a sistemas fechados que envolvem a força. Esse princípio extremamente geral pode ser usado para obter os resultados de experimentos nos quais os cálculos baseados em forças seriam muito difíceis. Os físicos e engenheiros descobriram empiricamente que a força elétrica é conservativa e, portanto, é possível associar a ela uma energia potencial elétrica. Neste capítulo vamos definir essa energia potencial e aplicá-la a alguns problemas práticos.

24-2 | Energia Potencial Elétrica

Quando uma força eletrostática age entre duas ou mais partículas de um sistema podemos associar uma **energia potencial elétrica** U ao sistema. Se a configuração do sistema muda de um estado inicial i para um estado final f, a força eletrostática exerce um trabalho W sobre as partículas. De acordo com a Eq. 8-1, a variação da energia potencial ΔU é dada por

$$\Delta U = U_f - U_i = -W. \tag{24-1}$$

Como acontece com qualquer força conservativa, o trabalho realizado pela força eletrostática é *independente da trajetória*. Suponha que uma partícula carregada pertencente ao sistema se desloca do ponto i para o ponto f enquanto está sob o efeito de uma força exercida pelo resto do sistema. Contanto que o resto do sistema não mude, o trabalho W realizado pela força sobre a partícula é o mesmo para *todas* as trajetórias que ligam o ponto i ao ponto f.

Por conveniência, em geral usamos como *configuração de referência* de um sistema de partículas carregadas a configuração na qual a distância entre as partículas é infinita. Além disso, em geral definimos a *energia potencial de referência* que corresponde a essa configuração como tendo o valor zero. Suponha que várias partículas carregadas passem de uma situação em que a distância entre as partículas é infinita (estado i) para uma situação em que a distância entre as partículas é finita (estado f). Suponha que a energia potencial inicial U_i seja zero e o trabalho realizado por forças eletrostáticas entre as partículas durante o movimento seja W_∞. Nesse caso, de acordo com a Eq. 24-1, a energia potencial final U do sistema é dada por

$$U = -W_\infty. \tag{24-2}$$

TESTE 1 Na figura, um próton se desloca do ponto i para o ponto f na presença de um campo elétrico com a direção indicada. (a) O campo elétrico executa um trabalho positivo ou negativo sobre o elétron? (b) A energia potencial elétrica do próton aumenta ou diminui?

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Energia Potencial Elétrica; Trabalho Realizado por um Campo* A energia potencial elétrica é uma propriedade de um sistema de partículas como um todo; entretanto, o leitor encontrará situações (como a do Exemplo 24-1) nas quais a energia potencial elétrica é mencionada como se fosse uma propriedade de apenas uma partícula do sistema. Frases como "Um elétron em um campo elétrico tem uma energia potencial de 10^{-7} J" são bastante comuns. Afirmações desse tipo são aceitáveis, contanto que se tenha em mente que a energia potencial está sempre associada *a um sistema*; no caso, o sistema constituído pelo elétron e as partículas carregadas que produziram o campo. Também é preciso ter em mente que só faz sentido atribuir a uma partícula, ou mesmo a um

sistema, um valor específico de energia potencial, como 10^{-7} J, se o valor de referência da energia potencial for conhecido.

Quando a energia potencial é associada a apenas uma partícula do sistema costuma-se dizer que um trabalho foi realizado pelo *campo elétrico* sobre a partícula. Isso significa que o trabalho foi realizado pela força produzida pelas cargas responsáveis pelo campo elétrico.

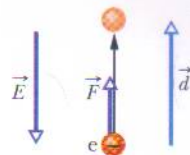
Exemplo 24-1

Elétrons estão sendo constantemente arrancados das moléculas de ar da atmosfera por partículas de raios cósmicos provenientes do espaço sideral. Uma vez liberados, esses elétrons estão sujeitos a uma força eletrostática $\vec{F}$ associada ao campo elétrico $\vec{E}$ produzido na atmosfera por partículas carregadas já existentes na Terra. Perto da superfície terrestre, este campo elétrico tem um módulo de 150 N/C e aponta para o centro da Terra. Qual é a variação ΔU da energia potencial elétrica de um elétron livre na atmosfera da Terra quando a força eletrostática faz com que se mova verticalmente para cima de uma distância d = 520 m (Fig. 24-1)?

IDÉIAS-CHAVE (1) A variação ΔU da energia potencial elétrica do elétron está relacionada ao trabalho W realizado pelo campo elétrico sobre o elétron; essa relação é expressa pela Eq. 24-1 ($\Delta U = -W$). (2) O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ sobre uma partícula que sofre um deslocamento $\vec{d}$ é dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \qquad (24\text{-}3)$$

(3) A força eletrostática e o campo elétrico estão relacionados pela equação $\vec{F} = q\vec{E}$, onde q é a carga do elétron ($-1{,}6 \times 10^{-19}$ C).

FIG. 24-1 Um elétron da atmosfera sofre um deslocamento d para cima devido à força eletrostática $\vec{F}$ associada a um campo elétrico $\vec{E}$.

Cálculos: Substituindo $\vec{F}$ por seu valor na Eq. 24-3 e calculando o produto escalar, obtemos a relação

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd \cos \theta, \qquad (24\text{-}4)$$

onde θ é o ângulo entre as direções de $\vec{E}$ e $\vec{d}$. Como o campo $\vec{E}$ aponta verticalmente para baixo e o deslocamento $\vec{d}$ aponta verticalmente para cima, θ = 180°. Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 24-4, obtemos

$$W = (-1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(150\ \text{N/C})(520\ \text{m}) \cos 180^\circ$$
$$= 1{,}2 \times 10^{-14}\ \text{J}.$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. 24-1,

$$\Delta U = -W = -1{,}2 \times 10^{-14}\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado mostra que com a subida de 520 m a energia potencial do elétron *diminui* de $1{,}2 \times 10^{-14}$ J.

24-3 | Potencial Elétrico

Como mostra o Exemplo 24-1, a energia potencial de uma partícula carregada na presença de um campo elétrico depende do valor da carga. Por outro lado, a energia potencial *por unidade de carga* associada a um campo elétrico possui um valor único em cada ponto do espaço.

Suponha, por exemplo, que uma partícula de prova com uma carga positiva de $1{,}60 \times 10^{-19}$ C seja colocada em um ponto do espaço no qual a partícula possui uma energia potencial elétrica de $2{,}40 \times 10^{-17}$ J. Nesse caso, a energia potencial por unidade de carga é

$$\frac{2{,}40 \times 10^{-17}\ \text{J}}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 150\ \text{J/C}.$$

Suponha agora que a partícula de prova seja substituída por outra com uma carga positiva duas vezes maior, $3{,}20 \times 10^{-19}$ C. A energia potencial desta segunda partícula é $4{,}80 \times 10^{-17}$ J, duas vezes maior que a da primeira partícula, mas a energia potencial por unidade de carga é a mesma, 150 J/C.

Assim, a energia potencial por unidade de carga, que pode ser representada como U/q, não depende da carga q da partícula e é uma *característica apenas do campo elétrico* na região do espaço que está sendo investigada. A energia potencial

por unidade de carga em um ponto do espaço é chamada de **potencial elétrico** (ou simplesmente **potencial**) e representada pela letra V. Assim,

$$V = \frac{U}{q}. \tag{24-5}$$

Observe que o potencial elétrico é uma grandeza escalar.

A *diferença de potencial elétrico* ΔV entre dois pontos i e f é igual à diferença entre os potenciais elétricos dos dois pontos:

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q}. \tag{24-6}$$

Usando a Eq. 24-1 para substituir ΔU por $-W$ na Eq. 24-6, podemos definir a diferença de potencial entre os pontos i e f como

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q} \quad \text{(definição de diferença de potencial).} \tag{24-7}$$

A diferença de potencial entre dois pontos é, portanto, o negativo do trabalho realizado pela força eletrostática para deslocar uma carga unitária de um ponto para o outro. Uma diferença de potencial pode ser positiva, negativa ou nula, dependendo dos sinais e dos valores absolutos de q e W.

De acordo com a Eq. 24-5, se tomarmos $U_i = 0$ no infinito como referência para a energia potencial, o potencial elétrico V no infinito também será nulo. Nesse caso, de acordo com a Eq. 24-7, podemos definir o potencial elétrico em qualquer ponto do espaço através da relação

$$V = -\frac{W_\infty}{q} \quad \text{(definição de potencial),} \tag{24-8}$$

onde W_∞ é o trabalho executado pelo campo elétrico sobre uma partícula carregada quando a partícula se desloca do infinito para o ponto f. O potencial V pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do sinal e do valor absoluto de q e W_∞.

De acordo com a Eq. 24-8, a unidade de potencial no SI é o joule por coulomb. Esta combinação ocorre com tanta freqüência que uma unidade especial, o *volt* (V), é usada para representá-la. Assim,

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule por coulomb}. \tag{24-9}$$

Esta nova unidade permite adotar uma unidade mais conveniente para o campo elétrico $\vec{E}$, que até agora vem sendo expresso em newtons por coulomb. Com duas conversões de unidades, obtemos

$$1 \text{ N/C} = \left(1\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)\left(\frac{1 \text{ V}\cdot\text{C}}{1 \text{ J}}\right)\left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N}\cdot\text{m}}\right)$$
$$= 1 \text{ V/m}. \tag{24-10}$$

O segundo termo entre parênteses vem da Eq. 24-9; o terceiro, da definição de joule. De agora em diante expressaremos os valores de campo elétrico em volts por metro, em vez de newtons por coulomb.

Podemos também definir uma unidade de energia que é conveniente no caso da medida da energia de sistemas de dimensões atômicas ou subatômicas. Um *elétron-volt* (eV) é a energia igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga elementar e, como a de um elétron ou de um próton, através de uma diferença de potencial de um volt. De acordo com a Eq. 24-7, o valor absoluto desse trabalho é $q\,\Delta V$; assim,

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V})$$
$$= (1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1{,}60 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: Potencial Elétrico e Energia Potencial Elétrica O potencial elétrico V e a energia potencial elétrica U são grandezas diferentes, que não devem ser confundidas.

Potencial elétrico é uma propriedade do campo elétrico, que não depende da presença de um corpo carregado; é medida em volts (joules por coulomb).

Energia potencial elétrica é a energia de um objeto carregado na presença de um campo elétrico externo (ou, mais precisamente, a energia do sistema formado por um objeto e um campo elétrico externo); é medida em joules.

Trabalho Realizado por uma Força Aplicada

Suponha que uma partícula de carga q seja transportada do ponto i para o ponto f, na presença de um campo elétrico, através da aplicação de uma força. Durante o deslocamento a força aplicada realiza um trabalho W_{ap} sobre a carga, enquanto o campo elétrico realiza um trabalho W sobre a mesma carga. De acordo com o teorema do trabalho e energia cinética (Eq. 7-10), a variação ΔK da energia cinética da partícula é dada por

$$\Delta K = K_f - K_i = W_{ap} + W. \qquad (24\text{-}11)$$

Suponha que a partícula esteja parada antes e depois do deslocamento. Nesse caso, $K_i = K_f = 0$ e a Eq. 24-11 se reduz a

$$W_{ap} = -W. \qquad (24\text{-}12)$$

Isso significa que se a energia cinética da partícula é a mesma antes e depois de um deslocamento, o trabalho W_{ap} realizado por uma força aplicada durante o deslocamento é igual ao negativo do trabalho W realizado pelo campo elétrico.

Usando a Eq. 24-12 para substituir W por $-W_{ap}$ na Eq. 24-1, podemos relacionar o trabalho W_{ap} à variação da energia potencial da partícula durante o deslocamento. O resultado é o seguinte:

$$\Delta U = U_f - U_i = W_{ap}. \qquad (24\text{-}13)$$

Além disso, usando a Eq. 24-12 para substituir W por $-W_{ap}$ na Eq. 24-7, podemos relacionar o trabalho W_{ap} à diferença de potencial elétrico ΔV entre as posições inicial e final da partícula. Temos:

$$W_{ap} = q\,\Delta V. \qquad (24\text{-}14)$$

O trabalho W_{ap} pode ser positivo ou negativo, dependendo do sinal e do valor absoluto de q e ΔV.

TESTE 2 Na figura do Teste 1 uma força é usada para deslocar o próton do ponto i para o ponto f na presença de um campo elétrico uniforme com o sentido indicado. (a) A força exerce um trabalho positivo ou negativo sobre o próton? (b) O potencial do próton aumenta ou diminui?

24-4 | Superfícies Eqüipotenciais

Pontos vizinhos que possuem o mesmo potencial elétrico formam uma **superfície eqüipotencial**, que pode ser uma superfície imaginária ou uma superfície real. O campo elétrico não realiza nenhum trabalho líquido W sobre uma partícula carregada quando a partícula se desloca de um ponto para outro de uma superfície eqüipotencial. Este fato é uma conseqüência da Eq. 24-7, segundo a qual $W = 0$ para $V_f = V_i$. Como o trabalho (e, portanto, a energia potencial e o potencial) não depende da trajetória percorrida, $W = 0$ para *qualquer* trajetória que ligue dois i e j perten-

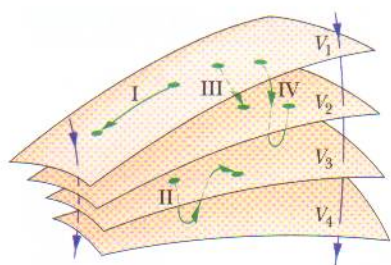



FIG. 24-2 Partes de quatro superfícies eqüipotenciais para potenciais elétricos $V_1 = 100$ V, $V_2 = 80$ V, $V_3 = 60$ V e $V_4 = 40$ V. A figura mostra também quatro trajetórias possíveis para uma carga de prova e duas linhas de campo elétrico.

centes a uma superfície eqüipotencial, mesmo que a trajetória não esteja inteiramente na superfície.

A Fig. 24-2 mostra uma *família* de superfícies eqüipotenciais associada ao campo elétrico produzido por uma certa distribuição de cargas. O trabalho realizado pelo campo elétrico sobre uma partícula carregada quando a partícula se desloca de uma extremidade à outra das trajetórias I e II é zero, já que essas trajetórias começam e terminam na mesma superfície eqüipotencial. O trabalho realizado quando a partícula se desloca de uma extremidade a outra das trajetórias III e IV não é zero, mas tem o mesmo valor para as duas trajetórias, pois os potenciais inicial e final são os mesmos para as duas trajetórias, ou seja, as trajetórias III e IV ligam o mesmo par de superfícies eqüipotenciais.

Por simetria, as superfícies eqüipotenciais produzidas por uma carga pontual ou por qualquer distribuição de cargas com simetria esférica são uma família de esferas concêntricas. No caso de um campo elétrico uniforme as superfícies são uma família de planos perpendiculares às linhas de campo. Na verdade, as superfícies eqüipotenciais são sempre perpendiculares às linhas de campo elétrico e, portanto, a $\vec{E}$, que é sempre tangente a essas linhas. Se $\vec{E}$ *não fosse* perpendicular a uma superfície eqüipotencial teria uma componente paralela à superfície, que realizaria trabalho sobre a partícula quando ela se deslocasse na superfície. Entretanto, de acordo com a Eq. 24-7, o trabalho realizado deve ser nulo no caso de uma superfície eqüipotencial. A única conclusão possível é que o vetor $\vec{E}$ em qualquer ponto do espaço deve ser perpendicular à superfície eqüipotencial que passa por esse ponto. A Fig. 24-3 mostra linhas de campo elétrico e seções retas de superfícies eqüipotenciais para os campos associados a um campo elétrico uniforme, uma carga elétrica pontual e um dipolo elétrico.

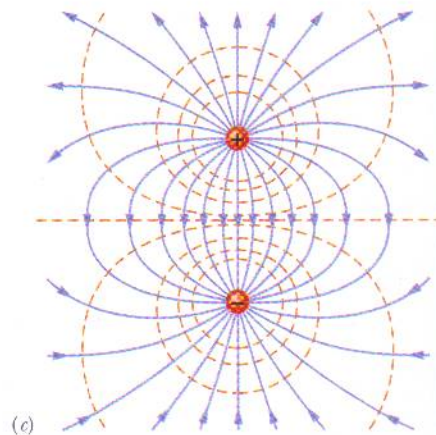
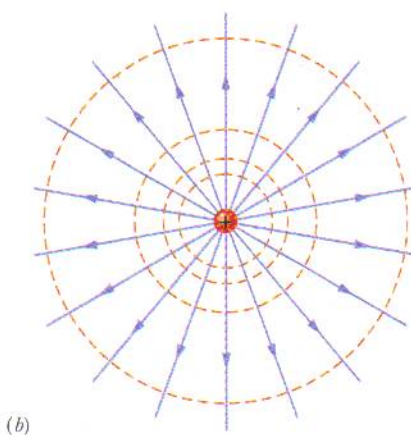
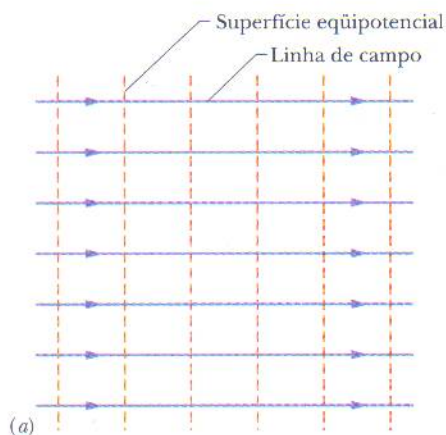



FIG. 24-3 Linhas de campo elétrico (violeta) e seções retas de superfícies eqüipotenciais (dourado) (*a*) para um campo elétrico uniforme; (*b*) para uma carga pontual; (*c*) para um dipolo elétrico.

24-5 | Cálculo do Potencial a Partir do Campo

É possível calcular a diferença de potencial entre dois pontos i e f em uma região do espaço onde existe um campo elétrico se o vetor campo elétrico $\vec{E}$ for conhecido em todos os pontos de qualquer trajetória que ligue esses pontos. Para isso, basta determinar o trabalho realizado pelo campo sobre uma carga de prova quando a carga se desloca do ponto i até o ponto f e usar a Eq. 24-7.

Considere um campo elétrico qualquer, representado pelas linhas de campo da Fig. 24-4, e uma carga de prova positiva q_0 que se move do ponto i ao ponto f, percorrendo a trajetória mostrada na figura. Em todos os pontos da trajetória uma força eletrostática $q_0\vec{E}$ age sobre a carga enquanto ela sofre um deslocamento elementar $d\vec{s}$. De acordo com o que foi visto no Capítulo 7, o trabalho elementar dW realizado sobre uma partícula por uma força durante um deslocamento $d\vec{s}$ é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \tag{24-15}$$

Para a situação da Fig. 24-4, $\vec{F} = q_0\vec{E}$ e a Eq. 24-15 se torna

$$dW = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}. \tag{24-16}$$

Para determinar o trabalho total W realizado pelo campo sobre a partícula quando esta se desloca do ponto i para o ponto f somamos, por integração, os trabalhos elementares realizados sobre a carga quando esta sofre todos os deslocamentos elementares $d\vec{s}$ de que é composta a trajetória:

$$W = q_0\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}. \tag{24-17}$$

Substituindo o trabalho W pelo seu valor em termos da diferença de potencial, dado pela Eq. 24-7, temos:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}. \tag{24-18}$$

Assim, a diferença de potencial $V_f - V_i$ entre dois pontos i e f na presença de um campo elétrico é igual ao negativo da *integral de linha* (ou seja, da integral ao longo de uma certa trajetória) de $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ do ponto i até o ponto f. Entretanto, como a força eletrostática é conservativa, todas as trajetórias (simples ou complicadas) levam ao mesmo resultado.

Se o campo elétrico é conhecido em todos os pontos de uma certa região, a Eq. 24-18 permite calcular a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer da região. Se escolhemos o potencial V_i do ponto i como sendo zero, a Eq. 24-18 se torna

$$V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}, \tag{24-19}$$

onde o índice f de V_f foi omitido. A Eq. 24-19 pode ser usada para calcular o potencial V em qualquer ponto f *em relação ao potencial* do ponto i, tomado como sendo *zero*. Se o ponto i está no infinito, a Eq. 24-19 nos dá o potencial V em qualquer ponto f em relação ao potencial no infinito, tomado como sendo zero.

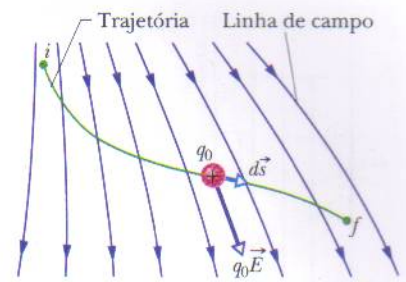
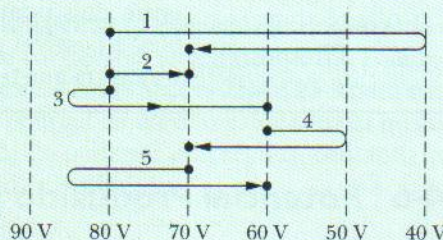



FIG. 24-4 Uma carga de prova q_0 se desloca do ponto i para o ponto f ao longo da trajetória indicada, na presença de um campo elétrico não-uniforme. Durante um deslocamento $d\vec{s}$ uma força eletrostática $q_0\vec{E}$ age sobre a carga de prova. A força aponta na direção da linha de campo que passa pela carga de prova.

TESTE 3 A figura mostra uma família de superfícies paralelas eqüipotenciais (vistas de perfil) e cinco trajetórias ao longo das quais um elétron pode ser deslocado de uma superfície para outra. (a) Qual é a orientação do campo elétrico associado às superfícies? (b) Para cada trajetória, o trabalho realizado para deslocar o elétron é positivo, negativo ou nulo? (c) Coloque os caminhos na ordem do trabalho realizado, começando pelo maior.

Exemplo 24-2

(a) A Fig. 24-5*a* mostra dois pontos i e f na presença de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$. Os pontos estão sobre a mesma linha de campo elétrico (que não aparece na figura), separados por uma distância d. Determine a diferença de potencial $V_f - V_i$ deslocando uma carga de prova positiva q_0 do ponto i ao ponto f ao longo da trajetória indicada, que é paralela à direção do campo.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 24-18, podemos determinar a diferença de potencial entre dois pontos integrando $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ ao longo de uma trajetória que ligue os dois pontos.

Cálculos: Começamos por deslocar mentalmente uma carga de prova q_0 ao longo da trajetória escolhida, do

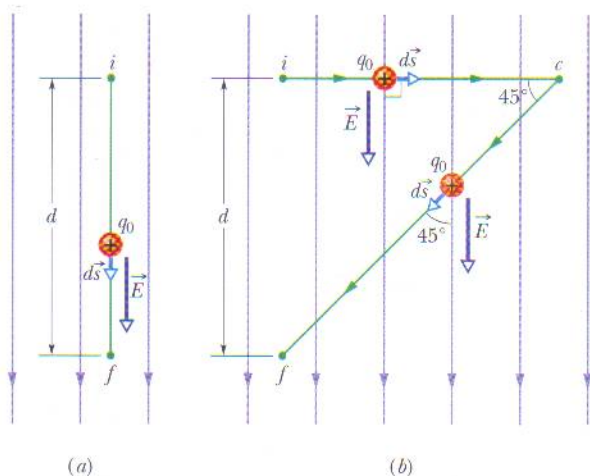



FIG. 24-5 (*a*) Uma carga de prova q_0 se desloca em linha reta do ponto *i* para o ponto *f* na direção de um campo elétrico externo uniforme. (*b*) A carga q_0 descreve a trajetória *icf* na presença do mesmo campo elétrico.

ponto inicial *i* ao ponto final *f*. Enquanto deslocamos a carga de prova ao longo da trajetória da Fig. 24-5*a* o deslocamento elementar $d\vec{s}$ tem sempre a mesma orientação que o campo $\vec{E}$. Assim, o ângulo θ entre $\vec{E}$ e $d\vec{s}$ é zero e o produto escalar da Eq. 24-18 é

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds\cos\theta = E\,ds. \tag{24-20}$$

Nesse caso, de acordo com as Eqs. 24-18 e 24-20, temos:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_i^f E\,ds. \tag{24-21}$$

Como o campo é uniforme, E é constante ao longo de toda a trajetória e pode ser colocado de fora do sinal de integral, o que nos dá

$$V_f - V_i = -E\int_i^f ds = -Ed, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde a integral é simplesmente o comprimento d da trajetória. O sinal negativo do resultado mostra que o potencial no ponto *f* da Fig. 24-5*a* é menor que o potencial no ponto *i*. Este é um resultado geral: o potencial sempre diminui ao longo de uma trajetória que tem a mesma orientação que as linhas de campo elétrico.

(b) Determine a diferença de potencial $V_f - V_i$ deslocando a carga de prova positiva q_0 de *i* para *f* ao longo da trajetória *icf* mostrada na Fig. 24-5*b*.

Cálculos: A idéia-chave do item (a) também se aplica a este caso, mas agora estamos deslocando a carga ao longo de uma trajetória formada por dois segmentos de reta, *ic* e *cf*. Em todos os pontos do segmento *ic* o deslocamento $d\vec{s}$ é perpendicular a $\vec{E}$. Assim, o ângulo entre $\vec{E}$ e $d\vec{s}$ é de 90° e o produto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ é 0. Assim, de acordo com a Eq. 24-18, o potencial é o mesmo nos pontos *i* e *c*: $V_c - V_i = 0$.

No caso do segmento *cf*, temos $\theta = 45°$ e, de acordo com a Eq. 24-18,

$$V_f - V_i = -\int_c^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_c^f E(\cos 45°)\,ds$$
$$= -E(\cos 45°)\int_c^f ds.$$

A integral nesta equação é simplesmente o comprimento do segmento *cf*; de acordo com a Fig. 24-5*b*, esse comprimento é $d/\text{sen } 45°$. Assim,

$$V_f - V_i = -E(\cos 45°)\frac{d}{\text{sen } 45°} = -Ed. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como já era esperado, este resultado é igual ao obtido no item (a); a diferença de potencial entre dois pontos não depende da trajetória usada no cálculo. O moral é o seguinte: quando há necessidade de calcular a diferença de potencial entre dois pontos deslocando uma carga de prova entre eles é possível poupar tempo e trabalho escolhendo uma trajetória que facilite o uso da Eq. 24-18.

24-6 | Potencial Produzido por uma Carga Pontual

Vamos agora usar a Eq. 24-18 para obter uma expressão para o potencial elétrico V criado no espaço por uma carga pontual, tomando como referência um potencial zero no infinito. Considere um ponto P situado a uma distância R de uma partícula fixa de carga positiva q (Fig. 24-6). Para usar a Eq. 24-18, imaginemos que uma carga de prova q_0 é deslocada do ponto P até o infinito. Como a trajetória seguida pela carga de prova é irrelevante, podemos escolher a mais simples: uma reta que liga a partícula fixa ao ponto P e se estende até o infinito.

Para usar a Eq. 24-18, precisamos calcular o produto escalar

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta\,ds. \tag{24-22}$$

O campo elétrico $\vec{E}$ da Fig. 24-6 é radial e aponta para longe da partícula fixa; assim, o deslocamento elementar $d\vec{s}$ da partícula de prova tem a mesma direção que $\vec{E}$ em todos os pontos da trajetória escolhida. Isso significa que $\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$ na Eq. 24-22. Como a trajetória é radial, podemos fazer $ds = dr$. Nesse caso, a Eq. 24-18 se torna

$$V_f - V_i = -\int_R^\infty E\,dr. \tag{24-23}$$

onde usamos os limites $r_i = R$ e $r_f = \infty$. Temos ainda $V_i = V(R) = V$ e $V_f = V(\infty) = 0$. O campo E no ponto onde se encontra a carga de prova é dado pela Eq. 22-3:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{24-24}$$

Com essas substituições, a Eq. 24-23 se torna

$$0 - V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}. \tag{24-25}$$

Explicitando V e substituindo R por r, temos:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{24-26}$$

como o potencial elétrico V produzido por uma partícula de carga q a uma distância r da partícula.

Embora a Eq. 24-26 tenha sido demonstrada para uma partícula de carga positiva, a demonstração vale também para uma partícula de carga negativa, caso em que q é uma grandeza negativa. Observe que o sinal de V é igual ao sinal de q:

Uma partícula de carga positiva produz um potencial elétrico positivo; uma partícula de carga negativa produz um potencial elétrico negativo.

FIG. 24-6 A carga pontual positiva q produz um campo elétrico $\vec{E}$ e um potencial elétrico V no ponto P. Calculamos o potencial deslocando uma carga de prova q_0 do ponto P até o infinito. A figura mostra a carga de prova a uma distância r da carga pontual, durante um deslocamento elementar $d\vec{s}$.

A Fig. 24-7 mostra o gráfico gerado em computador da Eq. 24-26 para uma partícula de carga positiva; o valor absoluto de V está plotado no eixo vertical. Observe que o valor absoluto de V aumenta rapidamente quando r se aproxima de zero. Na verdade, de acordo com a Eq. 24-26 $V \to \infty$ quando $r \to 0$, embora essa tendência não seja visível no gráfico.

A Eq. 24-26 também pode ser usada para calcular o potencial elétrico *do lado de fora* ou *na superfície* de uma distribuição de cargas com simetria esférica. Podemos provar esse fato usando um dos teoremas de cascas das Seções 21-4 e 23-9 para substituir a distribuição esférica por uma carga pontual de mesmo valor situada no centro da distribuição. Isso mostra que a Eq. 24-26 pode ser empregada, contanto que não se deseje calcular um ponto no interior da distribuição.

FIG. 24-7 Gráfico gerado em computador do potencial elétrico $V(r)$ produzido por uma carga positiva situada na origem do plano xy. O potencial nos pontos do plano xy está plotado no eixo vertical. (As curvas de x e y constante foram traçadas para ajudar a visualização.) De acordo com a Eq. 24-26, $V \to \infty$ quando $r \to 0$, embora essa tendência não seja visível no gráfico.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

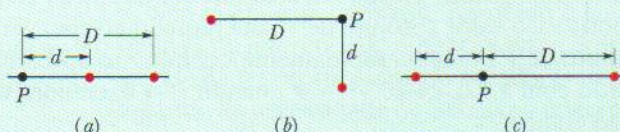
Tática 3:* *Determinação de uma Diferença de Potencial Para determinar uma diferença de potencial ΔV entre dois pontos na presença do campo criado por uma carga pontual isolada basta aplicar a Eq. 24-26 aos dois pontos e subtrair um resultado do outro. O valor de ΔV é o mesmo qualquer que seja o potencial escolhido como referência, já que esta escolha resulta em um termo constante que é eliminado na subtração.

24-7 | Potencial Produzido por um Grupo de Cargas Pontuais

Podemos calcular o potencial produzido em um certo ponto por um grupo de cargas pontuais com a ajuda do princípio de superposição. Usando a Eq. 24-26 com o sinal da carga incluído calculamos separadamente os potenciais produzidos pelas cargas no ponto dado e somamos os potenciais. No caso de n cargas o potencial total é dado por

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ cargas pontuais}). \tag{24-27}$$

onde q_i é o valor da carga de ordem i e r_i é a distância radial entre o ponto dado e a carga de ordem i. O somatório da Eq. 24-27 é uma *soma algébrica*, e não uma soma vetorial como a que foi usada para calcular o campo elétrico produzido por um grupo de cargas pontuais. Esta é uma vantagem importante do potencial em relação ao campo elétrico, já que é muito mais fácil somar escalares do que vetores.

TESTE 4 A figura mostra três arranjos de dois prótons. Coloque os arranjos na ordem do potencial elétrico produzido pelos prótons no ponto P, começando pelo maior.

Exemplo 24-3

Qual é o valor do potencial elétrico no ponto P, situado no centro do quadrado de cargas pontuais que aparece na Fig. 24-8*a*? A distância d é 1,3 m e as cargas são

$$q_1 = +12 \text{ nC}, \quad q_3 = +31 \text{ nC},$$
$$q_2 = -24 \text{ nC}, \quad q_4 = +17 \text{ nC}.$$

IDÉIA-CHAVE O potencial elétrico V no ponto P é a soma algébrica dos potenciais elétricos produzidos pelas quatro cargas. (Como o potencial elétrico é um escalar, as orientações das cargas são irrelevantes.)

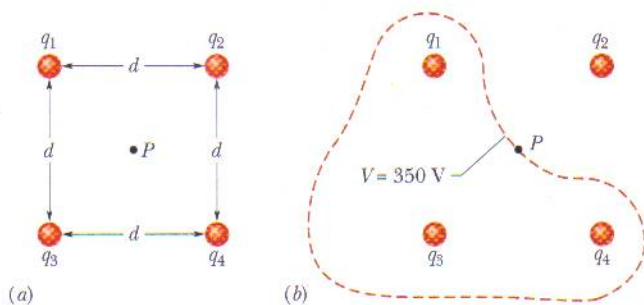



FIG. 24-8 (*a*) Quatro cargas pontuais são mantidas fixas nos vértices de um quadrado. (*b*) A curva fechada é uma seção reta, no plano da figura, da superfície eqüipotencial que contém o ponto P. (A curva é apenas um esboço.)

Cálculos: De acordo com a Eq. 24-27, temos:

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r}\right).$$

A distância r é $d/\sqrt{2}$ = 0,919 m e a soma das cargas é

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9}\text{ C}$$
$$= 36 \times 10^{-9}\text{ C}.$$

Assim,
$$V = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(36 \times 10^{-9}\text{ C})}{0{,}919\text{ m}}$$
$$\approx 350\text{ V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Nas vizinhanças das três cargas positivas da Fig. 24-8*a* o potencial assume valores positivos muito elevados. Nas proximidades da carga negativa o potencial assume valores negativos muito elevados. Assim, deve haver pontos no interior do quadrado nos quais o potencial tem o mesmo valor intermediário que no ponto P. A curva da Fig. 24-8*b* mostra a interseção do plano da figura com a superfície eqüipotencial que contém o ponto P. Qualquer ponto sobre essa curva tem o mesmo potencial do ponto P.

Exemplo 24-4

(a) Na Fig. 24-9*a* 12 elétrons (de carga $-e$) são mantidos fixos, com espaçamento uniforme, sobre uma circunferência de raio R. Em relação a $V = 0$ no infinito, quais são o potencial elétrico e o campo elétrico no centro C da circunferência?

IDÉIAS-CHAVE (1) O potencial elétrico V no ponto C é a soma algébrica dos potenciais elétricos produzidos pelos elétrons. (Como o potencial elétrico é um escalar, a posição dos elétrons na circunferência é irrelevante.) (2) O campo elétrico no ponto C é uma grandeza vetorial e, portanto, a posição dos elétrons na circunferência *não é* irrelevante.

Cálculos: Como todos os elétrons possuem a mesma carga $-e$ e estão todos à mesma distância R de C, a Eq. 24-27 nos dá

$$V = -12\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R}. \qquad \text{(Resposta)} \quad (24\text{-}28)$$

Por causa da simetria do arranjo da Fig. 24-9*a*, o vetor campo elétrico no ponto C associado a um elétron é cancelado pelo vetor campo elétrico associado ao elétron diametralmente oposto. Assim, no ponto C,

$$\vec{E} = 0. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Se os elétrons são deslocados ao longo da circunferência até ficarem distribuídos com espaçamento desigual ao longo de um arco de 120° (Fig. 24-9*b*), qual é o potencial no ponto C? O campo elétrico no ponto C sofre alguma mudança?

FIG. 24-9 (*a*) Doze elétrons uniformemente espaçados sobre uma circunferência. (*b*) Os mesmos elétrons, distribuídos com espaçamento não-uniforme ao longo de um arco da circunferência original.

Raciocínio: O potencial continua a ser dado pela Eq. 24-28, já que a distância entre os elétrons e o ponto C não mudou e a posição dos elétrons na circunferência é irrelevante. O campo elétrico, porém, deixa de ser nulo, pois a distribuição das cargas não é mais simétrica. O novo campo elétrico no ponto C está orientado na direção de algum ponto do arco de 120°.

24-8 | Potencial Produzido por um Dipolo Elétrico

Vamos agora aplicar a Eq. 24-27 a um dipolo elétrico para calcular o potencial em um ponto arbitrário P da Fig. 24-10*a*. No ponto P, a carga pontual positiva (que está a uma distância $r_{(+)}$) produz um potencial $V_{(+)}$, e a carga pontual negativa (que está a uma distância $r_{(-)}$) produz um potencial $V_{(-)}$. Assim, de acordo com a Eq. 24-27, o potencial total no ponto P é dado por

$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}. \qquad (24\text{-}29)$$

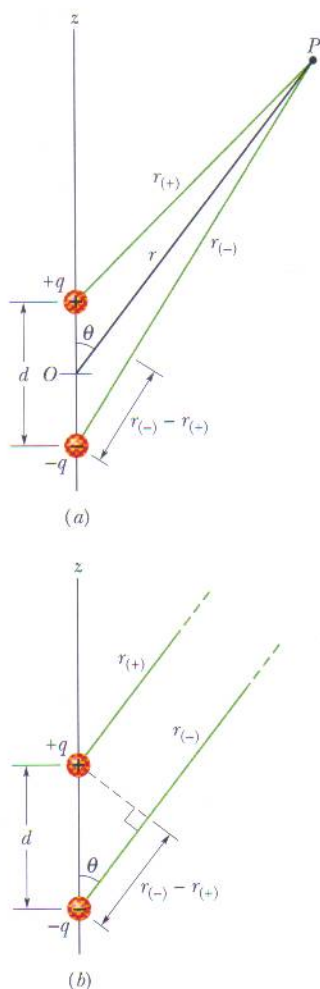



FIG. 24-10 (*a*) O ponto P está a uma distância r do ponto central O de um dipolo. A reta OP faz um ângulo θ com o eixo do dipolo. (*b*) Se o ponto P está a uma grande distância do dipolo, as retas de comprimentos $r_{(+)}$ e $r_{(-)}$ são aproximadamente paralelas à reta de comprimento r, e a reta tracejada é aproximadamente perpendicular à reta de comprimento $r_{(-)}$.

Os dipolos que ocorrem naturalmente, como os que estão presentes em muitas moléculas, têm dimensões reduzidas. Assim, normalmente estamos interessados apenas em pontos relativamente distantes do dipolo, tais que $r \gg d$, onde d é a distância entre as cargas. Nessas condições, podemos escrever, de acordo com a Fig. 24-10*b*,

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \quad \text{e} \quad r_{(-)}r_{(-)} \approx r^2.$$

Substituindo esses valores na Eq. 24-29, obtemos para V o valor aproximado

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2},$$

onde o ângulo θ é medido em relação ao eixo do dipolo, como na Fig. 24-10*a*. O potencial V também pode ser escrito na forma

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad \text{(dipolo elétrico)}, \tag{24-30}$$

onde $p\ (= qd)$ é o módulo do momento dipolar elétrico $\vec{p}$ definido na Seção 22-5. O vetor $\vec{p}$ tem a direção do eixo do dipolo e aponta da carga negativa para a carga positiva. (Isso significa que o ângulo θ é medido em relação a $\vec{p}$.)

TESTE 5 Três pontos são escolhidos a distâncias iguais do centro do dipolo da Fig. 24-10 (muito maiores que a distância entre as cargas). O ponto *a* está sobre o eixo do dipolo, acima da carga positiva; o ponto *b* está sobre o eixo, abaixo da carga negativa; o ponto *c* está sobre a mediatriz do segmento de reta que liga as duas cargas. Coloque os pontos na ordem do potencial elétrico do dipolo, começando pelo maior (mais positivo).

Momento Dipolar Induzido

Muitas moléculas, como a da água, possuem um momento dipolar elétrico *permanente*. Em outras moléculas (conhecidas como *moléculas apolares*) e em todos os átomos isolados os centros das cargas positivas e negativas coincidem (Fig. 24-11*a*) e, portanto, o momento dipolar é zero. Quando um átomo ou molécula apolar é submetido a um campo elétrico externo o campo distorce as órbitas eletrônicas e separa os centros das cargas positivas e negativas (Fig. 24-11*b*). Como a carga dos elétrons é negativa, eles são deslocados no sentido oposto ao do campo. Esse deslocamento dá origem a um momento dipolar $\vec{p}$ que aponta na direção do campo. Nesse caso, dizemos que o momento dipolar é *induzido* pelo campo e que o átomo ou molécula é *polarizado* pelo campo (ou seja, passa a ter um lado positivo e um lado negativo). Quando o campo é removido o momento dipolar induzido e a polarização desaparecem.

24-9 | Potencial Produzido por uma Distribuição Contínua de Cargas

Quando uma distribuição de cargas é contínua (como é o caso de uma barra ou um disco uniformemente carregado) não podemos usar o somatório da Eq. 24-27 para calcular o potencial V em um ponto P. Em vez disso, devemos escolher um elemento

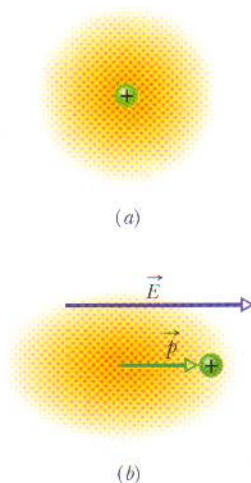



FIG. 24-11 (*a*) Representação esquemática de um átomo isolado, mostrando o núcleo positivamente carregado (verde) e os elétrons negativamente carregados (sombreado dourado). Os centros das cargas positivas e negativas coincidem. (*b*) Quando o átomo é submetido a um campo elétrico externo $\vec{E}$, os orbitais eletrônicos são distorcidos e os centros das cargas positivas e negativas deixam de coincidir, o que dá origem a um momento dipolar induzido $\vec{p}$. A distorção foi muito exagerada na figura.

de carga dq, calcular o potencial dV produzido por dq no ponto P e integrar para toda a distribuição de cargas.

Vamos tomar novamente o potencial no infinito como sendo nulo. Tratando o elemento de carga dq como uma carga pontual, podemos usar a Eq. 24-26 para expressar o potencial dV no ponto P devido a dq:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad (dq \text{ positivo ou negativo}), \tag{24-31}$$

onde r é a distância entre P e dq. Para calcular o potencial total V no ponto P, integramos a Eq. (24-31) para todos os elementos de carga:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}. \tag{24-32}$$

A integral deve ser calculada para toda a distribuição de cargas. Observe que, como o potencial elétrico é um escalar, não existem *componentes de vetores* a serem consideradas na Eq. 24-32.

Vamos agora examinar duas distribuições contínuas de cargas, uma linha de cargas e um disco carregado.

Linha de Cargas

Na Fig. 24-12*a* uma barra fina não-condutora de comprimento L possui uma densidade linear de cargas positivas λ. Vamos determinar o potencial elétrico V produzido pela barra no ponto P, situado a uma distância perpendicular d da extremidade esquerda da barra.

Começamos por considerar um elemento de comprimento dx da barra, como mostra a Fig. 24-12*b*. A carga desse elemento é dada por

$$dq = \lambda\, dx. \tag{24-33}$$

Esse elemento produz um potencial elétrico dV no ponto P, que está a uma distância $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$ do elemento. Tratando o elemento como uma carga pontual, podemos usar a Eq. 24-31 para escrever o potencial dV como

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}. \tag{24-34}$$

Como a carga da barra é positiva e tomamos como referência $V = 0$ no infinito, sabemos da Seção 24-6 que dV na Eq. 24-34 deve ser positivo.

Agora estamos em condições de calcular o potencial total V produzido pela barra no ponto P integrando a Eq. 24-34 ao longo da barra, de $x = 0$ a $x = L$ com o auxílio da integral 17 do Apêndice E. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{(x^2 + d^2)^{1/2}}\,dx \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x + (x^2 + d^2)^{1/2}\right)\right]_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L + (L^2 + d^2)^{1/2}\right) - \ln d\right]. \end{aligned}$$

Podemos simplificar esse resultado usando a identidade $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, o que nos dá

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d}\right]. \tag{24-35}$$

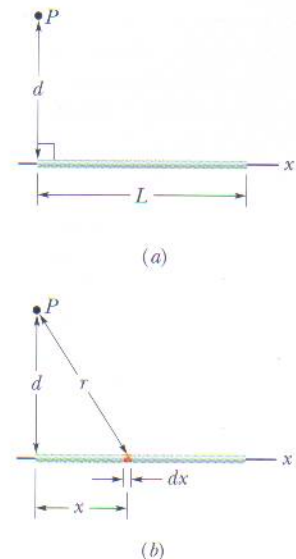



FIG. 24-12 (*a*) Uma barra fina, uniformemente carregada, produz um potencial elétrico V no ponto P. (*b*) Um elemento de carga produz um elemento de potencial dV no ponto P.

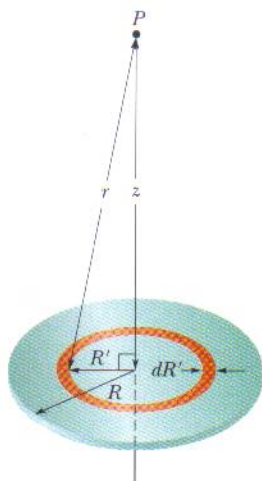



FIG. 24-13 Um disco de plástico de raio R com uma densidade de cargas uniforme σ na superfície superior. Estamos interessados em calcular o potencial V em um ponto P do eixo central do disco.

Como V é uma soma de valores positivos de dV, deve ser um número positivo, mas será que a Eq. 24-35 fornece sempre um número positivo? Como o argumento do logaritmo é maior que 1 para qualquer par de valores de L e d, o logaritmo é um número positivo e V é realmente positivo.

Disco Carregado

Na Seção 22-7 calculamos o módulo do campo elétrico em pontos sobre o eixo central de um disco de plástico de raio R com uma densidade de cargas uniforme σ em uma das superfícies. Vamos agora obter uma expressão para $V(z)$, o potencial elétrico em um ponto qualquer do eixo central.

Na Fig. 24-13, considere um elemento de área constituído por um anel de raio R' e largura radial dR'. A carga desse elemento é dada por

$$dq = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

onde $(2\pi R')(dR')$ é a área do anel. Como o ponto P está sobre o eixo central, todas as partes do elemento de carga estão à mesma distância r do ponto. Com a ajuda da Fig. 24-13 podemos usar a Eq. 24-31 para escrever a contribuição desse anel para o potencial elétrico no ponto P na forma

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \tag{24-36}$$

Para calcular o potencial total somamos (por integração) as contribuições de todos os anéis, de $R' = 0$ até $R' = R$:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{R'\,dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z). \tag{24-37}$$

Observe que a variável de integração na segunda integral da Eq. 24-37 é R' e não z, que permanece constante enquanto a integração ao longo da superfície do disco está sendo executada. (Observe também que no cálculo da integral supusemos que $z \geq 0$.)

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 4:* *Problemas com Sinais no Cálculo de Potenciais Elétricos Quando calculamos o potencial V produzido em um ponto P por uma linha de cargas ou qualquer outra distribuição contínua pode haver um problema com os sinais. A seguir apresentamos um método geral para escolher corretamente os sinais.

Se a carga é negativa, os símbolos dq e λ devem ser usados para indicar grandezas negativas ou é melhor representar explicitamente os sinais, escrevendo $-dq$ e $-\lambda$? Os dois métodos são aceitáveis, contanto que esteja bem claro qual é a notação que está sendo usada, para que, no final, o sinal de V possa ser interpretado corretamente.

Outra abordagem, que pode ser usada quando todas as cargas do problema têm o mesmo sinal, é fazer com que os símbolos dq e λ representem apenas o valor absoluto das cargas. Nesse caso o resultado do cálculo fornece o valor absoluto de V no ponto P e é necessário acrescentar um sinal a V com base no sinal da carga. (Se a referência usada é um potencial zero no infinito, a uma carga positiva corresponde um potencial positivo e a uma carga negativa corresponde um potencial negativo.)

Se os limites da integral usada para calcular um potencial são invertidos, o valor obtido para V muda de sinal, mas o valor absoluto de V permanece o mesmo. Assim, é mais seguro ignorar o sinal do resultado das integrações e determinar o sinal apropriado de V através do sinal da carga envolvida. Por exemplo: se os limites da integral que precede a Eq. 24-35 fossem tomados no sentido inverso, de L a 0, o potencial calculado seria negativo. Nesse caso, descartaríamos o sinal e consideraríamos o potencial como positivo, pois sabemos que a carga responsável pelo potencial é positiva.

24-10 | Cálculo do Campo Elétrico a Partir do Potencial

Na Seção 24-5 vimos que era possível calcular o potencial em um ponto f a partir do conhecimento do valor do campo elétrico ao longo de uma trajetória de um ponto de referência até o ponto f. Nesta seção vamos discutir o problema inverso, ou seja, o cálculo do campo elétrico a partir do potencial. Como se pode ver na Fig. 24-3, resolver esse problema graficamente é muito fácil: Se conhecemos o potencial V para

todos os pontos nas vizinhanças de uma distribuição de cargas, podemos desenhar uma família de superfícies eqüipotenciais. As linhas de campo elétrico, desenhadas perpendicularmente a essas superfícies, revelam a variação de $\vec{E}$. O que estamos buscando é um método matemático equivalente a esse processo gráfico.

A Fig. 24-14 mostra seções retas de uma família de superfícies eqüipotenciais muito próximas umas das outras; a diferença de potencial entre superfícies adjacentes é dV. Como sugere a figura, o campo $\vec{E}$ em qualquer ponto P é perpendicular à superfície eqüipotencial que passa por P.

Suponha que uma carga de prova positiva q_0 sofra um deslocamento $d\vec{s}$ de uma superfície eqüipotencial para a superfície vizinha. De acordo com a Fig. 24-14 o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre a carga de prova durante o deslocamento é $-q_0 dV$. De acordo com a Eq. 24-16 e a Fig. 24-14, esse trabalho também pode ser escrito como o produto escalar $(q_0\vec{E}) \cdot d\vec{s}$ ou $q_0 E(\cos\theta)ds$. Igualando as duas expressões para o trabalho, obtemos

FIG. 24-14 Uma carga de prova positiva q_0 sofre um deslocamento $d\vec{s}$ de uma superfície eqüipotencial para a superfície vizinha. (A distância entre as superfícies foi exagerada na figura.) O deslocamento $d\vec{s}$ faz um ângulo θ com o campo elétrico $\vec{E}$.

$$-q_0\, dV = q_0 E(\cos\theta)\, ds, \tag{24-38}$$

ou

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}. \tag{24-39}$$

Como $E\cos\theta$ é a componente de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{s}$, a Eq. 24-39 se torna

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{24-40}$$

Escrevemos o campo E com um índice e substituímos o símbolo de derivada pelo de derivada parcial para ressaltar o fato de que a Eq. 24-40 envolve apenas a variação de V ao longo de um certo eixo (no caso, o eixo que chamamos de s), e apenas a componente de $\vec{E}$ ao longo desse eixo. Traduzida em palavras, a Eq. 24-40 (que é essencialmente a operação inversa da Eq. 24-18) afirma o seguinte:

A componente de $\vec{E}$ em qualquer direção do espaço é o negativo da taxa de variação do potencial elétrico com a distância nessa direção.

Se tomamos o eixo s como sendo, sucessivamente, os eixos x, y e z, verificamos que as componentes de $\vec{E}$ em qualquer ponto do espaço são dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{24-41}$$

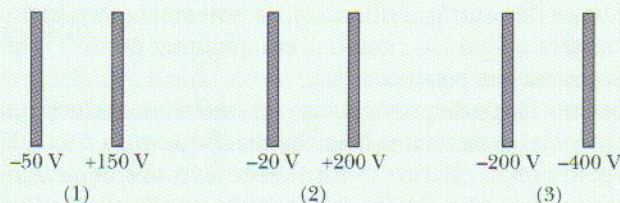
Assim, se conhecemos V para todos os pontos nas vizinhanças de uma distribuição de cargas, ou seja, se conhecemos a função $V(x, y, z)$ podemos obter as componentes de $\vec{E}$ e, portanto, o próprio $\vec{E}$, bastando para isso calcular os valores de três derivadas parciais.

No caso da situação simples em que o campo elétrico $\vec{E}$ é uniforme, a Eq. 24-40 se torna

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}, \tag{24-42}$$

onde s é a direção perpendicular às superfícies eqüipotenciais. A componente do campo elétrico é sempre nula na direção paralela a superfícies eqüipotenciais.

TESTE 6 A figura mostra três pares de placas paralelas separados pela mesma distância e o potencial elétrico de cada placa. O campo elétrico entre as placas é uniforme e perpendicular às placas. (a) Ordene os pares de acordo com o módulo do campo elétrico entre as placas, começando pelo maior. (b) Para que par de placas o campo elétrico aponta para

a direita? (c) Se um elétron é liberado a partir do repouso a meio caminho entre as duas placas do terceiro par, ele permanece no mesmo lugar, começa a se mover para a direita com velocidade constante, começa se mover para a esquerda com velocidade constante, é acelerado para a direita ou é acelerado para a esquerda?

Exemplo 24-5

O potencial elétrico em um ponto sobre o eixo central de um disco uniformemente carregado é dado pela Eq. 24-37,

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

A partir dessa equação, determine uma expressão para o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo do disco.

IDÉIAS-CHAVE Estamos interessados em calcular o campo elétrico $\vec{E}$ em função da distância z ao longo do eixo do disco. Para qualquer valor de z $\vec{E}$ deve apontar ao longo do eixo do disco, já que o disco possui simetria circular em relação a esse eixo. Assim, basta conhecermos a componente E_z de $\vec{E}$. Essa componente é o negativo da taxa de variação do potencial com a distância z.

Cálculo: De acordo com a terceira das Eqs. 24-41, podemos escrever

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}(\sqrt{z^2 + R^2} - z)$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right). \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta é a mesma expressão que foi obtida por integração na Seção 22-7 usando a lei de Coulomb.

24-11 | Energia Potencial Elétrica de um Sistema de Cargas Pontuais

Na Seção 24-2 discutimos a energia potencial elétrica de uma partícula carregada quando uma força eletrostática fazia trabalho sobre ela. Naquela seção supusemos que as cargas responsáveis pela força estavam fixas no lugar, de modo que nem a força nem o campo elétrico correspondente podiam ser influenciados pela presença da carga de prova. Nesta seção vamos adotar um ponto de vista mais geral e determinar a energia potencial elétrica de um *sistema* de cargas devido ao campo elétrico produzido *por* essas mesmas cargas.

Para dar um exemplo simples, suponha que dois corpos com cargas do mesmo tipo são aproximados. O trabalho necessário para realizar essa aproximação fica armazenado na forma de energia potencial elétrica dos dois corpos (contanto que a energia cinética dos corpos não varie no processo). Se mais tarde as cargas são liberadas essa energia é recuperada, no todo ou em parte, como a energia cinética dos corpos que se afastam um do outro por causa da repulsão mútua.

Definimos a energia potencial elétrica *de um sistema de cargas pontuais*, mantidas em posições fixas por forças não-especificadas, da seguinte forma:

> A energia potencial elétrica de um sistema de cargas pontuais fixas é igual ao trabalho que deve ser executado por um agente externo para montar o sistema, começando com as cargas a uma distância infinita umas das outras.

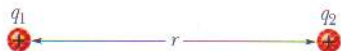



FIG. 24-15 Duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância r.

Supomos que as cargas estão paradas tanto nas posições iniciais, infinitamente distantes, como nas posições finais.

A Fig. 24-15 mostra duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância r. Para determinar a energia potencial elétrica desse sistema de duas cargas devemos montar mentalmente o sistema, começando com as duas cargas em repouso e a uma distância infinita uma da outra. Quando trazemos a carga q_1 do infinito e a colocamos no lugar não realizamos nenhum trabalho, porque não existe nenhuma força eletrostática agindo sobre q_1. Quando, porém, trazemos q_2 do infinito e a colocamos no lugar realizamos um trabalho, já que q_1 exerce uma força eletrostática sobre q_2 durante o deslocamento.

Podemos calcular esse trabalho com o auxílio da Eq. 24-8, eliminando o sinal negativo (já que estamos interessados no trabalho realizado *contra* o campo, e não *pelo* campo) e substituindo a carga genérica q por q_2. O trabalho é, portanto, igual a q_2V, onde V é o potencial que foi criado por q_1 no ponto em que colocamos q_2. De acordo com a Eq. 24-26, esse potencial é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}.$$

Assim, a energia potencial elétrica do par de cargas pontuais da Fig. 24-15 é

$$U = W = q_2V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}. \qquad (24\text{-}43)$$

Se as cargas têm o mesmo sinal devemos realizar um trabalho positivo para aproximar as partículas, já que elas se repelem mutuamente e, por isso, a força necessária para aproximá-las tem o mesmo sentido que o deslocamento das partículas a partir do infinito. Assim, de acordo com a Eq. 24-43 a energia potencial do sistema é positiva. Se as cargas têm sinais opostos, as partículas tendem a se aproximar espontaneamente e temos que exercer uma força no sentido oposto ao do caso anterior para mantê-las estacionárias. Nesse caso, o trabalho é negativo, já que a força tem o sentido oposto ao do deslocamento das partículas a partir do infinito; assim, a energia potencial do sistema é negativa. O Exemplo 24-6 mostra como aplicar o processo ao caso em que existem mais de duas cargas envolvidas.

Exemplo 24-6

A Fig. 24-16 mostra três cargas pontuais mantidas fixas no lugar por forças não-especificadas. Qual é a energia potencial elétrica U desse sistema de cargas? Suponha que d = 12 cm e que

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q, \quad \text{e} \quad q_3 = +2q,$$

onde q = 150 nC.

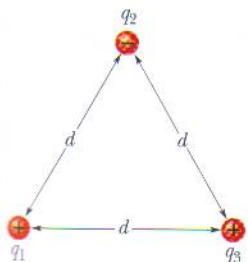



FIG. 24-16 Três cargas mantidas fixas nos vértices de um triângulo eqüilátero. Qual é a energia potencial elétrica do sistema?

IDÉIA-CHAVE A energia potencial U do sistema é igual ao trabalho necessário para montar o sistema, começando com as cargas a uma distância infinita.

Cálculos: Vamos montar mentalmente o sistema da Fig. 24-16, começando com uma das cargas pontuais no lugar, q_1, digamos, e as outras no infinito. Trazemos outra carga, q_2, do infinito, e a colocamos no lugar. Usando a Eq. 24-43 com d no lugar de r, obtemos a seguinte expressão para a energia potencial associada ao par de cargas pontuais q_1 e q_2:

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d}.$$

Agora trazemos a última carga pontual, q_3, do infinito e a colocamos no lugar. O trabalho necessário para realizar esse último passo é igual à soma do trabalho que temos que executar para aproximar q_3 de q_1 com o trabalho que temos que executar para aproximar q_3 de q_2. De acordo com a Eq. 24-43, temos:

$$W_{13} + W_{23} = U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{d}.$$

A energia potencial total U do sistema de três cargas é a soma das energias potenciais associadas aos três pares de cargas. Esta soma (que não depende da ordem em que as cargas são colocadas) é a seguinte:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d}\right)$$
$$= -\frac{10q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$
$$= -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{0{,}12\ \text{m}}$$
$$= -1{,}7 \times 10^{-2}\ \text{J} = -17\ \text{mJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O fato de obtermos uma energia potencial negativa significa que um trabalho negativo teria que ser feito para montar a estrutura, começando com as três cargas em repouso e a uma distância infinita. Dito de outra forma, isso significa que um agente externo teria que executar um trabalho de 17 mJ para desmontar a estrutura e deixar as três cargas em repouso e a uma distância infinita.

Exemplo 24-7 Aumente sua capacidade

Uma partícula alfa (dois prótons e dois nêutrons) se aproxima de um átomo de ouro estacionário (79 prótons e 118 nêutrons), passando pela nuvem de elétrons que envolve o núcleo e rumando diretamente para o núcleo (Fig. 24-17). A partícula alfa diminui de velocidade até parar e inverter seu movimento quando está a uma distância $r = 9{,}23$ fm do centro do núcleo de ouro. (Como a massa do núcleo de ouro é muito maior que a da partícula alfa, podemos supor que o núcleo de ouro se mantém imóvel durante o processo.) Qual era a energia cinética K_i da partícula alfa quando estava a uma distância muito grande (e, portanto, do lado de fora) do átomo de ouro? Suponha que a única força entre a partícula alfa e o núcleo de ouro é a força eletrostática.

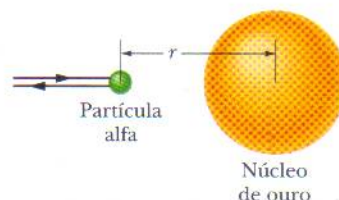



FIG. 24-17 Uma partícula alfa, rumando diretamente para o centro de um núcleo de ouro, pára por um instante (quando toda a sua energia cinética se converteu em energia potencial elétrica) e, em seguida, passa a se mover no sentido oposto.

IDÉIA-CHAVE Durante todo o processo a energia mecânica do sistema *partícula alfa + átomo de ouro* é conservada.

Raciocínio: Quando a partícula alfa está fora do átomo a energia potencial elétrica inicial U_i é zero porque o átomo possui um número igual de elétrons e prótons, que produzem um campo elétrico *resultante* nulo. Depois que a partícula alfa passa pela nuvem de elétrons, porém, o campo elétrico criado pelos elétrons do átomo de ouro passa a ser zero. A razão para isso é que os elétrons se comportam como uma casca carregada com uma densidade uniforme de cargas negativas e, como vimos na Seção 23-9, o campo produzido por uma casca desse tipo é zero na região envolvida pela casca. Por outro lado, a partícula alfa continua a experimentar os efeitos do campo elétrico criado pelo núcleo, que exerce uma força de repulsão sobre os prótons da partícula alfa.

Enquanto a partícula alfa está sendo desacelerada por essa força de repulsão, sua energia cinética é transformada em energia potencial elétrica do sistema. A transformação é total no momento em que a velocidade e a energia cinética da partícula alfa se anulam e a energia cinética é $K_f = 0$.

Cálculos: De acordo com a lei de conservação da energia mecânica,

$$K_i + U_i = K_f + U_f. \qquad (24\text{-}44)$$

Conhecemos dois termos da Eq. 24-44: $U_i = 0$ e $K_f = 0$. Sabemos também que a energia potencial U_f no instante em que a velocidade da partícula alfa se anula é dada pelo lado direito da Eq. 24-43, com $q_1 = 2e$, $q_2 = 79e$ (onde e é a carga elementar, $1{,}60 \times 10^{-19}$ C) e $r = 9{,}23$ fm. Assim, de acordo com a Eq. 24-44, temos:

$$K_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2e)(79e)}{9{,}23\ \text{fm}}$$
$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(158)(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{9{,}23 \times 10^{-15}\ \text{m}}$$
$$= 3{,}94 \times 10^{-12}\ \text{J} = 24{,}6\ \text{MeV}. \qquad \text{(Resposta)}$$

24-12 | Potencial de um Condutor Carregado

Na Seção 23-6 concluímos que $\vec{E} = 0$ para todos os pontos no interior de um condutor. Em seguida, usamos a lei de Gauss para demonstrar que qualquer carga em excesso colocada em um condutor se acumula na superfície externa. (Isso acontece mesmo que o condutor tenha uma cavidade interna.) Vamos agora usar o primeiro desses fatos para provar uma extensão do segundo:

Uma carga em excesso colocada em um condutor se distribui na superfície do condutor de tal forma que o potencial é o mesmo em todos os pontos do condutor (tanto na superfície como no interior). Isso acontece mesmo que o condutor tenha uma cavidade interna e mesmo que essa cavidade interna contenha uma carga elétrica.

Esta afirmação é uma conseqüência direta da Eq. 24-18, segundo a qual

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

Como $\vec{E} = 0$ em todos os pontos no interior de um condutor, $V_i = V_f$ para qualquer par de pontos i e f no interior do condutor.

A Fig. 24-18a mostra um gráfico do potencial elétrico em função da distância r do centro de curvatura de uma casca esférica condutora com 1,0 m de raio e uma carga de 1,0 μC. Para pontos do lado de fora da casca podemos calcular $V(r)$ usando a Eq. 24-26, já que a carga q se comporta para esses pontos externos como se estivesse concentrada no centro da casca. Essa equação é válida até a superfície da casca. Vamos agora supor que uma carga de prova seja introduzida na casca através de um pequeno furo e deslocada até o centro da casca. Não é necessário executar nenhum trabalho para realizar esse deslocamento, já que a força eletrostática é nula em todos os pontos do lado de dentro da casca. Assim, o potencial em todos os pontos do lado de dentro da casca é igual ao potencial na superfície da casca, como mostra a Fig. 24-18a.

A Fig. 24-18b mostra a variação do campo elétrico com a distância radial para a mesma casca. Observe que $E = 0$ em todos os pontos situados do lado de dentro da casca. De acordo com a Eq. 24-40, o gráfico da Fig. 24-18b pode ser obtido a partir do gráfico da Fig. 24-18a derivando o gráfico da Fig. 24-18a em relação a r (lembre-se de que a derivada de uma constante é zero). De acordo com a Eq. 24-19, o gráfico da Fig. 24-18a pode ser obtido a partir do gráfico da Fig. 24-18b integrando o gráfico da Fig. 24-18b em relação a r.

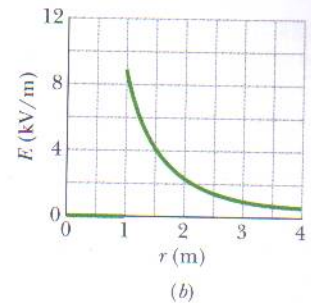
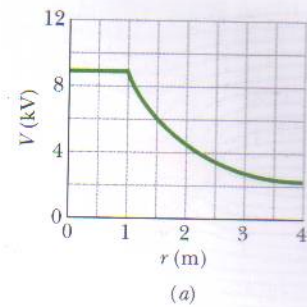



FIG. 24-18 (a) Gráfico de $V(r)$ para uma casca esférica com 1,0 m de raio. (b) Gráfico de $E(r)$ para a mesma casca.

Centelhamento de um Condutor Carregado

Nos condutores não-esféricos uma carga superficial não se distribui uniformemente pela superfície do condutor. Nos vértices e arestas a densidade de cargas superficiais (e, portanto, o campo elétrico externo, que é proporcional à densidade de cargas superficiais) pode atingir valores muito elevados. O ar em torno desses vértices e arestas pode se ionizar, produzindo as centelhas que golfistas e montanhistas observam na ponta de arbustos, tacos de golfe e martelos de alpinismo quando o céu está carregado. Essas centelhas, como o cabelo em pé, podem ser um sinal de que um relâmpago está para acontecer. Nessas circunstâncias, é mais prudente abrigar-se no interior de uma casca condutora, local onde o campo elétrico com certeza é zero. Um carro (a menos que se trate de um modelo conversível ou com carroceria de plástico) constitui uma proteção quase ideal (Fig. 24-19).

FIG. 24-19 Uma forte descarga elétrica atinge um automóvel e chega à terra através de uma centelha que parte da calota do pneu dianteiro esquerdo (observe o clarão), sem fazer mal ao motorista. *(Cortesia da Westinghouse Electric Corporation)*

O corpo humano é um bom condutor de eletricidade, e pode se carregar facilmente quando as pessoas caminham em um tapete felpudo ou trocam de roupa. Essas ações produzem muitos pontos de contato entre o tecido e a pele. Para muitos tipos de tecidos esses contatos permitem que alguns dos elétrons de condução de uma superfície sejam transferidos para a outra superfície. Assim, por exemplo, o leitor pode ganhar elétrons de condução ao tirar um suéter. Quando a umidade ambiente é elevada esses elétrons são rapidamente removidos do corpo por gotículas de água presentes no ar. Quando a umidade é baixa, porém, a carga acumulada atinge valores tão ele-

FIG. 24.20 Um condutor descarregado submetido a um campo elétrico externo. Os elétrons livres do condutor se distribuem na superfície de tal forma que o campo elétrico no interior do objeto é nulo e o campo elétrico na superfície é perpendicular à superfície.

vados que a diferença de potencial entre o corpo e o ambiente pode chegar a mais de 5 kV. Se você tocar em uma das placas de circuito impresso de um computador com o corpo carregado dessa forma a carga em excesso do seu corpo pode atravessar os microcircuitos do computador, sobrecarregando-os e inutilizando-os.

São freqüentes os casos, em regiões de clima seco, em que o contato entre uma pessoa e certos materiais deixa a pessoa tão carregada que produz uma centelha ao se descarregar. Medidas realizadas por pesquisadores mostraram que depois de descer em um escorrega de plástico uma criança pode adquirir um potencial de mais de 60 kV. Se depois disso a criança aproximar a mão de um bom condutor de eletricidade (como outra criança, por exemplo) haverá provavelmente uma centelha, e as duas crianças sofrerão um choque elétrico.

Esse tipo de centelha pode ser muito perigoso se acontecer em um centro cirúrgico, onde podem existir gases inflamáveis (anestésicos) no ar. Para que não haja um acúmulo de cargas elétricas, médicos e enfermeiras usam sapatos condutores e o piso é feito de material condutor. Descargas elétricas também já causaram incêndios em postos de gasolina de auto-serviço, quando um freguês entrou de volta no carro para esperar que o tanque do veículo acabasse de encher. O contato com o banco do carro pode deixar um motorista com uma carga elétrica tão grande que uma centelha pode saltar entre seus dedos e a ponta da mangueira quando ele sai para recolher a mangueira. Esta centelha pode inflamar os vapores de gasolina que se espalharam no ar enquanto o carro estava sendo abastecido.

Condutor em um Campo Elétrico Externo

Se um objeto feito de um material condutor é submetido a um *campo elétrico externo*, como na Fig. 24-20, o potencial continua a ser o mesmo em todos os pontos do objeto. Os elétrons de condução se distribuem na superfície de tal forma que o campo elétrico que produzem no interior do objeto cancela o campo elétrico externo. Além disso, a distribuição de elétrons faz com que o campo elétrico total seja perpendicular à superfície em todos os pontos da superfície. Se houvesse um meio de remover o condutor da Fig. 24-20 deixando as cargas superficiais no lugar, a configuração de campo elétrico permaneceria exatamente a mesma, tanto para os pontos externos como para os pontos internos.

REVISÃO E RESUMO

Energia Potencial Elétrica A variação ΔU da energia potencial elétrica U de uma carga pontual, quando a carga se desloca de um ponto inicial i para um ponto final f na presença de um campo elétrico, é dada por

$$\Delta U = U_f - U_i = -W, \tag{24-1}$$

onde W_∞ é o trabalho realizado pela força eletrostática (associada ao campo elétrico externo) sobre a carga pontual durante o deslocamento de i para f. Se a energia potencial é definida como sendo zero no infinito, a **energia potencial elétrica** U da carga pontual em um ponto qualquer é dada por

$$U = -W_\infty, \tag{24-2}$$

onde W_∞ é o trabalho executado pela força eletrostática sobre a carga pontual quando a carga é deslocada do infinito para o ponto considerado.

Diferença de Potencial Elétrico e Potencial Elétrico Definimos a **diferença de potencial** ΔV entre dois pontos i e f na presença de um campo elétrico como

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q}, \tag{24-7}$$

onde q é a carga de uma partícula sobre a qual é realizado trabalho pelo campo. O **potencial** em um ponto é dado por

$$V = -\frac{W_\infty}{q}. \tag{24-8}$$

A unidade de potencial no SI é o *volt*: 1 volt = 1 joule por coulomb.

O potencial e a diferença de potencial também podem ser escritos em termos da energia potencial elétrica U de uma partícula de carga q na presença de um campo elétrico:

$$V = \frac{U}{q}, \tag{24-5}$$

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q}. \tag{24-6}$$

Superfícies Eqüipotenciais Os pontos que pertencem a uma **superfície eqüipotencial** possuem o mesmo potencial elétri-

co. O trabalho realizado sobre uma carga de prova para deslocá-la de uma superfície eqüipotencial para outra não depende da localização dos pontos inicial e final nem da trajetória entre os pontos. O campo elétrico $\vec{E}$ é sempre perpendicular à superfície eqüipotencial correspondente.

Cálculo de V a Partir de $\vec{E}$ A diferença de potencial elétrico entre dois pontos i e f é

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}, \qquad (24\text{-}18)$$

onde a integral é calculada ao longo de qualquer trajetória que comece no ponto i e termine no ponto f. Se tomamos como referência o potencial $V_i = 0$, o potencial em um ponto qualquer é dado por

$$V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}. \qquad (24\text{-}19)$$

Potencial Produzido por Cargas Pontuais O potencial elétrico produzido por uma carga pontual a uma distância r da carga é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (24\text{-}26)$$

onde V tem o sinal de q. O potencial produzido por um conjunto de cargas pontuais é dado por

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}. \qquad (24\text{-}27)$$

Potencial Produzido por um Dipolo Elétrico A uma distância r de um dipolo elétrico com um momento dipolar elétrico $p = qd$, o potencial elétrico do dipolo é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad (24\text{-}30)$$

para $r \gg d$; o ângulo θ é definido na Fig. 24-10.

Potencial Produzido por uma Distribuição Contínua de Cargas No caso de uma distribuição contínua de cargas, a Eq. 24-27 se torna

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \qquad (24\text{-}32)$$

onde a integral é calculada para toda a distribuição.

Cálculo de $\vec{E}$ a Partir de V A componente de $\vec{E}$ em qualquer direção é o negativo da taxa de variação do potencial com a distância na direção considerada:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \qquad (24\text{-}40)$$

As componentes x, y e z de $\vec{E}$ são dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (24\text{-}41)$$

Se $\vec{E}$ é uniforme, a Eq. 24-40 se reduz a

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}, \qquad (24\text{-}42)$$

onde s é a direção perpendicular às superfícies eqüipotenciais. O campo elétrico é zero na direção paralela às superfícies eqüipotenciais.

Energia Potencial Elétrica de um Sistema de Cargas Pontuais A energia potencial elétrica de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para montar o sistema com as cargas inicialmente em repouso e a uma distância infinita umas das outras. Para duas cargas separadas por uma distância r,

$$U = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (24\text{-}43)$$

Potencial de um Condutor Carregado Em equilíbrio, toda a carga em excesso de um condutor está concentrada na superfície externa do condutor. A carga se distribui de tal forma que o potencial é o mesmo em todos os pontos do condutor.

PERGUNTAS

1 A Fig. 24-21 mostra quatro pares de partículas carregadas. Para cada par, faça $V = 0$ no infinito e considere V_{tot} em pontos sobre o eixo x. Para que pares existe um ponto no qual $V_{tot} = 0$ (a) entre as partículas e (b) à direita das partículas? (c) Nos pontos dos itens (a) e (b) $\vec{E}_{tot}$ também é zero? (d) Para cada par, existem pontos fora do eixo x (além de pontos no infinito) para os quais $V_{tot} = 0$?

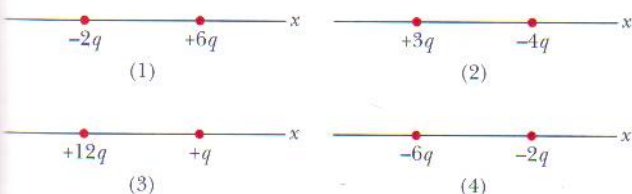



FIG. 24-21 Perguntas 1 e 7.

2 A Fig. 24-22 mostra quatro arranjos de partículas carregadas, todas à mesma distância da origem. Ordene os arranjos de acordo com o potencial na origem, começando pelo mais positivo. Tome o potencial como sendo zero no infinito.

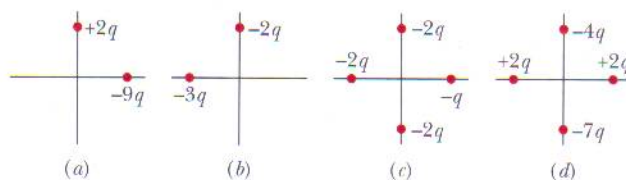



FIG. 24-22 Pergunta 2.

3 Na Fig. 24-23, oito partículas formam um quadrado, com uma distância d entre as partículas vizinhas. Qual é o potencial P no centro do quadrado se o potencial é zero no infinito?

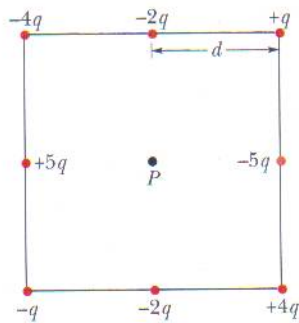



FIG. 24-23 Pergunta 3.

4 A Fig. 24-24 mostra três conjuntos de superfícies eqüipotenciais vistas de perfil; os três conjuntos cobrem a mesma região do espaço. (a) Ordene os conjuntos de acordo com o módulo do campo elétrico existente na região, começando pelo maior. (b) Em que conjunto o campo elétrico aponta para baixo?

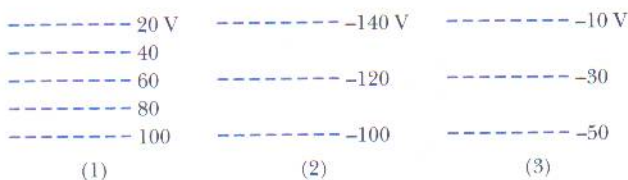



FIG. 24-24 Pergunta 4.

5 A Fig. 24-25 mostra três trajetórias ao longo das quais podemos deslocar a esfera A, positivamente carregada, aproximando-a da esfera B, também positivamente carregada, que é mantida fixa no lugar. (a) O potencial da esfera A é maior ou menor após o deslocamento? O trabalho realizado (b) pela força usada para deslocar a esfera A e (c) pelo campo elétrico produzido pela esfera B é positivo, negativo ou nulo? (d) Ordene as trajetórias de acordo com o trabalho realizado pela força do item (b), começando pelo maior.

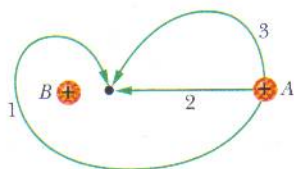



FIG. 24-25 Pergunta 5.

6 A Fig. 24-26 mostra o potencial elétrico V em função de x. (a) Ordene as cinco regiões de acordo com o valor absoluto da componente x do campo elétrico, começando pelo maior. Qual o sentido do campo elétrico (b) na região 2? (c) na região 4?

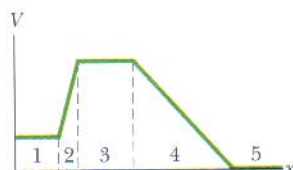



FIG. 24-26 Pergunta 6.

7 A Fig. 24-21 mostra quatro pares de partículas carregadas com a mesma separação. (a) Ordene os pares de acordo com a energia potencial elétrica, começando pela maior (mais positiva). (b) Para cada par, se a distância entre as partículas aumenta, a energia potencial do par aumenta ou diminui?

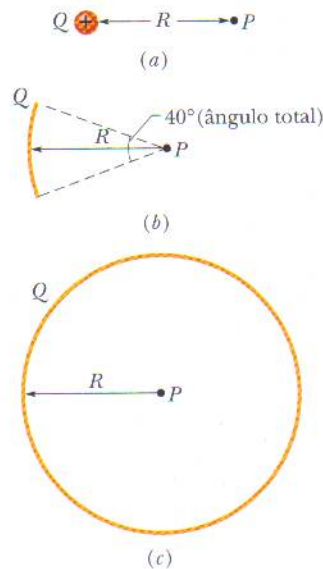



FIG. 24-27 Pergunta 8.

8 (a) Na Fig. 24-27a, qual é o potencial no ponto P devido à carga Q situada a uma distância R de P? Tome $V = 0$ no infinito. (b) Na Fig. 24-27b, a mesma carga Q foi distribuída uniformemente em um arco de circunferência de raio R e ângulo central 40°. Qual é o potencial no ponto P, o centro de curvatura do arco? (c) Na Fig. 24-27c, a mesma carga Q foi distribuída uniformemente em uma circunferência de raio R. Qual é o potencial no ponto P, o centro da circunferência? (d) Ordene as três situações de acordo com o módulo do campo elétrico no ponto P, começando pelo maior.

9 A Fig. 24-28 mostra um conjunto de três partículas carregadas. Se a partícula de carga $+q$ é deslocada por uma força externa do ponto A para o ponto D, determine se as grandezas a seguir são positivas, negativas ou nulas: (a) a variação da energia potencial elétrica; (b) o trabalho realizado pela força eletrostática sobre a partícula que foi deslocada; (c) o trabalho realizado pela força externa. (d) Quais são as respostas dos itens (a), (b) e (c) se a partícula é deslocada do ponto B para o ponto C?

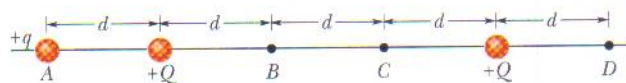



FIG. 24-28 Perguntas 9 e 10.

10 Na situação da Pergunta 9, determine se o trabalho realizado pela força externa é positivo, negativo ou nulo se a partícula é deslocada (a) de A para B; (b) de B para C; (c) de B para D. (d) Ordene esses deslocamentos de acordo com o trabalho realizado pela força externa, começando pelo maior.

PROBLEMAS

 • - ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 24-3 Potencial Elétrico

•1 Boa parte do material dos anéis de Saturno está na forma de pequenos grãos de poeira com raios da ordem de 10^{-6} m. Esses grãos se encontram em uma região onde existe um gás ionizado rarefeito e podem acumular elétrons em excesso. Suponha que os grãos são esféricos, com um raio $R = 1{,}0 \times 10^{-6}$ m. Quantos elétrons um grão teria que recolher para adquirir um potencial de -400 V na superfície? (Tome $V = 0$ no infinito.)

•2 A diferença de potencial elétrico entre a terra e uma nuvem de tempestade é $1{,}2 \times 10^9$ V. Qual é o módulo da variação da energia potencial elétrica de um elétron que se desloca da nuvem para a terra? Expresse a resposta em elétrons-volts.

•3 Uma certa bateria de automóvel de 12 V pode fazer passar uma carga de 84 A · h (ampères-horas) por um circuito, de um terminal para o outro da bateria. (a) A quantos coulombs corresponde essa quantidade de carga? (*Sugestão:* Veja a Eq. 21-3.) (b) Se toda essa carga sofre uma variação de potencial elétrico de 12 V, qual é a energia envolvida?

seção 24-5 Cálculo do Potencial a Partir do Campo

•4 Na Fig. 24-29, quando um elétron se desloca de A a B ao longo de uma linha de campo elétrico esse campo realiza um trabalho de $3{,}94 \times 10^{-19}$ J. Quais são as diferenças de potencial elétrico (a) $V_B - V_A$; (b) $V_C - V_A$; (c) $V_C - V_B$?

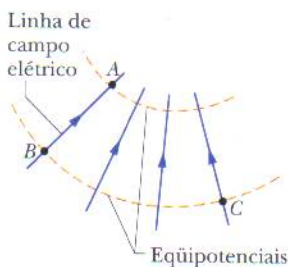



FIG. 24-29 Problema 4.

•5 Uma placa infinita não-condutora possui uma densidade superficial de cargas $\sigma = 0{,}10\ \mu\text{C/m}^2$ em uma das faces. Qual é a distância entre duas superfícies eqüipotenciais cujos potenciais diferem de 50 V?

•6 Duas placas paralelas condutoras de grande extensão estão separadas por uma distância de 12 cm e possuem densidades superficiais de cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos nas faces internas. Uma força eletrostática de $3{,}9 \times 10^{-15}$ N age sobre um elétron colocado na região entre as duas placas. (Despreze o efeito de borda.) (a) Determine o campo elétrico na posição do elétron. (b) Determine a diferença de potencial entre as placas.

••7 Uma placa não-condutora infinita possui uma densidade superficial de cargas $\sigma = +5{,}80$ pC/m². (a) Qual é o trabalho realizado pelo campo elétrico produzido pela placa se uma partícula de carga $q = +1{,}60 \times 10^{-19}$ C é deslocada da superfície da placa para um ponto P situado a uma distância $d = 3{,}56$ cm da superfície da placa? (b) Se o potencial elétrico V é definido como sendo zero na superfície da placa, qual é o valor de V no ponto P?

••8 A Fig. 24-30 mostra um gráfico da componente x do campo elétrico em função de x em uma certa região do espaço. A escala do eixo vertical é definida por $E_{xs} = 20{,}0$ N/C. As componentes y e z do campo elétrico são nulas nessa região. Se o potencial elétrico na origem é 10 V, (a) qual é o potencial elétrico em $x = 2{,}0$ m? (b) Qual é o maior valor positivo do potencial elétrico em pontos do eixo x para os quais $0 \le x \le 6{,}0$ m? (c) Para que valor de x o potencial elétrico é zero?

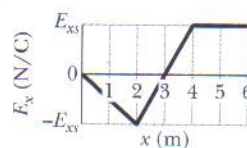



FIG. 24-30 Problema 8.

••9 O campo elétrico em uma certa região do espaço tem componentes $E_y = E_z = 0$ e $E_x = (4{,}00\ \text{N/C})x$. O ponto A está sobre o eixo y em $y = 3{,}00$ m e o ponto B está sobre o eixo x em $x = 4{,}00$ m. Qual é a diferença de potencial $V_B - V_A$?

•••10 Dois planos infinitos, não-condutores, uniformemente carregados, são paralelos ao plano yz e posicionados em $x = -50$ cm e $x = +50$ cm. As densidades de cargas dos planos são -50 nC/m² e $+25$ nC/m², respectivamente. Qual é o valor absoluto da diferença de potencial entre a origem e o ponto sobre o eixo x em $x = +80$ cm? (*Sugestão:* Use a lei de Gauss.)

•••11 Uma esfera não-condutora tem raio $R = 2{,}31$ cm e uma carga uniformemente distribuída $q = +3{,}50$ fC. Tome o potencial elétrico no centro da esfera como sendo $V_0 = 0$. Determine o valor de V (a) para uma distância radial $r = 1{,}45$ cm; (b) para $r = R$. (*Sugestão:* Veja a Séção 23-9.)

seção 24-7 Potencial Produzido por um Grupo de Cargas Pontuais

•12 Considere uma carga pontual $q = 1{,}0\ \mu$C, o ponto A a uma distância $d_1 = 2{,}0$ m de q e o ponto B a uma distância $d_2 = 1{,}0$ m de q. (a) Se A e B estão diametralmente opostos, como na Fig. 24-31a, qual é a diferença de potencial elétrico $V_A - V_B$? (b) Qual é a diferença de potencial elétrico se A e B estão localizados como na Fig. 24-31b?

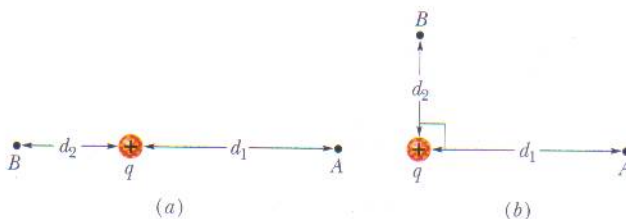



FIG. 24-31 Problema 12.

•13 Determine (a) a carga e (b) a densidade superficial de cargas de uma esfera condutora de 0,15 m de raio cujo potencial é 200 V (tomando $V = 0$ no infinito).

•14 Quando o ônibus espacial atravessa a ionosfera da Terra, formada por gases rarefeitos e ionizados, o potencial da nave varia de aproximadamente $-1{,}0$ V a cada revolução. Supondo que o ônibus espacial é uma esfera com 10 m de raio, estime a carga elétrica recolhida a cada revolução.

••15 Na Fig. 24-32, qual é o potencial elétrico no ponto P devido às quatro partículas se $V = 0$ no infinito, $q = 5{,}00$ fC e $d = 4{,}00$ cm?

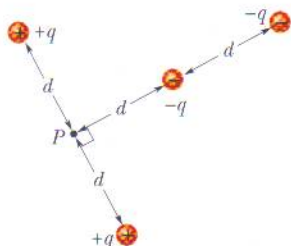



FIG. 24-32 Problema 15.

••16 Na Fig. 24-33, duas partículas, de cargas q_1 e q_2, estão separadas por uma distância d. O campo elétrico produzido em conjunto pelas duas partículas é zero em $x = d/4$. Com $V = 0$ no infinito, determine (em termos de d) o(s) ponto(s) sobre o eixo x (além do infinito) em que o potencial elétrico é zero.

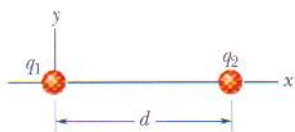



FIG. 24-33 Problemas 16, 17 e 91.

••17 Na Fig. 24-33, partículas de cargas $q_1 = +5e$ e $q_2 = -15e$ são mantidas fixas no lugar, separadas por uma distância $d = 24{,}0$ cm. Tomando $V = 0$ no infinito, determine o valor de x (a) positivo e (b) negativo para o qual o potencial elétrico sobre o eixo x é zero.

••18 A Fig. 24-34 mostra um arranjo retangular de partículas carregadas mantidas fixas no lugar, com $a = 39{,}0$ cm e as cargas indicadas como múltiplos inteiros de $q_1 = 3{,}40$ pC e $q_2 = 6{,}00$ pC. Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico no centro do retângulo? (*Sugestão:* Examinando o problema com atenção é possível reduzir consideravelmente os cálculos.)

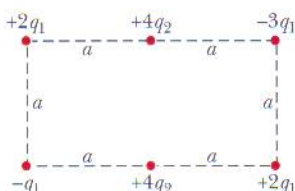



FIG. 24-34 Problema 18.

••19 Uma gota d'água esférica com uma carga de 30 pC tem um potencial de 500 V na superfície (com $V = 0$ no infinito). (a) Qual é o raio da gota? (b) Se duas gotas de mesma carga e raio se combinam para formar uma gota esférica, qual é o potencial na superfície da nova gota?

••20 A Fig. 24-35a mostra duas partículas carregadas. A partícula 1, de carga q_1, é mantida fixa no lugar a uma distância d da origem. A partícula 2, de carga q_2, pode ser deslocada ao longo do eixo x. A Fig. 24-35b mostra o potencial elétrico V na origem em função da coordenada x da partícula 2. A escala do eixo x é definida por $x_s = 16{,}0$ cm. O gráfico tende assintoticamente para $V = 5{,}76 \times 10^{-7}$ V quando $x \to \infty$. Qual é o valor de q_2 em termos de e?

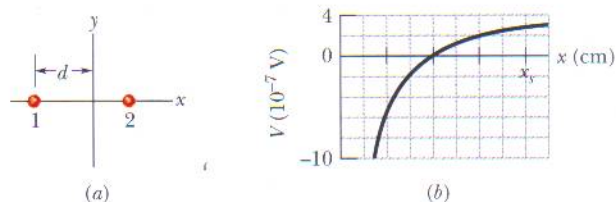



FIG. 24-35 Problema 20.

seção 24-8 Potencial Produzido por um Dipolo Elétrico

•21 A molécula de amoníaco (NH_3) possui um dipolo elétrico permanente de 1,47 D, onde 1 D = 1 *debye* = $3{,}34 \times 10^{-30}$ C · m. Calcule o potencial elétrico produzido por uma molécula de amoníaco em um ponto sobre o eixo do dipolo a uma distância de 52,0 nm. (Tome $V = 0$ no infinito.)

••22 Na Fig. 24-36a, uma partícula de carga $+e$ está inicialmente no ponto $z = 20$ nm, sobre o eixo de um dipolo elétrico, do lado positivo do dipolo. (A origem do eixo z é o centro do dipolo.) A partícula é deslocada em uma trajetória circular em torno do centro do dipolo até a coordenada $z = -20$ nm. A Fig. 24-36b mostra o trabalho W_a realizado pela força responsável pelo deslocamento da partícula em função do ângulo θ que define a localização da partícula. A escala do eixo vertical é definida por $W_{as} = 4{,}0 \times 10^{-30}$ J. Qual é o módulo do momento do dipolo?

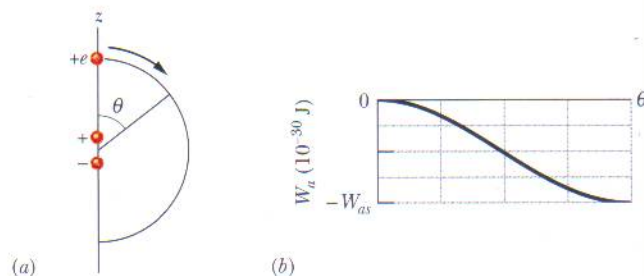



FIG. 24-36 Problema 22.

seção 24-9 Potencial Produzido por uma Distribuição Contínua de Cargas

•23 Uma barra de plástico tem a forma de um circunferência de raio $R = 8{,}20$ cm. A barra possui uma carga $Q_1 = +4{,}20$ pC uniformemente distribuída ao longo de um quarto de circunferência e uma carga $Q_2 = -6Q_1$ distribuída uniformemente ao longo do resto da circunferência (Fig. 24-37). Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico (a) no centro C da circunferência; (b) no ponto P, que está sobre o eixo central da circunferência a uma distância $D = 6{,}71$ cm do centro.

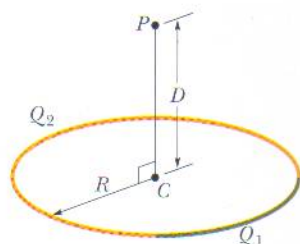



FIG. 24-37 Problema 23.

•24 Na Fig. 24-38, uma barra de plástico com uma carga uniformemente distribuída $Q = -25{,}6$ pC tem a forma de um arco de circunferência de raio $R = 3{,}71$ cm e ângulo central $\phi = 120°$. Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico no ponto P, o centro de curvatura da barra?

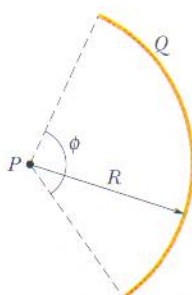



FIG. 24-38 Problema 24.

•25 (a) A Fig. 24-39a mostra uma barra não-condutora de comprimento $L = 6{,}00$ cm e densidade linear de cargas positivas uniforme $\lambda = +3{,}68$ pC/m. Tome $V = 0$ no infinito. Qual é o valor de V no ponto P situado a uma distância $d = 8{,}00$ cm acima do ponto médio da barra? (b) A Fig. 24-39b mostra uma barra idêntica à do item (a), exceto pelo fato de que a metade da direita agora está carregada negativamente; o valor absoluto da densidade linear de cargas continua a ser 3,68 pC/m em toda a barra. Com $V = 0$ no infinito, qual é o valor de V no ponto P?

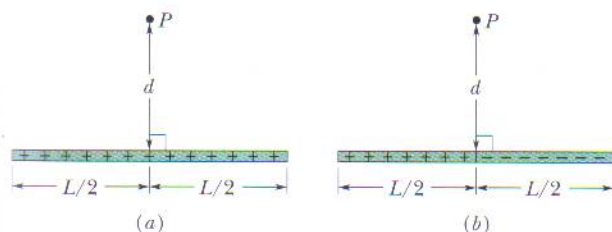



FIG. 24-39 Problema 25.

•26 Uma esfera gaussiana de 4,00 cm de raio envolve uma esfera de 1,00 cm de raio que contém uma distribuição uniforme de cargas. As duas esferas são concêntricas e o fluxo elétrico através da superfície da esfera gaussiana é $+5{,}60 \times 10^4$ N · m²/C. Qual é o potencial elétrico a 12,0 cm do centro das esferas?

••27 Na Fig. 24-40, determine o potencial elétrico produzido na origem por um arco de circunferência de carga $Q_1 = +7{,}21$ pC e duas partículas de cargas $Q_2 = 4{,}00Q_1$ e $Q_3 = -2{,}00Q_1$. O centro de curvatura do arco está na origem, o raio do arco é $R = 2{,}00$ m e o ângulo indicado é $\theta = 20{,}0°$.

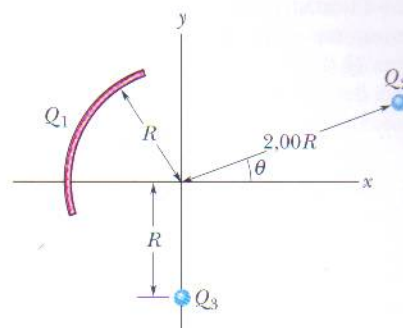



FIG. 24-40 Problema 27.

••28 O rosto sorridente da Fig. 24-41 é formado por três elementos:

1. uma barra fina com uma carga de $-3{,}0$ μC e a forma de uma circunferência completa com 6,0 cm de raio;
2. uma segunda barra fina com uma carga de 2,0 μC e a forma de um arco de circunferência com 4,0 cm de raio, concêntrico com o primeiro elemento, que subtende um ângulo de 90°;
3. um dipolo elétrico com um momento dipolar na direção perpendicular ao diâmetro do primeiro elemento que passa pelo centro do segundo elemento, cujo módulo é $1{,}28 \times 10^{-21}$ C · m.

Determine o potencial elétrico no centro da circunferência.

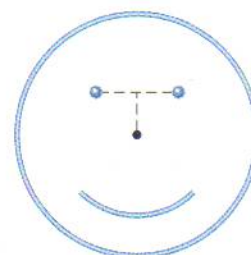



FIG. 24-41 Problema 28.

••29 Um disco de plástico de raio $R = 64{,}0$ cm é carregado na face superior com uma densidade superficial de cargas uniforme $\sigma = 7{,}73$ fC/m² e, em seguida, três quadrantes do disco são removidos. A Fig. 24-42 mostra o quadrante remanescente. Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial produzido pelo quadrante remanescente no ponto P, que está sobre o eixo central do disco original a uma distância $D = 25{,}9$ cm do centro do disco original?

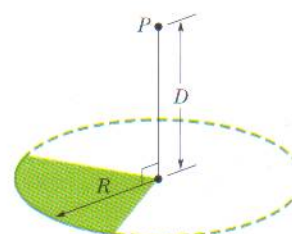



FIG. 24-42 Problema 29.

••30 A Fig. 24-43 mostra uma barra fina de plástico sobre o eixo x. A barra tem um comprimento $L = 12{,}0$ cm e uma carga positiva uniforme $Q = 56{,}1$ fC uniformemente distribuída. Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico no ponto P_1 sobre o eixo x, a uma distância $d = 2{,}50$ cm de uma das extremidades da barra.

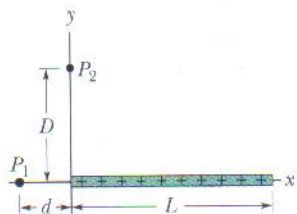



FIG. 24-43 Problemas 30, 33, 38 e 40.

••31 Na Fig. 24-44, três barras finas de plástico têm a forma de quadrantes de circunferência com o mesmo centro de curvatura, situado na origem. As cargas uniformes das barras são $Q_1 = +30$ nC, $Q_2 = +3{,}0Q_1$ e $Q_3 = -8{,}0Q_1$. Determine o potencial elétrico na origem.

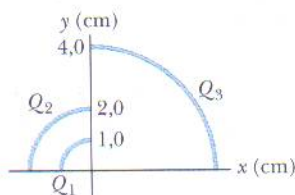



FIG. 24-44 Problema 31.

•••32 Uma distribuição linear de cargas não-uniforme dada por $\lambda = bx$, onde b é uma constante, está situada sobre o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 0{,}20$ m. Se $b = 20$ nC/m² e $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico (a) na origem; (b) no ponto $y = 0{,}15$ m, sobre o eixo y.

•••33 A barra fina de plástico que aparece na Fig. 24-43 tem um comprimento $L = 12{,}0$ cm e uma densidade linear de cargas não-uniforme $\lambda = cx$, onde $c = 28{,}9$ pC/m². Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico no ponto P_1 sobre o eixo x, a uma distância $d = 3{,}00$ cm de uma das extremidades.

seção 24-10 Cálculo do Campo Elétrico a Partir do Potencial

•34 O potencial elétrico V no espaço entre duas placas paralelas, 1 e 2, é dado (em volts) por $V = 1500x^2$, onde x (em metros) é a distância perpendicular em relação à placa 1. Para $x = 1{,}3$ cm, (a) determine o módulo do campo elétrico; (b) o campo elétrico aponta para a placa 1 ou na direção oposta?

•35 O potencial elétrico no plano xy é dado por $V = (2{,}0\ \text{V/m}^2)x^2 - (3{,}0\ \text{V/m}^2)y^2$. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo elétrico no ponto (3,0 m;2,0 m)?

•36 Duas placas metálicas paralelas, de grande extensão, são mantidas a uma distância de 1,5 cm e possuem cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos nas superfícies internas. Tome o potencial da placa negativa como sendo zero. Se o potencial a meio caminho entre as placas é +5,0 V, qual é o campo elétrico na região entre as placas?

••37 Um elétron é colocado no plano xy, onde o potencial elétrico varia com x e y de acordo com os gráficos da Fig. 24-45 (o potencial não depende de z). Em termos dos vetores unitários, qual é a força a que é submetido o elétron?

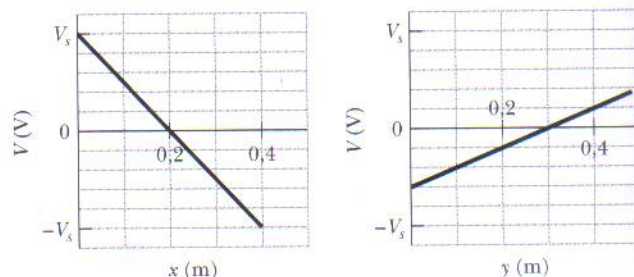



FIG. 24-45 Problema 37.

••38 A Fig. 24-43 mostra uma barra fina de plástico de comprimento $L = 13{,}5$ cm e uma carga de 43,6 fC uniformemente distribuída. (a) Determine uma expressão para o potencial elétrico no ponto P_1 em função da distância d. (b) Substitua d pela variável x e determine uma expressão para o módulo da componente E_x do campo elétrico no ponto P_1. (c) Qual é o sentido de E_x em relação ao sentido positivo do eixo x? (d) Qual é o valor de E_x no ponto P_1 para $x = d = 6{,}20$ cm? (e) Determine o valor de E_y no ponto P_1 a partir da simetria da Fig. 24-43.

••39 Qual é o módulo do campo elétrico no ponto $(3{,}00\hat{i} - 2{,}00\hat{j} + 4{,}00\hat{k})$ m se o potencial elétrico é dado por $V = 2{,}00xyz^2$, onde V está em volts e x, y e z em metros?

•••40 A barra fina de plástico da Fig. 24-43 tem um comprimento $L = 10{,}0$ cm e uma densidade linear de cargas não-uniforme $\lambda = cx$, onde $c = 49{,}9$ pC/m. (a) Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico no ponto P_2, situado sobre o eixo y, em $y = D = 3{,}56$ cm. (b) Determine a componente do campo elétrico E_y no ponto P_2. (c) Por que a componente E_x do campo em P_2 não pode ser calculada usando o resultado do item (a)?

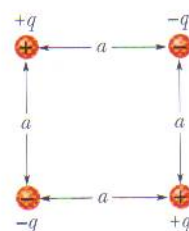



FIG. 24-46 Problema 41.

seção 24-11 Energia Potencial Elétrica de um Sistema de Cargas Pontuais

•41 Qual é o trabalho necessário para montar o arranjo da Fig. 24-46 se $q = 2{,}30$ pC, $a = 64{,}0$ cm e as partículas estão inicialmente em repouso e infinitamente afastadas umas das outras?

•42 Na Fig. 24-47, sete partículas carregadas são mantidas fixas no lugar para formar um quadrado com 4,0 cm de lado. Qual é o trabalho necessário para deslocar para o centro do quadrado uma partícula de carga $+6e$ inicialmente em repouso a uma distância infinita?

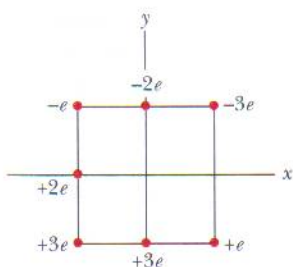



FIG. 24-47 Problema 42.

•43 Uma partícula de carga $+7{,}5\mu C$ é liberada a partir do repouso sobre o eixo x, no ponto $x = 60$ cm. A partícula começa a se mover devido à presença de uma carga Q que é mantida fixa na origem. Qual é a energia cinética da partícula após se deslocar 40 cm (a) se $Q = +20\ \mu C$; (b) se $Q = -20\ \mu C$?

•44 (a) Qual é a energia potencial elétrica de dois elétrons separados por uma distância de 2,00 nm? (b) Se a distância diminui, a energia potencial aumenta ou diminui?

••45 No retângulo da Fig. 24-48, os comprimentos dos lados são 5,0 cm e 15 cm, $q_1 = -5{,}0\ \mu C$ e $q_2 = +2{,}0\ \mu C$. Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico (a) no vértice A; (b) no vértice B. (c) Determine o trabalho necessário para deslocar uma carga $q_3 = +3{,}0\ \mu C$ de B para A ao longo da diagonal do retângulo. (d) Este trabalho faz a energia potencial elétrica do sistema de três partículas aumentar ou diminuir? O trabalho é maior, menor ou igual se a carga q_3 é deslocada ao longo de uma trajetória (e) no interior do retângulo, mas que não coincide com a diagonal; (f) fora do retângulo?

FIG. 24-48 Problema 45.

••46 Na Fig. 24-49, determine o trabalho necessário para deslocar uma partícula de carga $Q = +16e$, inicialmente em repouso, ao longo da reta tracejada, do infinito até o ponto indicado, nas proximidades de duas partículas fixas de cargas $q_1 = +4e$ e $q_2 = -q_1/2$. Suponha que $d = 1{,}40$ cm, $\theta_1 = 43°$ e $\theta_2 = 60°$.

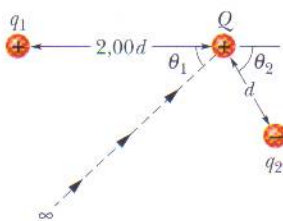



FIG. 24-49 Problema 46.

••47 Uma partícula de carga q é mantida fixa no ponto P e uma segunda partícula de massa m, com a mesma carga q, é mantida inicialmente a uma distância r_1 de P. A segunda partícula é liberada. Determine a velocidade da segunda partícula quando se encontra a uma distância r_2 do ponto P. Suponha que $q = 3{,}1\ \mu C$, $m = 20$ mg, $r_1 = 0{,}90$ mm e $r_2 = 2{,}5$ mm.

••48 Uma carga de $-9{,}0$ nC está distribuída uniformemente em um anel fino de plástico situado no plano yz, com o centro do anel na origem. Uma carga pontual de $-6{,}0$ pC está situada sobre o eixo x, no ponto $x = 3{,}0$ m. Se o raio do anel é 1,5 m, qual deve ser o trabalho executado por uma força externa sobre a carga pontual para deslocá-la até a origem?

••49 Qual é a *velocidade de escape* de um elétron inicialmente em repouso na superfície de uma esfera com 1,0 cm de raio e uma carga uniformemente distribuída de $1{,}6 \times 10^{-15}$ C? Em outras palavras, qual deve ser a velocidade inicial de um elétron para chegar a uma distância infinita da esfera com energia cinética zero?

••50 Uma casca fina, esférica, condutora de raio R é montada em um suporte isolado e carregada até atingir um potencial de -125 V. Em seguida, um elétron é disparado na direção do centro da casca a partir do ponto P, situado a uma distância r do centro da casca ($r \gg R$). Qual deve ser a velocidade inicial v_0 do elétron para que chegue a uma distância insignificante da casca antes de parar e inverter o movimento?

••51 Duas pequenas esferas metálicas A e B, de massas $m_A = 5{,}00$ g e $m_B = 10{,}0$ g, possuem a mesma carga positiva $q = 5{,}00\ \mu C$. As esferas estão ligadas por um fio não-condutor de massa insignificante e comprimento $d = 1{,}99$ m que é muito maior que os raios das esferas. (a) Qual é a energia potencial elétrica do sistema? (b) Suponha que o fio seja cortado. Qual é a aceleração de cada esfera nesse instante? (c) Qual é a aceleração de cada esfera muito tempo depois de o fio ter sido cortado?

••52 A Fig. 24-50a mostra três partículas sobre o eixo x. A partícula 1 (com uma carga de $+5{,}0\ \mu C$) e a partícula 2 (com uma carga de $+3{,}0\ \mu C$) são mantidas fixas no lugar, separadas por uma distância $d = 4{,}0$ cm. A partícula 3 pode ser deslocada ao longo do eixo x, à direita da partícula 2. A Fig. 24-50b mostra a energia potencial elétrica U do sistema de três partículas em função da coordenada x da partícula 3. A escala do eixo vertical é definida por $U_s = 5{,}0$ J. Qual é a carga da partícula 3?

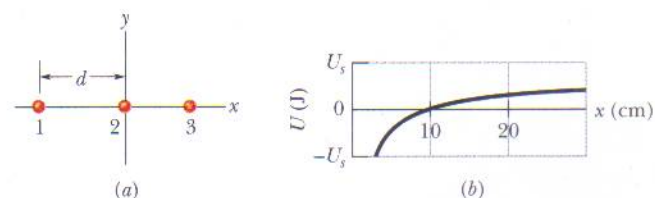



FIG. 24-50 Problema 52.

••53 Dois elétrons são mantidos fixos, separados por uma distância de 2,0 cm. Outro elétron é arremessado a partir do infinito e pára no ponto médio entre os dois elétrons. Qual é a velocidade inicial do terceiro elétron?

••54 *Um próton em um poço de potencial.* A Fig. 24-51 mostra o potencial elétrico V ao longo de um eixo x. A escala do eixo vertical é definida por $V_s = 10{,}0$ V. Um próton é liberado no ponto $x = 3{,}5$ cm com uma energia cinética inicial de 4,00 eV. (a) Se o próton está se movendo inicialmente no sentido negativo do eixo x, ele chega a um ponto de retorno (se a resposta for afirmativa, determine a coordenada x do ponto) ou escapa da região mostrada no gráfico (se a resposta for afirmativa, determine a velocidade no ponto $x = 0$)? (b) Se o próton está se movendo inicialmente no sentido positivo do eixo x, ele chega a um ponto de retorno (se a resposta for afirmativa, determine a coordenada x do ponto) ou escapa da região mostrada no gráfico (se a resposta for afirmativa,

determine a velocidade no ponto $x = 6,0$ cm)? Determine (c) o módulo F e (d) a orientação (sentido positivo ou negativo do eixo x) da força elétrica a que o próton está submetido quando se encontra ligeiramente à esquerda do ponto $x = 3,0$ cm. Determine (e) o módulo F e (f) a orientação da força elétrica quando o próton se encontra ligeiramente à direita do ponto $x = 5,0$ cm.

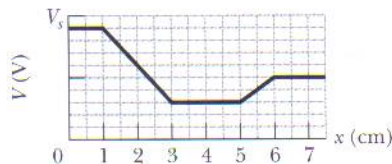



FIG. 24-51 Problema 54.

••55 Na Fig. 24-52, uma partícula carregada (um elétron ou um próton) está se movendo para a direita entre duas placas paralelas carregadas separadas por uma distância $d = 2,00$ mm. Os potenciais das placas são $V_1 = -70,0$ V e $V_2 = -50,0$ V. A partícula partiu da placa da esquerda com uma velocidade inicial de 90,0 km/s, mas sua velocidade está diminuindo. (a) A partícula é um elétron ou um próton? (b) Qual é a velocidade da partícula ao chegar à placa 2?

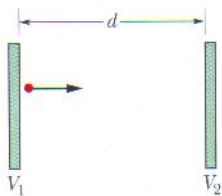



FIG. 24-52 Problema 55.

••56 A Fig. 24-53a mostra um elétron que se move ao longo do eixo de um dipolo elétrico em direção ao lado negativo do dipolo. O dipolo é mantido fixo no lugar. O elétron estava inicialmente a uma distância muito grande do dipolo, com uma energia cinética de 100 eV. A Fig. 24-53b mostra a energia cinética K do elétron em função da distância r em relação ao centro do dipolo. A escala do eixo horizontal é definida por $r_s = 0,10$ m. Qual é o módulo do momento do dipolo?

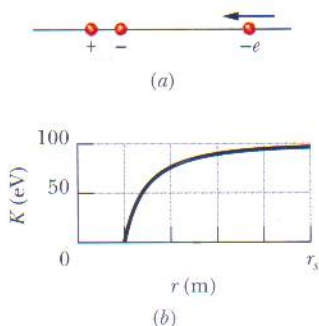



FIG. 24-53 Problema 56.

••57 Um elétron é lançado com uma velocidade inicial de $3,2 \times 10^5$ m/s em direção a um próton mantido fixo no lugar. Se o elétron se encontra inicialmente a uma grande distância do próton, a que distância do próton a velocidade instantânea do elétron é duas vezes maior que o valor inicial?

••58 Um pósitron (carga $+e$, massa igual à do elétron) está se movendo com uma velocidade de $1,0 \times 10^7$ m/s no sentido positivo do eixo x quando, em $x = 0$, encontra um campo elétrico paralelo ao eixo x. A Fig. 24-54 mostra o potencial elétrico V associado ao campo. A escala do eixo vertical é definida por $V_s = 500,0$ V. (a) O pósitron emerge da região em que existe o campo em $x = 0$ (o que significa que seu movimento se inverte) ou em $x = 0,50$ m (o que significa que seu movimento não se inverte)? (b) Com que velocidade o pósitron emerge da região?

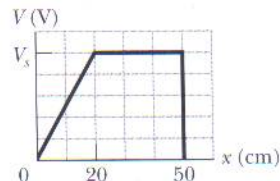



FIG. 24-54 Problema 58.

••59 Duas cargas de 50 μC são mantidas fixas sobre o eixo x nos pontos $x = -3,0$ m e $x = 3,0$ m. Uma partícula de carga $q = -15$ μC é liberada a partir do repouso em um ponto situado no semi-eixo y positivo. Devido à simetria da situação, a partícula se move ao longo do eixo y e possui uma energia cinética de 1,2 J ao passar pelo ponto $x = 0$, $y = 4,0$ m. (a) Qual é a energia cinética da partícula ao passar pela origem? (b) Para que valor negativo de y a partícula inverte seu movimento?

••60 Na Fig. 24-55a um elétron é deslocado a partir de uma distância infinita para um ponto situado a uma distância $R = 8,00$ cm de uma pequena esfera carregada. O trabalho necessário para executar o deslocamento é $W = 2,16 \times 10^{-13}$ J. (a) Qual é a carga Q da esfera? Na Fig. 24-55b, a esfera foi cortada em pedaços e os pedaços espalhados de tal forma que cargas iguais ocupam as posições das horas no mostrador circular de um relógio de raio $R = 8,00$ cm. O elétron é deslocado a partir de uma distância infinita até o centro do mostrador. (b) Qual é a variação da energia potencial elétrica do sistema com essa adição do elétron ao sistema de 12 partículas carregadas?

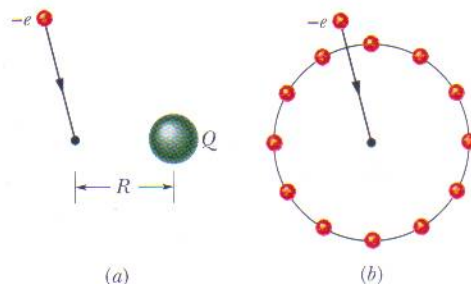



FIG. 24-55 Problema 60.

•••61 Suponha que N elétrons possam ser colocados em duas configurações diferentes. Na configuração 1 todos os elétrons são distribuídos uniformemente ao longo de um anel circular estreito de raio R. Na configuração 2 $N - 1$ elétrons são distribuídos uniformemente ao longo do anel, e o elétron restante é colocado no centro do anel. (a) Qual é o menor valor de N para o qual a segunda configuração possui menor energia que a primeira? (b) Para esse valor de N, considere um dos elétrons do anel, e_0.

Quantos outros elétrons do anel estão mais próximos de e_0 que o elétron central?

seção 24-12 Potencial de um Condutor Carregado

•62 Um esfera oca de metal possui um potencial de +400 V em relação à terra (definida como $V = 0$) e uma carga de 5×10^{-9} C. Determine o potencial elétrico no centro da esfera.

•63 Qual é a carga em excesso de uma esfera condutora de raio $r = 0{,}15$ m se o potencial da esfera é 1500 V e $V = 0$ no infinito?

•64 A esfera 1, de raio R_1, possui uma carga positiva q. A esfera 2, de raio $2{,}00R_1$, está muito afastada da esfera 1 e inicialmente descarregada. Quando as esferas são ligadas por um fio suficientemente fino para que a carga que contém possa ser desprezada, (a) o potencial V_1 da esfera 1 se torna maior, menor ou igual ao potencial V_2 da esfera 2? (b) Que fração da carga q permanece na esfera 1? (c) Que fração da carga q é transferida para a esfera 2? (d) Qual é a razão σ_1/σ_2 entre as cargas das duas esferas?

•65 Os centros de duas esferas metálicas, ambas com 3,0 cm de raio, estão separados por uma distância de 2,0 m. A esfera 1 possui uma carga de $+1{,}0 \times 10^{-8}$ C e a esfera 2 uma carga de $-3{,}0 \times 10^{-8}$ C. Suponha que a distância entre as esferas seja suficiente para que se possa admitir que a carga das esferas está uniformemente distribuída (ou seja, que as esferas não se afetam mutuamente). Com $V = 0$ no infinito, determine (a) o potencial no ponto a meio caminho entre os centros das esferas; (b) o potencial na superfície da esfera 1; (c) o potencial na superfície da esfera 2.

••66 Duas cascas condutoras concêntricas têm raios $R_1 = 0{,}500$ m e $R_2 = 1{,}00$ m, cargas $q_1 = +2{,}00\ \mu$C e $q_2 = +1{,}00\ \mu$C e espessura insignificante. Determine o módulo do campo elétrico E a uma distância do centro de curvatura das cascas (a) $r = 4{,}00$; (b) $r = 0{,}700$ m; (c) $r = 0{,}200$ m. Com $V = 0$ no infinito, determine V para (d) $r = 4{,}00$ m; (e) $r = 1{,}00$ m; (f) $r = 0{,}700$ m; (g) $r = 0{,}500$ m; (h) $r = 0{,}200$ m; (i) $r = 0$. (j) Plote $E(r)$ e $V(r)$.

••67 Uma esfera metálica de 15 cm de raio possui uma carga de $3{,}0 \times 10^{-8}$ C. (a) Qual é o campo elétrico na superfície da esfera? (b) Se $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico na superfície da esfera? (c) A que distância da superfície da esfera o potencial é 500 V menor que na superfície da esfera?

Problemas Adicionais

68 *O mistério do chocolate em pó.* Esta história começa no Problema 56 do Capítulo 23. (a) A partir da resposta do item (a) do Problema 56 do Capítulo 23, determine uma expressão para o potencial elétrico em função da distância r a partir do eixo do cano. (O potencial é zero na parede do cano, que está ligado à terra.) (b) Para uma densidade volumétrica de cargas típica, $\rho = -1{,}1 \times 10^{-3}$ C/m³, qual é a diferença de potencial elétrico entre o eixo do cano e a parede interna? (A história continua no Problema 56 do Capítulo 25.)

69 Um elétron é liberado a partir do repouso sobre o eixo de um dipolo elétrico que possui carga e e distância entre as cargas $d = 20$ pm, e é mantido fixo no lugar. O ponto em que o elétron é liberado fica no lado positivo do dipolo, a uma distância de $7{,}0d$ do centro do dipolo. Qual é a velocidade do elétron ao chegar a uma distância de $5{,}0d$ do centro do dipolo?

70 A Fig. 24-56 mostra um anel com um raio externo $R = 13{,}0$ cm, um raio interno $r = 0{,}200R$ e uma densidade superficial de cargas uniforme $\sigma = 6{,}20$ pC/m². Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico no ponto P, situado sobre o eixo central do anel a uma distância $z = 2{,}00R$ do centro do anel.

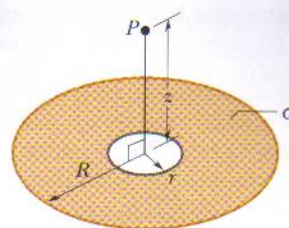



FIG. 24-56 Problema 70.

71 *Um elétron em um poço de potencial.* A Fig. 24-57 mostra o potencial elétrico V ao longo do eixo x. A escala do eixo vertical é definida por $V_s = 8{,}0$ V. Um elétron é liberado no ponto $x = 4{,}5$ cm com uma energia inicial de 3,00 eV. (a) Se o elétron está se movendo inicialmente no sentido negativo do eixo x, ele chega a um ponto de retorno (se a resposta for afirmativa, determine a coordenada x do ponto) ou escapa da região mostrada no gráfico (se a resposta for afirmativa, determine a velocidade no ponto $x = 0$). (b) Se o elétron está se movendo inicialmente no sentido positivo do eixo x, ele chega a um ponto de retorno (se a resposta for afirmativa, determine a coordenada x do ponto) ou escapa da região mostrada no gráfico (se a resposta for afirmativa, determine a velocidade no ponto $x = 7{,}0$ cm). Determine (c) o módulo F e (d) a orientação (sentido positivo ou negativo do eixo x) da força elétrica a que o elétron está submetido quando se encontra ligeiramente à esquerda do ponto $x = 4{,}0$ cm. Determine (e) o módulo F e (f) a orientação da força elétrica quando o elétron se encontra ligeiramente à direita do ponto $x = 5{,}0$ cm.

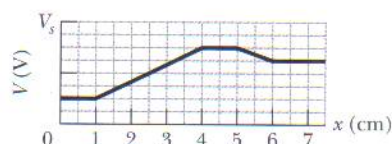



FIG. 24-57 Problema 71.

72 Uma esfera condutora de 3,0 cm de raio possui uma carga de 30 nC distribuída uniformemente na superfície. Seja A um ponto situado a 1,0 cm do centro da esfera, S um ponto sobre a superfície da esfera e B um ponto situado a 5,0 cm do centro da esfera. (a) Qual é a diferença de potencial $V_S - V_B$? (b) Qual é a diferença de potencial $V_A - V_B$?

73 Na Fig. 24-58 o ponto P está a uma distância $d_1 = 4{,}00$ m da partícula 1 ($q_1 = -2e$) e à distância $d_2 = 2{,}00$ m da partícula 2 ($q_2 = +2e$); as duas partículas são mantidas fixas no lugar. (a) Com $V = 0$ no infinito, qual é o valor de V no ponto P? Se uma partícula de carga $q_3 = +2e$ é deslocada do infinito até o ponto P, (b) determine o trabalho executado; (c) determine a energia potencial do sistema de três partículas.

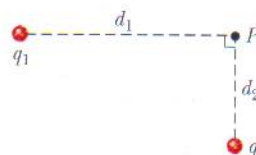



FIG. 24-58 Problema 73.

74 A Fig. 24-59 mostra uma barra fina com uma densidade de cargas uniforme de 2,00 μC/m. Determine o potencial elétrico no ponto P se $d = D = L/4{,}00$.

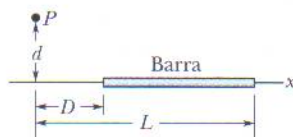



FIG. 24-59 Problema 74.

75 Três cargas de +0,12 C formam um triângulo eqüilátero com 1,7 m de lado. Usando uma energia fornecida à taxa de 0,83 kW, quantos dias são necessários para deslocar uma das cargas para o ponto médio do segmento de reta que liga as outras duas cargas?

76 O módulo E de um certo campo elétrico varia com a distância r segundo a equação $E = A/r^4$, onde A é uma constante em volts-metros cúbicos. Em termos de A, qual é o valor absoluto da diferença de potencial elétrico entre os pontos $r = 2{,}00$ m e $r = 3{,}00$ m?

77 Um cilindro condutor longo tem 2,0 cm de raio. O campo elétrico na superfície do cilindro é 160 N/C, orientado radialmente para longe do eixo. Sejam A, B e C pontos situados, respectivamente, a 1,0 cm, 2,0 cm e 5,0 cm de distância do eixo do cilindro. Determine (a) o módulo do campo elétrico no ponto C; (b) a diferença de potencial $V_B - V_C$; (c) a diferença de potencial $V_A - V_B$.

78 (a) Se a Terra tivesse uma densidade superficial de cargas de 1,0 elétron/m^2 (uma hipótese muito pouco realista), qual seria o potencial da superfície terrestre? (Tome $V = 0$ no infinito.) Qual seria (b) o módulo e (c) o sentido (para cima ou para baixo) do campo elétrico nas vizinhanças da superfície terrestre?

79 Na Fig. 24-60 uma partícula de carga $+2e$ é deslocada do infinito até o eixo x. Qual é o trabalho executado? A distância D é 4,00 m.

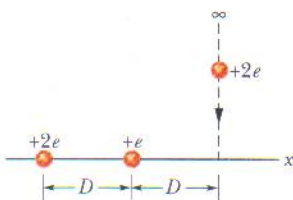



FIG. 24-60 Problema 79.

80 A Fig. 24-61 mostra um hemisfério com uma carga de 4,00 μC distribuída uniformemente por todo o volume. A parte plana do hemisfério coincide com o plano xy. O ponto P está situado no plano xy, a uma distância de 15 cm do centro do hemisfério. Qual é o potencial elétrico do ponto P?

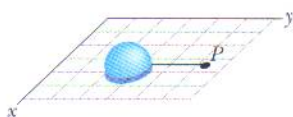



FIG. 24-61 Problema 80.

81 Dois elétrons são mantidos fixos no lugar, separados por uma distância de 2,00 μm. Qual é o trabalho necessário para deslocar um terceiro elétron do infinito até a posição em que forma um triângulo eqüilátero com os outros dois elétrons?

82 Três partículas, de cargas $q_1 = +10$ μC, $q_2 = -20$ μC e $q_3 = +30$ μC, são posicionadas nos vértices de um triângulo isósceles, como mostra a Fig. 24-62. Se $a = 10$ cm e $b = 6{,}0$ cm, determine qual deve ser o trabalho executado por um agente externo (a) para trocar as posições de q_1 e q_3; (b) para trocar as posições de q_1 e q_2.

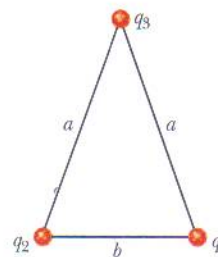



FIG. 24-62 Problema 82.

83 (a) Se uma esfera condutora com 10 cm de raio tem uma carga de 4,0 μC e $V = 0$ no infinito, qual é o potencial na superfície da esfera? (b) Essa situação é possível, dado que o ar em torno da esfera sofre ruptura dielétrica quando o campo ultrapassa 3,0 MV/m?

84 Duas cargas $q = +2{,}0$ μC são mantidas fixas a uma distância $d = 2{,}0$ cm uma da outra (Fig. 24-63). (a) Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico no ponto C? (b) Qual é o trabalho necessário para deslocar uma terceira carga $q = +2{,}0$ μC do infinito até o ponto C? (c) Qual é a energia potencial U da nova configuração?

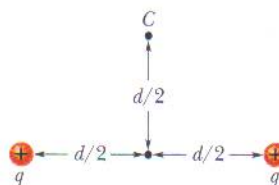



FIG. 24-63 Problema 84.

85 Um anel circular fino situado no plano xy e com centro na origem possui uma carga de +16,0 μC distribuída uniformemente. O raio do anel é 3,00 cm. Se o ponto A está na origem e o ponto B está sobre o eixo z em $z = 4{,}00$ cm, qual é a diferença de potencial $V_B - V_A$?

86 As cargas e coordenadas de duas cargas pontuais situadas no plano xy são $q_1 = +3{,}00 \times 10^{-6}$ C, $x = +3{,}50$ cm, $y = +0{,}500$ cm e $q_2 = -4{,}00 \times 10^{-6}$ C, $x = -2{,}00$ cm, $y = +1{,}50$ cm. Qual é o trabalho necessário para colocar as cargas nas posições especificadas, supondo que a distância inicial entre elas é infinita?

87 Duas superfícies planas condutoras carregadas estão separadas por uma distância $d = 1{,}00$ e produzem uma diferença de potencial $\Delta V = 625$ V. Um elétron é lançado de uma das placas em direção à outra, perpendicularmente às duas superfícies. Qual é a velocidade inicial do elétron se ele chega à segunda superfície com velocidade zero?

88 Uma partícula de carga positiva Q é mantida fixa no ponto P. Uma segunda partícula de massa m e carga negativa $-q$ se move com velocidade constante em uma circunferência de raio r_1 e centro em P. Escreva uma expressão para o trabalho W que deve ser executado por um agente externo sobre a segunda partícula para que o raio da circunferência aumente para r_2.

89 Um campo elétrico de aproximadamente 100 V/m é freqüentemente observado nas vizinhanças da superfície terrestre. Se esse campo existisse na Terra inteira, qual seria o potencial elétrico de um ponto na superfície? (Tome $V = 0$ no infinito.)

90 Na Fig. 24-64 o ponto P está no centro do retângulo. Com $V = 0$ no infinito, $q_1 = 5{,}00$ fC, $q_2 = 2{,}00$ fC, $q_3 = 3{,}00$ fC e $d = 2{,}54$ cm, qual é o potencial elétrico no ponto P?

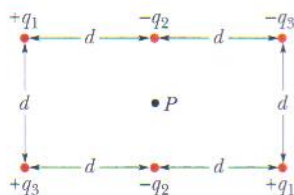



FIG. 24-64 Problema 90.

91 A Fig. 24-33 mostra duas partículas carregadas sobre um eixo. Faça um esboço das linhas de campo elétrico e das superfícies eqüipotenciais no plano da página para (a) $q_1 = +q$, $q_2 = +2q$; (b) $q_1 = +q$, $q_2 = -3q$.

92 Uma carga q está distribuída uniformemente em um volume esférico de raio R. Tome $V = 0$ no infinito. Determine (a) o potencial V para $r < R$; (b) a diferença de potencial entre o ponto $r = R$ e o ponto $r = 0$.

93 Uma casca esférica de carga Q e densidade volumétrica de cargas uniforme ρ é limitada pelas superfícies $r = r_1$ e $r = r_2$, com $r_2 > r_1$. Tomando $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico V em função da distância r em relação ao centro da casca, considerando as regiões (a) $r > r_2$; (b) $r_2 > r > r_1$; (c) $r < r_1$. (d) Essas soluções são compatíveis para $r = r_2$ e $r = r_1$? (*Sugestão:* Veja a Seção 23-9.)

94 Uma partícula alfa (que possui dois prótons) está rumando diretamente para o centro de um núcleo que contém 92 prótons. A partícula alfa possui uma energia cinética inicial de 0,48 pJ. Qual é a menor distância centro a centro a que a partícula alfa consegue chegar do núcleo, supondo que o núcleo seja mantido fixo no lugar?

95 A partir de Eq. 24-30, escreva uma expressão para o campo elétrico produzido por um dipolo em um ponto sobre o eixo do dipolo.

96 Uma esfera metálica com 16,0 cm de raio possui uma carga de $1{,}50 \times 10^{-8}$ C. Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico na superfície da esfera?

97 Em uma experiência de Millikan com gotas de óleo (Seção 22-8), um campo elétrico uniforme de $1{,}92 \times 10^5$ N/C é mantido na região entre duas placas separadas por uma distância de 1,50 cm. Calcule a diferença de potencial entre as placas.

98 Considere uma carga pontual $q = 1{,}50 \times 10^{-8}$ C e tome $V = 0$ no infinito. (a) Quais são a forma e as dimensões de uma superfície eqüipotencial com um potencial de 30,0 V produzido apenas pela carga q? (b) As superfícies cujos potenciais diferem de um valor constante (1,0 V, por exemplo) são igualmente espaçadas?

99 No modelo dos quarks das partículas subatômicas, um próton é composto de três quarks: dois quarks "*up*", com carga $+2e/3$ cada um, e um quark "*down*", com carga $-e/3$. Suponha que os três quarks estejam eqüidistantes no interior do próton. Tome a distância entre os quarks como sendo $1{,}32 \times 10^{-15}$ m e calcule a energia potencial elétrica do sistema (a) apenas para os dois quarks *up*; (b) para os três quarks.

100 (a) Um próton de energia cinética 4,80 MeV está rumando diretamente para o centro de um núcleo de chumbo. Supondo que o próton não penetra no núcleo e a única interação entre o próton e o núcleo é a interação eletrostática, calcule a menor distância centro a centro d_p entre o próton e o núcleo no momento em que o próton pára momentaneamente. Se o próton é substituído por uma partícula alfa (que contém dois prótons) com a mesma energia cinética inicial, a partícula alfa pára momentaneamente quando a distância centro a centro é d_α. Qual é o valor de d_α/d_p?

101 (a) Use a Eq. 24-32 para mostrar que o potencial elétrico em um ponto sobre o eixo central de um anel fino de carga q e raio R a uma distância z do centro do anel é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

(b) A partir desse resultado, escreva uma expressão para o valor do campo E em pontos sobre o eixo do anel; compare o resultado com o que foi obtido por integração na Seção 22-6.

102 Qual é a energia potencial elétrica da configuração de cargas da Fig. 24-8*a*? Use os valores numéricos do Exemplo 24-3.

103 Uma esfera de cobre com 1,0 cm de raio é revestida com uma fina camada de níquel. Alguns átomos de níquel são radioativos e se desintegram emitindo elétrons. Metade desses elétrons penetra na esfera de cobre, depositando uma energia de 100 keV cada um. Os outros elétrons escapam, levando com eles uma carga $-e$. O revestimento de níquel tem uma atividade de $3{,}70 \times 10^8$ decaimentos por segundo. A esfera está pendurada por um fio não-condutor e isolada do ambiente. (a) Quanto tempo o potencial da esfera leva para atingir 1000 V? (b) Quanto tempo a temperatura da esfera leva para aumentar de 5,0 K devido à energia depositada pelos elétrons? A capacidade térmica da esfera é de 14 J/K.

104 A Fig. 24-65 mostra três arcos de circunferência não-condutores de raio $R = 8{,}50$ cm. As cargas dos arcos são $q_1 = 4{,}52$ pC, $q_2 = -2{,}00q_1$ e $q_3 = +3{,}00q_1$. Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico dos arcos no centro de curvatura comum?

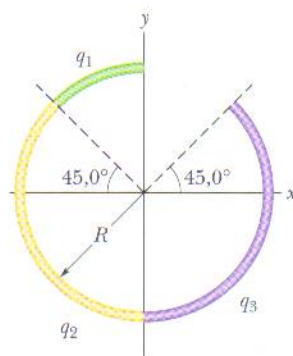



FIG. 24-65 Problema 104.

105 Na Fig. 24-66 duas partículas de cargas q_1 e q_2 são mantidas fixas no lugar sobre o eixo x. Se uma terceira partícula, de carga $+6,0\ \mu C$, é deslocada do infinito para o ponto P, o sistema de três partículas tem a mesma energia potencial elétrica que o sistema original de duas partículas. Qual é a razão q_1/q_2?

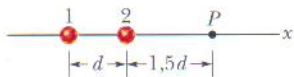



FIG. 24-66 Problema 105.

106 Na Fig. 24-67, a distância d entre as partículas é 1,0 m, as cargas são $q_1 = +q$ e $q_2 = +2,0q$ e $V = 0$ no infinito. Determine o(s) ponto(s) sobre o eixo x, além do infinito, em que (a) o potencial elétrico é zero; (b) o campo elétrico é zero.

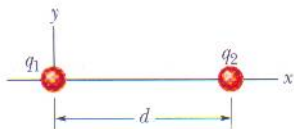



FIG. 24-67 Problema 106.

107 Na Fig. 24-68, uma partícula de carga $q_2 = +5e$ é deslocada ao longo da reta tracejada do infinito até o ponto indicado, nas vizinhanças de duas partículas fixas de cargas $q_1 = +2e$ e $q_3 = -q_1$. Qual é a razão entre a energia potencial desse sistema de três partículas e o sistema original de duas partículas?

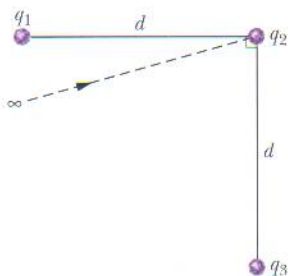



FIG. 24-68 Problema 107.

108 Em uma certa situação, o potencial elétrico varia ao longo do eixo x da forma indicada na Fig. 24-69. Para os intervalos (a) ab, (b) bc, (c) cd, (d) de, (e) ef, (f) fg e (g) gh, determine a componente x do campo elétrico e plote E_x em função de x. (Ignore o comportamento nos extremos dos intervalos.)

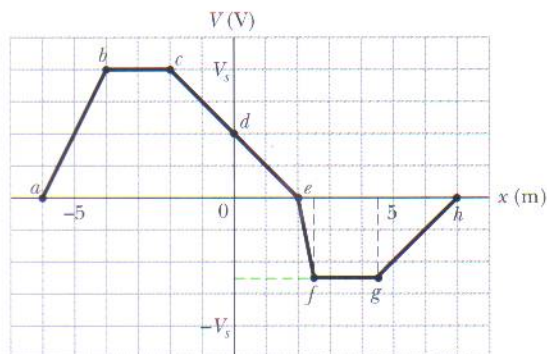



FIG. 24-69 Problema 108.

109 Um disco tem um raio $R = 2,20$ cm. A densidade superficial de cargas é $1,50 \times 10^{-6}$ C/m² entre $r = 0$ e $r = R/2$ e $8,00 \times 10^{-7}$ C/m² entre $r = R/2$ e $r = R$. (a) Qual é a carga total do disco? (b) Com $V = 0$ no infinito, qual é o potencial elétrico em um ponto sobre o eixo central do disco a uma distância $z = R/2$ do centro do disco?

110 Na Fig. 24-70 a partícula 1, de carga $q_1 = +e$, e a partícula 2, de carga $q_2 = -5e$, são mantidas fixas sobre o eixo x. A distância d é igual a 5,60 μm. Qual é a diferença de potencial elétrico $V_A - V_B$?

FIG. 24-70 Problema 110.

111 Cargas pontuais de mesmo valor absoluto (25 nC) e sinais opostos são colocadas em vértices diagonalmente opostos de um retângulo de 60 cm × 80 cm. O ponto A é o vértice desocupado mais próximo da carga positiva, e o ponto B é o outro vértice desocupado. Determine a diferença de potencial $V_B - V_A$.

112 Uma década antes de Einstein publicar seu primeiro artigo sobre a teoria da relatividade, J.J. Thomson propôs que o elétron era formado de pequenas partes e atribuiu a massa m do elétron à energia potencial elétrica da interação entre as partes. Além disso, sugeriu que a energia era igual a mc^2, onde c é a velocidade da luz. Faça uma estimativa da massa do elétron da seguinte forma: suponha que o elétron é formado por três partículas iguais, que são deslocadas a partir do infinito e colocadas nos vértices de um triângulo eqüilátero com lados iguais ao *raio clássico* do elétron, $2,82 \times 10^{-15}$ m. (a) Determine a energia potencial total desse arranjo. (b) Divida por c^2 e compare o resultado com a massa experimental do elétron. (O resultado pode ser melhorado aumentando o número de partes.)

113 A Fig. 24-71 mostra três partículas carregadas situadas sobre um eixo horizontal. Para pontos (como P) sobre o eixo e com $r \gg d$, mostre que o potencial elétrico $V(r)$ é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{2d}{r}\right).$$

FIG. 24-71 Problema 113.

(*Sugestão:* A configuração de cargas pode ser vista como a soma de uma carga isolada e um dipolo.)

114 Uma carga pontual $q_1 = +6,0e$ é mantida fixa na origem de um sistema de coordenadas retangular, e outra carga pontual $q_2 = -10e$ é mantida fixa no ponto $x = 8,6$ nm, $y = 0$. O lugar geométrico dos pontos do plano xy para os quais $V = 0$ (além do infinito) é uma circunferência com centro no eixo x, como mostra a Fig. 24-72. Determine (a) a posição x_c do centro da circunferência; (b) o raio R da circunferência. (c) A interseção da superfície eqüipotencial de 5 V com o plano xy também é uma circunferência?

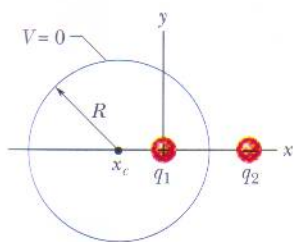



FIG. 24-72 Problema 114.

115 A carga $q_1 = -1{,}2 \times 10^{-9}$ C está na origem, e a carga $q_2 = 2{,}5 \times 10^{-9}$ C está sobre o eixo y, no ponto $y = 0{,}50$ m. Tome o potencial elétrico como sendo zero longe das duas cargas. (a) Plote a interseção da superfície eqüipotencial $V = 5{,}0$ V com o plano xy. Essa superfície envolve uma das cargas. (b) Existem duas superfícies eqüipotenciais correspondentes a $V = 3{,}0$ V, uma que envolve uma das cargas e outra que envolve as duas cargas. Plote as interseções dessas superfícies com o plano xy. (c) Determine o valor do potencial a partir do qual passa a existir uma superfície eqüipotencial em vez de duas.

116 Na Fig. 24-73, três longas linhas paralelas de cargas, com as densidades lineares de cargas indicadas, se estendem perpendicularmente ao papel nos dois sentidos. Faça um esboço das linhas de campo elétrico e das superfícies eqüipotenciais no plano da página.

FIG. 24-73 Problema 116.

117 Duas linhas infinitas de cargas são paralelas e coplanares com o eixo z. Uma, com uma densidade de cargas por unidade de comprimento $+\lambda$, está uma distância a à direita do eixo z. A outra, com uma densidade de cargas por unidade de comprimento $-\lambda$, está uma distância a à esquerda do eixo z. Faça um esboço de algumas superfícies eqüipotenciais produzidas por esse arranjo de cargas.

118 Em um artigo publicado em 1911 Ernest Rutherford propôs como modelo para o átomo um ponto de carga positiva Ze envolvido por uma carga negativa $-Ze$ distribuída uniformemente em uma esfera de raio R com centro no ponto. A uma distância r da esfera, o campo elétrico é

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

Rutherford também propôs a seguinte expressão para o potencial elétrico:

$$V = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right).$$

(a) Mostre que a expressão do campo elétrico pode ser deduzida a partir da expressão de V. (b) Por que a expressão de V não tende a zero quando $r \to \infty$?

Capacitância

Tienda Brothers/Gamma-Presse, Inc.

Explosões de nuvens de pó em depósitos de grãos (como o da foto acima), minas de carvão, moinhos de trigo e indústrias que lidam com pós são relativamente comuns e, muitas vezes, resultam na perda de vidas e em grandes danos materiais. Em geral, as explosões se devem a centelhas entre objetos eletricamente carregados ou entre um objeto eletricamente carregado e um objeto ligado à terra. Os engenheiros não podem eliminar a possibilidade de que haja uma centelha, mas podem tomar medidas para reduzir a probabilidade de que uma centelha produza uma explosão.

O que determina se uma centelha pode causar uma explosão de uma nuvem de pó?

A resposta está neste capítulo.

25-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos objetivos da física é fornecer os princípios básicos para os dispositivos práticos projetados pelos engenheiros. O tema deste capítulo é um exemplo extremamente comum: o capacitor, um dispositivo usado para armazenar energia elétrica. As pilhas de uma máquina fotográfica, por exemplo, armazenam energia na unidade de flash carregando um capacitor. Como as pilhas só podem fornecer energia aos poucos, não seria possível produzir uma luz muito forte usando diretamente a energia das pilhas. Um capacitor carregado, porém, pode fornecer a energia com uma rapidez muito maior quando a unidade de flash é disparada, o suficiente para produzir um clarão.

A física dos capacitores pode ser aplicada a outros dispositivos e outras situações que envolvem campos elétricos. O campo elétrico existente na atmosfera da Terra, por exemplo, é modelado pelos meteorologistas como se fosse produzido por um gigantesco capacitor esférico que se descarrega parcialmente através de relâmpagos. A carga que os esquis acumulam quando deslizam na neve pode ser modelada como se fosse acumulada um capacitor que se descarrega freqüentemente através de centelhas (que podem ser vistas quando se esquia à noite na neve seca).

O primeiro passo em nossa discussão dos capacitores será determinar a quantidade de carga que um capacitor é capaz de armazenar. Esta quantidade é descrita por uma grandeza conhecida como capacitância.

FIG. 25-1 Vários tipos de capacitores.

25-2 | Capacitância

A Fig. 25-1 mostra alguns dos muitos tipos e tamanhos de capacitores. A Fig. 25-2 mostra os elementos básicos de *qualquer* capacitor: dois condutores isolados entre si. Seja qual for a forma desses condutores, eles recebem o nome de *placas*.

A Fig. 25-3*a* mostra um arranjo particular, conhecido como *capacitor de placas paralelas*, formado por duas placas paralelas condutoras de área A separadas por uma distância d. O símbolo utilizado para representar um capacitor (⊣⊢) se baseia na estrutura do capacitor de placas paralelas, mas é usado para representar capacitores de qualquer geometria. Vamos supor por enquanto que não existe um material não-condutor, como vidro ou plástico, na região entre as placas. Na Seção 25-6 essa restrição será suprimida.

Quando um capacitor está *carregado* as placas contêm cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos, $+q$ e $-q$. Entretanto, quando nos referimos à *carga de um capacitor* estamos falando de q, o valor absoluto da carga de uma das placas. (Observe que q não é a carga total do capacitor, que é sempre zero.)

Como as placas são feitas de material condutor, são superfícies equipotenciais: todos os pontos da placa de um capacitor possuem o mesmo potencial elétrico. Além disso, existe uma diferença de potencial entre as duas placas. Por razões históricas essa diferença de potencial é representada pelo símbolo V e não por ΔV, como nos exemplos anteriores.

A carga q e a diferença de potencial V de um capacitor são proporcionais, ou seja,

$$q = CV. \qquad (25\text{-}1)$$

FIG. 25-2 Dois condutores, isolados entre si e do ambiente, formam um *capacitor*. Quando um capacitor está carregado as cargas dos condutores, ou *placas*, como são chamados, têm o mesmo valor absoluto q e sinais opostos. *(Paul Silvermann/ Fundamental Photographs)*

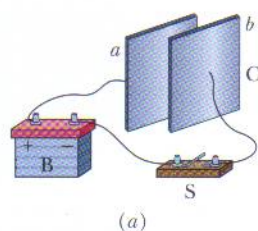
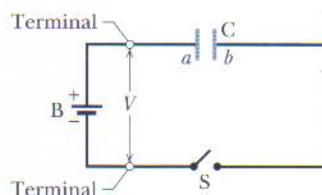
FIG. 25-3 (*a*) Um capacitor de placas paralelas, feito de duas placas de área A separadas por uma distância d. As cargas das superfícies internas das placas têm o mesmo valor absoluto q e sinais opostos. (*b*) Como mostram as linhas de campo, o campo elétrico produzido pelas placas carregadas é uniforme na região central entre as placas. Nas bordas das placas o campo não é uniforme.

(a)

(b)

FIG. 25-4 (a) Circuito formado por uma bateria B, uma chave S e as placas a e b de um capacitor C. (b) Diagrama esquemático no qual os *elementos do circuito* são representados por símbolos.

A constante de proporcionalidade C é chamada de **capacitância** do capacitor; seu valor depende da geometria das placas, mas *não depende* da carga nem da diferença de potencial. A capacitância é uma medida da quantidade de carga que precisa ser acumulada nas placas para produzir uma certa diferença de potencial entre elas. *Quanto maior a capacitância, maior a carga necessária.*

De acordo com a Eq. 25-1, a unidade de capacitância no SI é o coulomb por volt. Esta unidade ocorre com tanta freqüência que recebeu um nome especial, o *farad* (F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ coulomb por volt} = 1 \text{ C/V}. \tag{25-2}$$

Como vamos ver, o farad é uma unidade muito grande. Submúltiplos do farad, como o microfarad ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F) e o picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12}$ F) são unidades muito mais convenientes na prática.

Carga de um Capacitor

Uma forma de carregar um capacitor é colocá-lo em um circuito elétrico com uma bateria. *Circuito elétrico* é um caminho fechado que pode ser percorrido por uma corrente elétrica. *Bateria* é um dispositivo que mantém uma certa diferença de potencial entre dois *terminais* (pontos nos quais cargas elétricas podem entrar ou sair da bateria) através de reações eletroquímicas nas quais forças elétricas movimentam cargas no interior do dispositivo.

Na Fig. 25-4*a* um circuito é formado por uma bateria B, uma chave S, um capacitor descarregado C e fios de ligação. O mesmo circuito é mostrado no diagrama esquemático da Fig. 25-4*b*, no qual os símbolos de uma bateria, uma chave e um capacitor representam esses dispositivos. A bateria mantém uma diferença de potencial V entre os terminais. O terminal de maior potencial é indicado pelo símbolo + e chamado de terminal *positivo*; o terminal de menor potencial é indicado pelo símbolo − e chamado de terminal *negativo*.

Dizemos que o circuito das Figs. 25-4*a* e 25-4*b* está *interrompido* porque a chave S está *aberta* e, portanto, não existe uma ligação elétrica entre os terminais. Quando a chave é *fechada* passa a existir uma ligação elétrica entre os terminais, o circuito fica completo e cargas começam a circular pelos componentes do circuito. Como vimos no Capítulo 21, as cargas que se movem em um material condutor, como o cobre, são elétrons. Quando o circuito da Fig. 25-4 é completado elétrons são colocados em movimento nos fios pelo campo elétrico criado pela bateria. Esse campo faz os elétrons se deslocarem da placa a do capacitor para o terminal positivo da bateria; a perda de elétrons faz com que a placa a fique positivamente carregada. O campo desloca o mesmo número de elétrons do terminal negativo da bateria para a placa b do capacitor; o ganho de elétrons faz com que a placa b fique negativamente carregada. As cargas da placa a e da placa b têm o mesmo *valor absoluto*.

No instante em que a chave é fechada, as duas placas estão descarregadas e a diferença de potencial entre elas é zero. Enquanto as placas estão sendo carregadas, a diferença de potencial aumenta até se tornar igual à diferença de potencial V entre os terminais da bateria. Quando o novo equilíbrio é atingido, a placa a e o terminal positivo da bateria têm o mesmo potencial, e não existe um campo elétrico no fio que liga esses dois pontos do circuito. O terminal negativo e a placa b também têm o mesmo potencial, e não existe um campo elétrico nos fios que ligam o terminal negativo à chave S e a chave S à placa b. Como o campo elétrico nos fios do circuito é zero, os elétrons param de se deslocar e dizemos que o capacitor está *totalmente carregado*, com uma diferença de potencial V e uma carga q relacionadas pela Eq. 25-1.

Neste livro vamos supor que durante a carga de um capacitor e depois que o capacitor está totalmente carregado as cargas não podem passar de uma placa para a outra através do espaço que as separa. Vamos também supor que um capacitor é capaz de conservar a carga indefinidamente, a menos que seja *descarregado* através de um circuito externo. Na prática, estas duas hipóteses constituem uma boa aproximação na maioria dos casos.

TESTE 1 A capacitância C de um capacitor aumenta, diminui ou permanece a mesma (a) quando a carga q é multiplicada por dois e (b) quando a diferença de potencial V é multiplicada por três?

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: O Símbolo V e a Diferença de Potencial Nos capítulos anteriores o símbolo V foi usado para representar o potencial elétrico em um ponto ou em uma superfície equipotencial. Entretanto, nos problemas que envolvem circuitos elétricos o símbolo V é muitas vezes usado para representar a *diferença de potencial* entre dois pontos ou entre duas superfícies equipotenciais. A Eq. 25-1 é um exemplo desse outro uso do símbolo V. Na Seção 25-3 os dois significados de V serão usados no mesmo problema. Neste capítulo e em capítulos posteriores o leitor deve estar atento para interpretar corretamente o significado do símbolo.

O leitor também encontrará, neste e em outros livros, formas diferentes de se referir a diferenças de potencial. Uma diferença de potencial ou tensão pode ser *aplicada* a um componente ou *existir* entre os terminais do componente. Um capacitor pode ser carregado com uma diferença de potencial, como na expressão "o capacitor foi carregado com 12 V". Uma bateria pode ser caracterizada pela diferença de potencial entre os terminais, como na expressão "uma bateria de 12 V". O leitor deve ter sempre em mente o verdadeiro significado dessas expressões: elas indicam que existe uma diferença de potencial entre dois pontos de um circuito ou entre os terminais de um dispositivo como um capacitor ou uma bateria.

25-3 | Cálculo da Capacitância

Vamos agora discutir o cálculo da capacitância de um capacitor a partir da sua forma geométrica. Como serão analisadas diferentes formas geométricas, é conveniente definir um método único para facilitar o trabalho. O método, em linhas gerais, é o seguinte: (1) Supomos que as placas do capacitor estão carregadas com uma carga q; (2) calculamos o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas em função da carga, usando a lei de Gauss; (3) a partir de $\vec{E}$, calculamos a diferença de potencial V entre as placas, usando a Eq. 24-18; (4) calculamos C usando a Eq. 25-1.

Antes de começar, podemos simplificar o cálculo do campo elétrico e da diferença de potencial fazendo certas hipóteses, que são discutidas a seguir.

Cálculo do Campo Elétrico

Para relacionar o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas de um capacitor à carga q de uma das placas, usamos a lei de Gauss:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q, \tag{25-3}$$

onde q é a carga envolvida por uma superfície gaussiana e $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ é o fluxo elétrico que atravessa a superfície. Em todos os casos que vamos examinar a superfície gaussiana é escolhida de tal forma que sempre que existe um fluxo, $\vec{E}$ tem um módulo constante E e os vetores $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são paralelos. Nesse caso, a Eq. 25-3 se reduz a

$$q = \varepsilon_0 EA \qquad \text{(caso especial da Eq. 25-3)}, \tag{25-4}$$

onde A é a área da parte da superfície gaussiana através da qual existe um fluxo. Por conveniência, vamos sempre desenhar a superfície gaussiana de forma a envolver totalmente a carga da placa positiva; um exemplo aparece na Fig. 25-5.

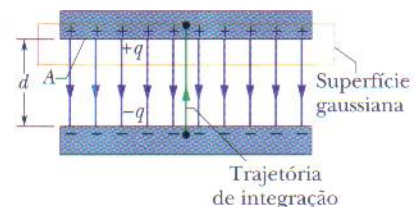



FIG. 25-5 Capacitor de placas paralelas carregado. Uma superfície gaussiana envolve a carga da placa positiva. A integração da Eq. 25-6 é executada ao longo de uma trajetória que vai diretamente da placa negativa para a placa positiva.

Cálculo da Diferença de Potencial

Na notação do Capítulo 24 (Eq. 24-18), a diferença de potencial entre as placas de um capacitor está relacionada ao campo $\vec{E}$ através da equação

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}, \tag{25-5}$$

onde a integral deve ser calculada ao longo de uma trajetória que começa em uma das placas e termina na outra. Vamos sempre escolher uma trajetória que coincida com uma linha de campo elétrico, da placa negativa até a placa positiva. Para essa trajetória os vetores $\vec{E}$ e $d\vec{s}$ têm sentidos opostos e, portanto, o produto $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ é igual a $-E\,ds$. Assim, o lado direito da Eq. 25-5 é positivo. Chamando de V a diferença $V_f - V_i$, a Eq. 25-5 se torna

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds \quad \text{(caso especial da Eq. 25-5)}, \tag{25-6}$$

onde os sinais − e + indicam que a trajetória de integração começa na placa negativa e termina na placa positiva.

Vamos agora aplicar as Eqs. (25-4) e (25-6) a alguns casos particulares.

Capacitor de Placas Paralelas

Vamos supor, como sugere a Fig. 25-5, que as placas do nosso capacitor de placas paralelas são tão extensas e tão próximas que podemos desprezar o efeito das bordas e supor que $\vec{E}$ é constante em toda a região entre as placas.

Escolhemos uma superfície gaussiana que envolve apenas a carga q da placa positiva, como na Fig. 25-5. Nesse caso, de acordo com a Eq. 25-4, podemos escrever:

$$q = \varepsilon_0 EA, \tag{25-7}$$

onde A é a área da placa.

De acordo com a Eq. 25-6, temos:

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = E\int_0^d ds = Ed. \tag{25-8}$$

Na Eq. 25-8, E pode ser colocado do lado de fora do sinal de integral porque é constante; a segunda integral é simplesmente a distância entre as placas, d.

Substituindo o valor de q dado pela Eq. 25-7 e o valor de V dado pela Eq. 25-8 na relação $q = CV$ (Eq. 25-1), temos:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \text{(capacitor de placas paralelas)}. \tag{25-9}$$

Assim, a capacitância realmente depende apenas de fatores geométricos, no caso a área das placas A e a distância entre as placas d. Observe que C é diretamente proporcional a A e inversamente proporcional a d.

A esta altura, convém observar que a Eq. 25-9 sugere uma das razões pelas quais escrevemos a constante eletrostática da lei de Coulomb na forma $1/4\pi\varepsilon_0$. Se não agíssemos dessa forma a Eq. 25-9, que é muito mais usada na engenharia que a lei de Coulomb, teria uma forma bem mais complicada. Observamos também que a Eq. 25-9 possibilita expressar a permissividade do vácuo ε_0 em uma unidade mais apropriada para problemas que envolvem capacitores:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8{,}85\ \text{pF/m}. \tag{25-10}$$

Essa constante tinha sido anteriormente expressa na forma

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2. \tag{25-11}$$

FIG. 25-6 Vista de perfil de um capacitor cilíndrico longo, mostrando uma superfície gaussiana cilíndrica de raio r (que envolve a placa positiva) e a trajetória de integração radial ao longo da qual a Eq. 25-6 pode ser aplicada. Esta figura também pode representar uma vista de perfil de um capacitor esférico, passando pelo centro.

Capacitor Cilíndrico

A Fig. 25-6 mostra uma vista de perfil de um capacitor cilíndrico de comprimento L formado por dois cilindros coaxiais de raios a e b. Estamos supondo que $L \gg b$, de modo que os efeitos das bordas sobre o campo elétrico podem ser desprezados. As duas placas contêm cargas de valor absoluto q.

Como superfície gaussiana, escolhemos um cilindro de comprimento L e raio r que pode ser visto de perfil na Fig. 25-6. De acordo com a Eq. 25-4, temos:

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(2\pi rL),$$

onde $2\pi rL$ é a área da superfície lateral do cilindro gaussiano. O fluxo através das bases do cilindro é zero. Explicitando E, temos:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}. \tag{25-12}$$

Substituindo esse resultado na Eq. 25-6, obtemos

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{25-13}$$

onde usamos o fato de que $ds = -dr$ (integramos na direção radial, de fora para dentro). Usando a relação $C = q/V$, temos:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad \text{(capacitor cilíndrico).} \tag{25-14}$$

Vemos, portanto, que a capacitância de um capacitor cilíndrico, como a de um capacitor de placas paralelas, depende apenas de fatores geométricos, no caso o comprimento L e os raios a e b.

Capacitor Esférico

A Fig. 25-6 também pode ser interpretada como uma vista de perfil de um capacitor formado por duas cascas esféricas concêntricas de raios a e b. Como superfície gaussiana escolhemos uma esfera de raio r concêntrica com as placas do capacitor. Nesse caso temos, de acordo com a Eq. 25-4:

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2),$$

onde $4\pi r^2$ é a área da superfície esférica gaussiana. Explicitando E, obtemos:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \tag{25-15}$$

que é a expressão do campo elétrico produzido por uma distribuição esférica uniforme de cargas (Eq. 23-15).

Substituindo essa expressão na Eq. 25-6, temos:

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}, \tag{25-16}$$

onde, mais uma vez, temos $ds = -dr$. Substituindo a Eq. 25-16 na Eq. 25-1 e explicitando C, obtemos

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{(capacitor esférico).} \tag{25-17}$$

Esfera Isolada

Podemos atribuir uma capacitância a uma *única* esfera de raio R feita de material condutor supondo que a "placa que falta" é uma casca esférica condutora de raio infinito. As linhas de campo que deixam a superfície de um condutor positivamente carregado devem terminar em algum lugar; as paredes da sala em que se encontra o condutor podem ser consideradas uma boa aproximação de uma esfera de raio infinito.

Para determinar a capacitância da esfera, escrevemos a Eq. 25-17 na forma

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

Fazendo $a = R$ e $b \rightarrow \infty$, obtemos:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \text{(esfera isolada)}. \tag{25-18}$$

Observe que essa fórmula, como as usadas para calcular a capacitância para outras formas geométricas (Eqs. 25-9, 25-14 e 25-17), envolve a constante ε_0 multiplicada por uma grandeza com dimensão de comprimento.

TESTE 2 No caso de capacitores carregados pela mesma bateria, a carga armazenada pelo capacitor aumenta, diminui ou permanece a mesma nas situações a seguir? (a) A distância entre as placas de um capacitor de placas paralelas aumenta. (b) O raio do cilindro interno de um capacitor cilíndrico aumenta. (c) O raio da casca externa de um capacitor esférico aumenta.

Exemplo 25-1

Na Fig. 25-7*a* a chave S é fechada para ligar o capacitor descarregado de capacitância $C = 0{,}25\ \mu\text{F}$ à bateria de diferença de potencial $V = 12$ V. A placa inferior do capacitor tem uma espessura $L = 0{,}50$ cm, uma área $A = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ e é feita de cobre, material no qual a densidade de elétrons de condução é $n = 8{,}49 \times 10^{28}$ elétrons/m³. De que profundidade d no interior da placa (Fig. 25-7*b*) os elétrons se movem para a superfície da placa quando o capacitor está totalmente carregado?

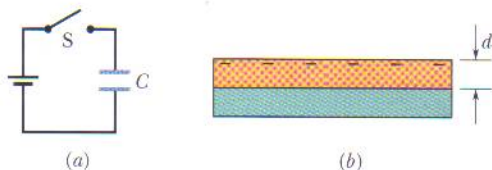



FIG. 25-7 (*a*) Circuito com uma bateria e um capacitor. (*b*) Placa inferior do capacitor.

IDÉIA-CHAVE A carga que se acumula na placa inferior está relacionada à capacitância e à diferença de potencial entre os terminais do capacitor através da Eq. 25-1 ($q = CV$).

Cálculos: Como a placa inferior está ligada ao terminal negativo da bateria, os elétrons de condução se movem para a superfície da placa. De acordo com a Eq. 25-1, a carga total que se acumula na superfície é

$$q = CV = (0{,}25 \times 10^{-6}\ \text{F})(12\ \text{V})$$
$$= 3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C}.$$

Dividindo esse resultado por e, obtemos o número N de elétrons de condução que se acumulam na superfície:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 1{,}873 \times 10^{13}\ \text{elétrons}.$$

Esses elétrons vêm de um volume que é o produto da área da placa A pela profundidade d que queremos determinar. Para esse volume a densidade de elétrons de condução (elétrons por unidade de volume) pode ser escrita na forma

$$n = \frac{N}{Ad},$$

e portanto

$$d = \frac{N}{An} = \frac{1{,}873 \times 10^{13}\ \text{elétrons}}{(2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(8{,}49 \times 10^{28}\ \text{elétrons/m}^3)}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-12}\ \text{m} = 1{,}1\ \text{pm}. \quad \text{(Resposta)}$$

Em linguagem coloquial, dizemos que a bateria carrega o capacitor fornecendo as partículas carregadas. Na verdade, porém, o que a bateria faz é criar um campo elétrico nos fios e na placa que desloca elétrons para a superfície superior da placa inferior.

25-4 | Capacitores em Paralelo e em Série

Os capacitores de um circuito às vezes podem ser substituídos por um **capacitor equivalente**, isto é, um único capacitor com a mesma capacitância que o conjunto de

capacitores. Usando esse tipo de substituição podemos simplificar o circuito e calcular com mais facilidade os seus parâmetros. Vamos agora discutir as duas combinações básicas de capacitores que permitem esse tipo de substituição.

Capacitores em Paralelo

A Fig. 25-8*a* mostra um circuito elétrico com três capacitores ligados *em paralelo* à bateria B. Essa descrição tem pouco a ver com o modo como as placas do capacitor são desenhadas. A expressão "em paralelo" significa que cada placa de um dos capacitores é ligada a uma das placas do outro capacitor, de modo que existe a mesma diferença de potencial V entre as placas dos dois capacitores. (Na Fig. 25-8*a*, essa diferença de potencial é estabelecida pela bateria B.) No caso geral,

FIG. 25-8 (*a*) Três capacitores ligados em paralelo a uma bateria B. A bateria mantém uma diferença de potencial V entre seus terminais e, portanto, entre os terminais dos capacitores. (*b*) Os três capacitores podem ser substituídos por um capacitor equivalente de capacitância C_{eq}.

> Quando uma diferença de potencial V é aplicada a vários capacitores ligados em paralelo, a diferença de potencial V é a mesma entre as placas de todos os capacitores, e a carga total q armazenada nos capacitores é a soma das cargas armazenadas individualmente nos capacitores.

Quando analisamos um circuito com capacitores em paralelo podemos simplificá-lo fazendo a seguinte modificação:

> Capacitores ligados em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente com a mesma *carga total* q e a mesma diferença de potencial V que os capacitores originais.

A Fig. 25-8*b* mostra o capacitor equivalente (com uma capacitância equivalente C_{eq}) usado para substituir os três capacitores (de capacitâncias C_1, C_2 e C_3) da Fig. 25-8*a*.

Para obter o valor de C_{eq} na Fig. 25-8*b*, usamos a Eq. 25-1 para determinar as cargas dos capacitores:

$$q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V, \quad \text{e} \quad q_3 = C_3V.$$

A carga total dos capacitores da Fig. 25-8*a* é, portanto,

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V.$$

A capacitância equivalente, com a mesma carga total q e a mesma diferença de potencial V que os capacitores originais, é, portanto,

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$

um resultado que pode ser facilmente generalizado para um número arbitrário n de capacitores:

$$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad (n \text{ capacitores em paralelo}). \tag{25-19}$$

Assim, para obter a capacitância equivalente de uma combinação de capacitores em paralelo basta somar as capacitâncias individuais.

Capacitores em Série

FIG. 25-9 (*a*) Três capacitores ligados em série a uma bateria B. A bateria mantém uma diferença de potencial V entre a placa superior e a placa inferior da combinação em série. (*b*) Os três capacitores podem ser substituídos por um capacitor equivalente de capacitância C_{eq}.

A Fig. 25-9*a* mostra três capacitores ligados *em série* à bateria B. Essa descrição tem pouco a ver com o modo como as placas do capacitor são desenhadas. A expressão "em série" significa que os capacitores são ligados em seqüência, um após o outro, e uma diferença de potencial V é aplicada às extremidades do conjunto. (Na Fig. 25-9*a* essa diferença de potencial V é estabelecida pela bateria B.) As diferenças de potencial entre as placas dos capacitores fazem com que todos armazenem a mesma carga q.

Quando uma diferença de potencial V é aplicada a vários capacitores ligados em série, a carga q armazenada é a mesma em todos os capacitores e a soma das diferenças de potencial entre as placas dos capacitores é igual à diferença de potencial aplicada V.

Podemos explicar por que todos os capacitores armazenam a mesma carga acompanhando uma *reação em cadeia* de eventos, na qual o carregamento de um capacitor provoca o carregamento do capacitor seguinte. Começamos com o capacitor 3. Quando a bateria é ligada aos capacitores em série ela faz com que uma carga $-q$ se acumule na placa inferior do capacitor 3. Essa carga repele as cargas negativas da placa superior do capacitor 3, deixando-a com uma carga $+q$. A carga que foi repelida é transferida para a placa inferior do capacitor 2, fazendo com que acumule uma carga $-q$. Essa carga repele as cargas negativas da placa superior do capacitor 2, deixando-a com uma carga $+q$. A carga que foi repelida é transferida para a placa inferior do capacitor 1, fazendo com que acumule uma carga $-q$. Finalmente, essa carga repele as cargas negativas da placa superior do capacitor 1, deixando-a com uma carga $+q$.

Dois fatos importantes a respeito dos capacitores em série são os seguintes:

1. Quando a carga é transferida de um capacitor para outro em um conjunto de capacitores em série pode haver apenas um percurso para a carga de um capacitor para outro, como o percurso da placa superior do capacitor 3 para a placa inferior do capacitor 2 na Fig. 25-9*a*. Se houver mais de um percurso isso significa que os capacitores não estão em série. Um exemplo aparece no Exemplo 25-2.
2. A bateria produz cargas apenas nas duas placas às quais está ligada diretamente (no caso da Fig. 25-9*a*, a placa inferior do capacitor 3 e a placa superior do capacitor 1). As cargas produzidas nas outras placas se devem ao deslocamento de cargas já existentes nessas placas. Assim, por exemplo, na Fig. 25-9*a* a parte do circuito envolvida por linhas tracejadas está isolada eletricamente do resto do circuito. Logo, a carga total dessa parte do circuito não pode ser modificada pela bateria, embora possa ser redistribuída.

Quando analisamos um circuito com capacitores em série podemos simplificá-lo fazendo seguinte modificação:

Capacitores ligados em série podem ser substituídos por um capacitor equivalente com a *mesma carga q* e a mesma *diferença de potencial total V* que os capacitores originais.

A Fig. 25-9*b* mostra o capacitor equivalente (com uma capacitância equivalente C_{eq}) usado para substituir os três capacitores (de capacitâncias C_1, C_2 e C_3) da Fig. 25-9*a*.

Para obter o valor de C_{eq} na Fig. 25-9*b*, usamos a Eq. 25-1 para determinar diferenças de potencial entre as placas dos capacitores:

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \text{e} \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

A diferença de potencial V total produzida pela bateria é a soma dessas três diferenças de potencial. Assim,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

A capacitância equivalente é, portanto,

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

ou

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

um resultado que pode ser facilmente generalizado para um número arbitrário n de capacitores:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ capacitores em série}), \tag{25-20}$$

Usando a Eq. 25-20 é fácil mostrar que a capacitância equivalente de dois ou mais capacitores ligados em série é sempre *menor* que a menor capacitância dos capacitores individuais.

TESTE 3 Uma bateria de potencial V armazena uma carga q em uma combinação de dois capacitores iguais. Determine a diferença de potencial e a carga em cada capacitor (a) se os capacitores estiverem ligados em paralelo; (b) se os capacitores estiverem ligados em série.

Exemplo 25-2

(a) Determine a capacitância equivalente da combinação de capacitores que aparece na Fig. 25-10a, à qual é aplicada uma diferença de potencial V. Os valores das capacitâncias são os seguintes:

$$C_1 = 12{,}0\ \mu\text{F}, \quad C_2 = 5{,}30\ \mu\text{F}, \quad \text{e} \quad C_3 = 4{,}50\ \mu\text{F}.$$

IDÉIA-CHAVE Capacitores ligados em série podem ser substituídos por um capacitor equivalente, e capacitores ligados em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente. Assim, a primeira coisa a fazer é verificar se no circuito da Fig. 25-10a existem capacitores em série e/ou em paralelo.

Determinação da capacitância equivalente: Os capacitores 1 e 3 estão ligados um após o outro, mas será que estão ligados em série? A resposta é negativa. O potencial V aplicado aos capacitores faz com que uma carga se acumule na placa inferior do capacitor 3. Essa carga faz com que uma carga de mesmo valor absoluto deixe a placa superior do capacitor 3. Observe, porém, que essa carga se divide entre as placas inferiores dos capacitores 1 e 2. Como existe mais de um caminho para a carga, o capacitor 3 *não está* em série com o capacitor 1 (nem com o capacitor 2).

Os capacitores 1 e 2 estão em paralelo? A resposta é afirmativa. As placas superiores dos dois capacitores estão ligadas entre si, o que também acontece com as placas inferiores; assim, existe a mesma diferença de potencial entre as placas do capacitor 1 e entre as placas do capacitor 2. Como os capacitores 1 e 2 estão em paralelo, a capacitância equivalente C_{12} dos dois capacitores, de acordo com a Eq. 25-19, é dada por

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12{,}0\ \mu\text{F} + 5{,}30\ \mu\text{F} = 17{,}3\ \mu\text{F}.$$

Na Fig. 25-10b substituímos os capacitores 1 e 2 pelo capacitor equivalente dos dois capacitores, que chamamos de capacitor 12 (pronunciado como "um dois", e não como "doze"). (As ligações ao resto do circuito nos pontos A e B são as mesmas nas Figs. 25-10a e 25-10b.)

O capacitor 12 está em série com o capacitor 3? Aplicando novamente o teste para capacitores em série vemos que toda a carga que deixa a placa superior do capacitor 3 vai para a placa inferior do capacitor 12. Assim, o capacitor 12 e o capacitor 3 estão em série e podem ser substituídos por um capacitor equivalente C_{123} ("um dois três"), como mostra a Fig. 25-10c. De acordo com a Eq. 25-20, temos:

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$$

$$= \frac{1}{17{,}3\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4{,}50\ \mu\text{F}} = 0{,}280\ \mu\text{F}^{-1},$$

e, portanto,

$$C_{123} = \frac{1}{0{,}280\ \mu\text{F}^{-1}} = 3{,}57\ \mu\text{F}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) A diferença de potencial aplicada aos terminais de entrada da Fig. 25-10a é $V = 12{,}5$ V. Qual é a carga de C_1?

IDÉIAS-CHAVE Agora estamos interessados em calcular a carga de um dos capacitores a partir da capacitância equivalente. Para percorrer esse "caminho inverso" usamos dois princípios: (1) a carga de capacitores em série é igual à do capacitor equivalente; (2) a diferença de potencial de capacitores em paralelo é igual à do capacitor equivalente.

Caminho inverso: Para calcular a carga q_1 do capacitor 1 devemos chegar a esse capacitor pelo caminho inverso, começando com o capacitor equivalente C_{123}. Como a diferença de potencial dada ($V = 12{,}5$) é aplicada ao conjun-

to de três capacitores da Fig. 25-10*a*, também é aplicada ao capacitor equivalente da Fig. 25-10*c*. Assim, de acordo com a Eq. 25-1 ($q = CV$), temos:

$$q_{123} = C_{123}V = (3{,}57\ \mu\text{F})(12{,}5\ \text{V}) = 44{,}6\ \mu\text{C}.$$

Os capacitores em série 12 e 3 da Fig. 25-10*b* têm a mesma carga que o capacitor equivalente 123. Assim, a carga do capacitor 12 é $q_{12} = q_{123} = 44{,}6\ \mu\text{C}$. De acordo com a Eq. 25-1, a diferença de potencial entre as placas do capacitor 12 é

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44{,}6\ \mu\text{C}}{17{,}3\ \mu\text{F}} = 2{,}58\ \text{V}.$$

Os capacitores 1 e 2 têm a mesma diferença de potencial entre as placas que o capacitor equivalente 12. Assim, a diferença de potencial entre as placas do capacitor 1 é $V_1 = V_{12} = 2{,}58$ V e, de acordo com a Eq. 25-1, a carga do capacitor 1 é

$$q_1 = C_1V_1 = (12{,}0\ \mu\text{F})(2{,}58\ \text{V}) = 31{,}0\ \mu\text{C}. \quad \text{(Resposta)}$$

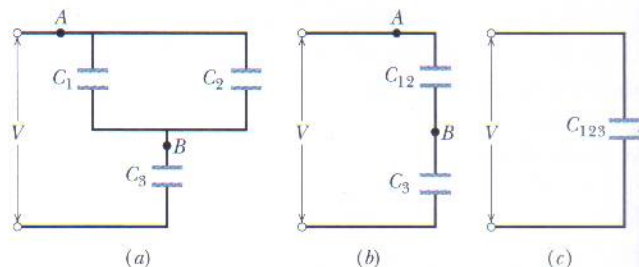



FIG. 25-10 (*a*) Circuito com três capacitores. (*b*) Os capacitores C_1 e C_2, que estão ligados em paralelo, podem ser substituídos por um capacitor equivalente de capacitância C_{12}. (*c*) Os capacitores C_{12} e C_3, que estão ligados em série, podem ser substituídos por um capacitor equivalente de capacitância C_{123}.

Exemplo 25-3 Aumente sua capacidade

O capacitor 1, com $C_1 = 3{,}55\ \mu$C, é carregado com uma diferença de potencial $V_0 = 6{,}30$ V por uma bateria de 6,30 V. A bateria é removida e o capacitor é ligado, como na Fig. 25-11, a um capacitor descarregado 2, com $C_2 = 8{,}95\ \mu$F. Quando a chave S é fechada parte da carga de um dos capacitores é transferida para o outro. Determine a carga dos capacitores depois que o equilíbrio é atingido.

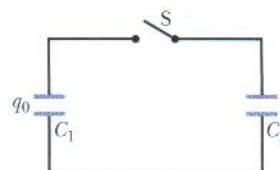



FIG. 25-11 Uma diferença de potencial V_0 é aplicada ao capacitor C_1 e a bateria é removida. Em seguida, a chave S é fechada para que a carga do capacitor 1 seja compartilhada com o capacitor 2.

IDÉIAS-CHAVE A situação é diferente da do exemplo anterior porque no caso atual, o potencial elétrico a que os dois capacitores estão submetidos *não permanece constante* durante todo o processo. No momento em que a chave S é fechada o único potencial aplicado é o do capacitor 1 sobre o capacitor 2, e esse potencial diminui com o tempo. Assim, nesse momento os capacitores da Fig. 25-11 não estão ligados nem *em série* nem *em paralelo*.

Enquanto o potencial elétrico entre os terminais do capacitor 1 diminui, o potencial elétrico entre os terminais do capacitor 2 aumenta. O equilíbrio é atingido quando os dois potenciais são iguais, pois, nesse caso, não existindo uma diferença de potencial entre as placas dos capacitores que estão ligadas entre si não existe campo elétrico para fazer os elétrons se moverem. Isso significa que a carga inicial do capacitor 1 se redistribui entre os dois capacitores.

Cálculos: De acordo com a Eq. 25-1, a carga adquirida pelo capacitor 1 quando este estava ligado à bateria é dada por

$$q_0 = C_1V_0 = (3{,}55 \times 10^{-6}\ \text{F})\ (6{,}30\ \text{V}) = 22{,}365 \times 10^{-6}\ \text{C}.$$

Quando a chave S da Fig. 25-11 é fechada e o capacitor 1 começa a carregar o capacitor 2, o potencial elétrico e a carga do capacitor 1 diminuem e o potencial elétrico e a carga do capacitor 2 aumentam até que

$$V_1 = V_2 \qquad \text{(equilíbrio)}.$$

De acordo com a Eq. 25-1, essa equação pode ser escrita na forma

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \qquad \text{(equilíbrio)}.$$

Como a carga total permanece inalterada, devemos ter

$$q_1 + q_2 = q_0 \qquad \text{(conservação de carga)};$$

e portanto

$$q_2 = q_0 - q_1.$$

Assim, a segunda equação de equilíbrio pode ser escrita na forma

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_1}{C_2}.$$

Explicitando q_1 e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$q_1 = 6{,}35\ \mu\text{C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O restante da carga inicial ($q_0 = 22{,}365\ \mu$C) deve estar no capacitor 2:

$$q_2 = 16{,}0\ \mu\text{C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: ***Circuitos com Vários Capacitores*** Vamos rever o método usado para resolver o Exemplo 25-2, em que havia mais de dois capacitores ligados a uma bateria. Para obter um só capacitor equivalente simplificamos aos poucos o conjunto de capacitores, substituindo-os por capacitores equivalentes com o auxílio da Eq. 25-19, no caso de capacitores em paralelo, e da Eq. 25-20, no caso de capacitores em série. Finalmente, para determinar a carga armazenada no capacitor equivalente ao circuito inteiro usamos a Eq. 25-1 e a diferença de potencial V aplicada pela bateria.

O resultado mostra qual é a carga total armazenada no conjunto de capacitores. Entretanto, para determinar a carga armazenada em um dos capacitores ou a diferença de potencial entre as placas de um dos capacitores precisamos percorrer as etapas da simplificação no sentido inverso. Em cada passo desse caminho usamos duas regras: quando dois capacitores estão ligados em paralelo, a diferença de potencial entre as placas é a mesma do capacitor equivalente, e podemos usar a Eq. 25-1 para calcular a carga de cada capacitor; quando dois capacitores estão ligados em série, a carga das placas é a mesma do capacitor equivalente, e podemos usar a Eq. 25-1 para calcular a diferença de potencial entre as placas de cada capacitor.

Tática 3: ***Baterias e Capacitores*** Uma bateria mantém uma certa diferença de potencial entre os terminais. Assim, quando o capacitor 1 do Exemplo 25-3 é ligado à bateria de 6,30 V há uma transferência de cargas entre o capacitor e a bateria até que a diferença de potencial entre as placas do capacitor seja igual à diferença de potencial entre os terminais da bateria.

A diferença entre um capacitor e uma bateria é que em um capacitor não existem as reações eletroquímicas necessárias para produzir partículas carregadas (elétrons) a partir de átomos e moléculas. Assim, quando o capacitor carregado 1 do Exemplo 25-3 é desligado da bateria e ligado ao capacitor descarregado 2 com a chave S fechada, a diferença de potencial entre as placas do capacitor 1 não se mantém. A grandeza que se mantém *é* a carga q_0 do conjunto de dois capacitores. Nesse caso, a grandeza que obedece a uma lei de conservação é a carga elétrica, e *não* o potencial elétrico.

25-5 | Energia Armazenada em um Campo Elétrico

Para que um capacitor se carregue é preciso que um agente externo execute um trabalho. Imagine que, usando "pinças mágicas", você pudesse remover elétrons de uma das placas de um capacitor inicialmente descarregado e depositá-los na outra placa, um de cada vez. O campo elétrico que essa transferência produz no espaço entre as placas tem um sentido tal que se opõe a novas transferências de carga. Assim, à medida que a carga fosse sendo acumulada nas placas do capacitor, seria necessário realizar um trabalho cada vez maior para transferir novos elétrons. Na vida real esse trabalho não é executado por "pinças mágicas", mas por uma bateria, à custa de sua reserva de energia química.

O trabalho necessário para carregar um capacitor se transforma na energia potencial elétrica U do campo elétrico que existe entre as placas. Podemos recuperar essa energia descarregando o capacitor através de um circuito elétrico, da mesma forma como podemos recuperar a energia potencial armazenada em um arco distendido soltando a corda e deixando que se transforme na energia cinética da flecha.

Suponha que, em um dado instante, uma carga q' tenha sido transferida de uma placa de um capacitor para a outra. A diferença de potencial V' entre as placas nesse instante é q'/C. De acordo com a Eq. 24-7, se uma carga adicional dq' é transferida, o trabalho adicional necessário para essa transferência é dado por

$$dW = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq'.$$

O trabalho necessário para carregar o capacitor com uma carga final q é dado por

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^q q'\,dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Como esse trabalho é armazenado na forma da energia potencial U do capacitor, temos:

$$U = \frac{q^2}{2C} \quad \text{(energia potencial).} \qquad (25\text{-}21)$$

De acordo com a Eq. 25-1, essa equação também pode ser escrita na forma

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \quad \text{(energia potencial).} \tag{25-22}$$

As Eqs. 25-21 e 25-22 são válidas para qualquer forma geométrica do capacitor.

Para entender melhor o fenômeno do armazenamento de energia em capacitores considere dois capacitores de placas paralelas de características idênticas, exceto pelo fato de que a distância entre as placas do capacitor 1 é duas vezes maior que a distância entre as placas do capacitor 2. Nesse caso, o volume entre as placas do capacitor 1 é duas vezes maior que o volume entre as placas do capacitor 2; além disso, de acordo com a Eq. 25-9, a capacitância do capacitor 2 é duas vezes maior que a do capacitor 1. Segundo a Eq. 25-4, se os dois capacitores possuem a mesma carga q os campos elétricos entre as placas são iguais. Além disso, de acordo com a Eq. 25-21, a energia armazenada no capacitor 1 é duas vezes maior que a energia do capacitor 2. Assim, se dois capacitores com a mesma forma geométrica têm a mesma carga e, portanto, o mesmo campo elétrico entre as placas, aquele que tem um volume duas vezes maior possui uma energia armazenada duas vezes maior. Análises como esta confirmam nossa afirmação anterior:

A energia potencial armazenada em um capacitor carregado está associada ao campo elétrico que existe entre as placas.

Explosões de Nuvens de Pó

Como vimos na Seção 24-12, quando uma pessoa entra em contato com certos objetos, como um suéter de lã, um tapete ou mesmo um escorregador de plástico, pode adquirir uma carga elétrica considerável. Essa carga pode ser suficiente para produzir uma centelha quando a pessoa aproxima a mão de um corpo aterrado, como uma torneira, por exemplo. Em muitas indústrias que trabalham com pós, como as de alimentos e de cosméticos, centelhas desse tipo podem ser muito perigosas. Mesmo que a substância de que é feito o pó não seja inflamável, quando pequenos grãos estão em suspensão no ar e, portanto, cercados de oxigênio podem queimar tão depressa que a nuvem de pó explode. Os engenheiros de segurança não podem eliminar todas as causas possíveis de centelhas das indústrias que lidam com pós, mas procuram manter a quantidade de energia disponível nas centelhas bem abaixo do valor-limite U_l ($\approx$ 150 mJ), acima do qual os grãos de pó se incendeiam.

Suponha que uma pessoa adquire uma carga elétrica ao entrar em contato com várias superfícies ao caminhar no interior de um depósito. Podemos modelar a pessoa como um capacitor esférico de raio R = 1,8 m. De acordo com a Eq. 25-18 ($C = 4\pi\varepsilon_0 R$) e a Eq. 25-22 ($U = \frac{1}{2}CV^2$), a energia do capacitor é

$$U = \tfrac{1}{2}(4\pi\varepsilon_0 R)V^2.$$

Nesse caso, o valor-limite da energia corresponde a um potencial

$$V = \sqrt{\frac{2U_l}{4\pi\varepsilon_0 R}} = \sqrt{\frac{2(150 \times 10^{-3}\,\text{J})}{4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1{,}8\,\text{m})}}$$
$$= 3{,}9 \times 10^4\,\text{V}.$$

Os engenheiros de segurança procuram manter o potencial dos operários abaixo desse valor "drenando" as cargas através, por exemplo, de um piso condutor.

Densidade de Energia

Em um capacitor de placas paralelas, desprezando o efeito das bordas o campo elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos situados entre as placas. Assim, a **densidade de energia** u, ou seja, a energia potencial por unidade de volume no espaço entre as placas, também é uniforme. Podemos calcular u dividindo a energia potencial total pelo volume Ad do espaço entre as placas. De acordo com a Eq. 25-22, temos:

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad}.$$

De acordo com a Eq. 25-9 ($C = \varepsilon_0 A/d$), esse resultado pode ser escrito na forma

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

Além disso, de acordo com a Eq. 24-42 ($E = -\Delta V/\Delta s$), V/d é igual ao módulo do campo elétrico E; portanto,

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad \text{(densidade de energia).} \tag{25-25}$$

Embora tenhamos chegado a esse resultado para o caso particular de um capacitor de placas paralelas, ele se aplica a qualquer campo elétrico. Se existe um campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto do espaço podemos pensar nesse ponto como uma fonte de energia potencial elétrica cujo valor por unidade de volume é dado pela Eq. 25-25.

Exemplo 25-4

As vítimas de queimaduras graves às vezes são tratadas em uma câmara onde existe ar enriquecido em oxigênio (câmara hiperbárica). Quando a sessão de tratamento termina um enfermeiro puxa a maca com o paciente para fora da câmara. Em pelo menos duas ocasiões a maca pegou fogo na extremidade que foi a última a sair da câmara. Obviamente, uma maca em chamas com um paciente já queimado é uma situação de alto risco, e naturalmente a combustão é mais intensa em uma atmosfera rica em oxigênio, mas permanece a pergunta: O que fez as macas se incendiarem?

Os investigadores constataram que havia uma separação de cargas entre a pele do paciente, a camisola de hospital e o lençol da maca. Também descobriram que a armação da maca e a parte da câmara hiperbárica abaixo da maca formavam um capacitor de placas paralelas (Fig. 25-12) de capacitância $C_i = 250$ pF. Se o excesso de carga tivesse sido neutralizado através de uma centelha elétrica, essa centelha seria suficiente para provocar um incêndio? As medidas revelaram que para haver uma centelha a diferença de potencial V entre a armação da maca e a câmara teria que exceder 2000 V, e que a maca só pegaria fogo se a energia potencial U do capacitor maca-câmara excedesse 0,20 mJ. Entretanto, a diferença de potencial entre a maca e a câmara era apenas $V_i = 600$ V, um valor insuficiente para produzir uma centelha.

(a)

(b) (c)

FIG. 25-12 (*a*) Uma câmara hiperbárica. (*b*) Uma maca e a câmara hiperbárica formam um capacitor que pode ser carregado acidentalmente. (*c*) Quando a maca é removida da câmara, a carga se concentra em uma pequena região. *(Câmara BARA-MED® Monoplace, projetada e fabricada por BioMedical Systems Group, Environmental Tectonics Corp.)*

(a) Quando a maca estava sendo retirada da câmara a superposição entre a maca e a câmara diminuiu e, portanto, a área efetiva das placas do capacitor maca-câmara também diminuiu em relação ao valor inicial A. Qual era a diferença de potencial V_f quando a área efetiva das placas do capacitor era $A_f = 0{,}10A_i$?

IDÉIA-CHAVE (1) De acordo com a Eq. 25-1 ($q = CV$), existe uma relação entre a diferença de potencial V entre as placas de um capacitor, a carga q e a capacitância C. (2) A carga permaneceu constante enquanto a maca estava sendo removida da câmara. (3) A capacitância de um capacitor de placas paralelas está relacionada à área das placas pela Eq. 25-9 ($C = \varepsilon_0 A/d$).

Cálculos: De acordo com a Eq. 25-1, a carga q é dada por

$$q = C_f V_f = C_i V_i,$$

e portanto

$$V_f = \frac{C_i}{C_f} V_i. \tag{25-23}$$

De acordo com a Eq. 25-9, temos:

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 A_f}{d} = \frac{\varepsilon_0(0{,}10A_i)}{d}$$

$$= 0{,}10\frac{\varepsilon_0 A_i}{d} = 0{,}10C_i. \tag{25-24}$$

Substituindo esse resultado na Eq. 25-23, obtemos

$$V_f = \frac{C_i}{0{,}10C_i} V_i = 10V_i = (10)(600\ \text{V})$$

$$= 6000\ \text{V}. \quad \text{(Resposta)}$$

Quando a maca estava sendo retirada a diferença de potencial aumentou porque a carga do capacitor ficou concentrada em uma área menor das placas. A diferença de potencial $V_f = 6000$ V foi mais do que suficiente para produzir uma centelha.

(b) Qual era a energia U_f do capacitor maca-câmara quando a área efetiva das placas era $0{,}10A_i$?

IDÉIA-CHAVE A energia potencial U armazenada em um capacitor está relacionada à capacitância C e à diferença de potencial V através da Eq. 25-22 ($U = \frac{1}{2}CV^2$).

Cálculo: De acordo com a Eq. 25-24, podemos escrever

$$U_f = \tfrac{1}{2}C_f V_f^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}10C_i)V_f^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(0{,}10)(250 \times 10^{-12}\ \text{F})(6000\ \text{V})^2$$

$$= 4{,}5 \times 10^{-4}\ \text{J} = 0{,}45\ \text{mJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

Essa energia é mais do que suficiente para atear fogo à maca. Os investigadores concluíram que o incêndio na maca se deveu a uma centelha produzida pelo capacitor maca-câmara quando a carga ficou concentrada em uma pequena região no momento em que a maca estava sendo retirada da câmara.

Exemplo 25-5

Uma esfera condutora isolada cujo raio R é 6,85 cm possui uma carga $q = 1{,}25$ nC.

(a) Qual é a energia potencial armazenada no campo elétrico desse condutor carregado?

IDÉIAS-CHAVE (1) Uma esfera condutora isolada possui uma capacitância dada pela Eq. 25-18 ($C = 4\pi\varepsilon_0 R$); (2) a relação entre a energia U armazenada em um capacitor, a carga q armazenada no capacitor e a capacitância C é dada pela Eq. 25-21 ($U = q^2/2C$).

Cálculo: Fazendo $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ na Eq. 25-21, obtemos

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{(1{,}25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(8\pi)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0{,}0685\ \text{m})}$$

$$= 1{,}03 \times 10^{-7}\ \text{J} = 103\ \text{nJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a densidade de energia na superfície da esfera?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 25-25 ($u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$), a densidade de energia u armazenada em um campo elétrico depende do módulo E do campo.

Cálculos: Precisamos determinar o valor de E na superfície da esfera. O valor de E é dado pela Eq. 23-15:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

A densidade de energia é, portanto,

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

$$= \frac{(1{,}25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(32\pi^2)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0{,}0685\ \text{m})^4}$$

$$= 2{,}54 \times 10^{-5}\ \text{J/m}^3 = 25{,}4\ \mu\text{J/m}^3. \quad \text{(Resposta)}$$

25-6 | Capacitor com um Dielétrico

Quando preenchemos o espaço entre as placas de um capacitor com um *dielétrico*, que é um material isolante como plástico ou óleo mineral, o que acontece com a capacitância? O cientista inglês Michael Faraday, a quem devemos o conceito de capacitância (a unidade de capacitância no SI recebeu o nome de farad em sua homenagem), foi o primeiro a investigar o assunto em 1837. Usando um equipamento simples como o que aparece na Fig. 25-13, Faraday constatou que a capacitância era

FIG. 25-13 Equipamento usado por Faraday em suas experiências com capacitores. O dispositivo completo (segundo da esquerda para a direita) constitui um capacitor esférico formado por uma esfera central de bronze e uma casca concêntrica feita do mesmo material. Faraday colocou vários dielétricos diferentes no espaço entre a esfera e a casca. *(The Royal Institute, England/Bridgeman Art Library/NY)*

multiplicada por um fator numérico κ, que chamou de **constante dielétrica** do material isolante. A Tabela 25-1 mostra alguns materiais dielétricos e suas constantes dielétricas. Por definição, a constante dielétrica do vácuo é igual à unidade. Como o ar é constituído principalmente de espaço vazio, sua constante dielétrica é apenas ligeiramente maior que a do vácuo.

Outro efeito da introdução de um dielétrico é limitar a diferença de potencial que pode ser aplicada entre as placas a um valor $V_{\text{máx}}$, conhecido como *potencial de ruptura*. Quando esse valor é excedido o material dielétrico sofre um processo conhecido como ruptura e passa a permitir a passagem de cargas de uma placa para a outra. A todo material dielétrico pode ser atribuída uma *rigidez dielétrica*, que corresponde ao máximo valor do campo elétrico que o material pode tolerar sem que ocorra o processo de ruptura. Alguns valores de rigidez dielétrica também aparecem na Tabela 25-1.

Como discutimos logo após a Eq. 25-18, a capacitância de qualquer capacitor pode ser escrita na forma

$$C = \varepsilon_0 \mathscr{L}, \tag{25-26}$$

onde $\mathscr{L}$ tem dimensão de comprimento. Assim, por exemplo, $\mathscr{L} = A/d$ para um capacitor de placas paralelas. Faraday descobriu que no caso em que um dielétrico preenche *totalmente* o espaço entre as placas a Eq. 25-26 se torna

$$C = \kappa\varepsilon_0 \mathscr{L} = \kappa C_{\text{ar}}, \tag{25-27}$$

onde C_{ar} é o valor da capacitância com apenas ar entre as placas.

A Fig. 25-14 mostra, de forma esquemática, os resultados dos experimentos de Faraday. Na Fig. 25-14*a* a bateria mantém uma diferença de potencial V entre as placas. Quando uma placa de dielétrico é introduzida entre as placas a carga q das placas é multiplicada por κ; a carga adicional é fornecida pela bateria. Na Fig. 25-14*b* não há nenhuma bateria e, portanto, a carga q permanece constante quando a placa de dielétrico é introduzida; nesse caso, a diferença de potencial V entre as placas é dividida por κ. As duas observações são compatíveis (através da relação $q = CV$) com um aumento da capacitância causado pela presença do dielétrico.

A comparação das Eqs. 25-26 e 25-27 sugere que o efeito de um dielétrico pode ser descrito da seguinte forma:

> Em uma região totalmente preenchida por um material dielétrico de constante dielétrica κ, a permissividade do vácuo ε_0 deve ser substituída por $\kappa\varepsilon_0$ em todas as equações.

Assim, o módulo do campo elétrico produzido por uma carga pontual no interior de um dielétrico é dado pela seguinte forma modificada na Eq. 23-15:

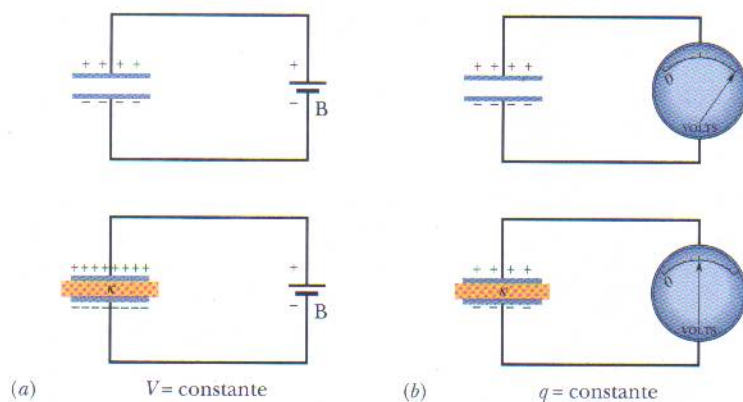
TABELA 25-1

Propriedades de Alguns Dielétricos[a]

Material	Constante Dielétrica κ	Rigidez Dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	1,00054	3
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Óleo de transformador	4,5	
Pirex	4,7	14
Mica rubi	5,4	
Porcelana	6,5	
Silício	12	
Germânio	16	
Etanol	25	
Água (20°C)	80,4	
Água (25°C)	78,5	
Titânia	130	
Titanato de estrôncio	310	8

Para o vácuo, $\kappa = 1$.

[a]Medidas à temperatura ambiente, exceto no caso da água.

FIG. 25-14 (*a*) Se a diferença de potencial entre as placas de um capacitor é mantida por uma bateria B, o efeito de um dielétrico é aumentar a carga das placas. (*b*) Se a carga das placas é mantida, o efeito do dielétrico é reduzir a diferença de potencial entre as placas. O mostrador que aparece na figura é o de um *potenciômetro*, instrumento usado para medir diferenças de potencial (no caso, entre as placas do capacitor). Um capacitor não pode se descarregar através de um potenciômetro.

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{25-28}$$

Do mesmo modo, a expressão do campo elétrico nas proximidades da superfície de um condutor imerso em um dielétrico (veja a Eq. 23-11) é a seguinte:

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}. \tag{25-29}$$

Como κ é sempre maior que a unidade, essas equações mostram que *para uma dada distribuição de cargas o efeito de um dielétrico é diminuir o valor do campo elétrico* que existe no espaço entre as cargas.

Exemplo 25-6

Um capacitor de placas paralelas cuja capacitância C é 13,5 pF é carregado por uma bateria até que haja uma diferença de potencial V = 12,5 V entre as placas. A bateria é desligada e uma placa de porcelana (κ = 6,50) é introduzida entre as placas.

(a) Qual é a energia potencial do capacitor antes da introdução da placa?

IDÉIA-CHAVE A energia potencial U_i do capacitor está relacionada à capacitância C e ao potencial V (através da Eq. 25-22) ou à carga q (através da Eq. 25-21):

$$U_i = \tfrac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Cálculo: Como conhecemos o potencial inicial V (= 12,5 V), podemos usar a Eq. 25-22 para calcular a energia potencial inicial:

$$\begin{aligned} U_i &= \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(13{,}5 \times 10^{-12}\ \text{F})(12{,}5\ \text{V})^2 \\ &= 1{,}055 \times 10^{-9}\ \text{J} = 1055\ \text{pJ} \approx 1100\ \text{pJ}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(b) Qual é a energia potencial do conjunto capacitor-placa depois que a placa é introduzida?

IDÉIA-CHAVE Como a bateria foi desligada, a carga do capacitor não pode mudar quando o dielétrico é introduzido. Entretanto, o potencial *pode* mudar.

Cálculos: Devemos usar a Eq. 25-21 para calcular a energia potencial final U_f, mas agora que o espaço entre as placas do capacitor está ocupado pela placa de porcelana a capacitância é κC. Assim, temos:

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{1055\ \text{pJ}}{6{,}50} \\ &= 162\ \text{pJ} \approx 160\ \text{pJ}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Isso mostra que quando a placa de porcelana é introduzida a energia potencial é dividida por κ.

A energia "perdida", em princípio, poderia ser medida pela pessoa encarregada de introduzir a placa de porcelana, já que o capacitor atrai a placa e realiza sobre ela um trabalho dado por

$$W = U_i - U_f = (1055 - 162)\ \text{pJ} = 893\ \text{pJ}.$$

Se a placa penetrasse livremente no espaço entre as placas e não houvesse atrito, passaria a oscilar para um lado e para outro com uma energia mecânica (constante) de 893 pJ; essa energia seria convertida alternadamente de energia cinética do movimento da placa em energia potencial armazenada no campo elétrico.

25-7 | Dielétricos: Uma Visão Atômica

O que acontece, em termos atômicos e moleculares, quando submetemos um dielétrico a um campo elétrico? Existem duas possibilidades, dependendo do tipo de molécula.

1. *Dielétricos polares.* As moléculas de alguns dielétricos, como a água, possuem momentos dipolares elétricos permanentes. Nesses materiais (conhecidos como *dielétricos polares*) os dipolos elétricos tendem a se alinhar com um campo elétrico externo, como mostra a Fig. 25-15. Como as moléculas estão constantemente se chocando umas com as outras devido à agitação térmica, o alinhamento não é perfeito, mas tende a aumentar quando o campo elétrico aumenta (ou quando a temperatura diminui, já que nesse caso a agitação térmica é menor). O alinhamento dos dipolos elétricos produz um campo elétrico no sentido oposto ao do campo elétrico aplicado e com um módulo em geral bem menor que o do campo aplicado.

2. *Dielétricos apolares.* Mesmo que não possuam momentos dipolares elétricos permanentes, as moléculas adquirem momentos dipolares por indução quando são submetidas a um campo elétrico externo. Como foi discutido na Seção 24-8 (veja a Fig. 24-11), isso acontece porque o campo externo tende a "esticar" as moléculas, deslocando ligeiramente o centro das cargas negativas em relação ao centro das cargas positivas.

FIG. 25-15 (*a*) Moléculas com um momento dipolar permanente, orientadas aleatoriamente na ausência de um campo elétrico externo. (*b*) Quando um campo elétrico é aplicado os dipolos elétricos se alinham parcialmente. O alinhamento não é completo por causa da agitação térmica.

A Fig. 25-16*a* mostra uma placa feita de um dielétrico apolar na ausência de um campo elétrico externo. Na Fig. 25-16*b* um campo elétrico $\vec{E}_0$ é aplicado através de um capacitor, cujas placas são carregadas da forma mostrada na figura. O resultado é uma ligeira separação dos centros das cargas positivas e negativas no interior da placa de dielétrico, que faz com que uma das superfícies da placa fique positiva (por causa das extremidades positivas dos dipolos nessa parte da placa) e a face oposta fique negativa (por causa das extremidades negativas dos dipolos). A placa como um todo permanece eletricamente neutra, e no interior da placa não existe excesso de cargas positivas ou negativas em nenhum elemento de volume.

A Fig. 25-16*c* mostra que as cargas induzidas nas superfícies do dielétrico produzem um campo elétrico $\vec{E}'$ no sentido oposto ao do campo elétrico aplicado $\vec{E}_0$. O campo resultante $\vec{E}$ no interior do dielétrico (que é a soma vetorial dos campos $\vec{E}_0$ e $\vec{E}'$) tem a mesma direção que $\vec{E}_0$, mas é menor em módulo.

Tanto o campo produzido pelas cargas superficiais dos dipolos induzidos nas moléculas apolares (Fig. 25-16*c*) como o campo elétrico produzido pelos dipolos permanentes das moléculas polares (Fig. 25-15) apontam no sentido oposto ao do campo aplicado. Assim, tanto os dielétricos polares como os apolares enfraquecem o campo elétrico na região em que se encontram, que pode ser o espaço entre as placas de um capacitor.

Agora podemos compreender por que a placa de dielétrico do Exemplo 25-6 é atraída para o interior do capacitor: Quando o dielétrico penetra no espaço entre as placas a carga superficial que aparece em cada superfície do dielétrico e a carga da placa mais próxima do capacitor têm sinais opostos. Assim, as placas do capacitor e a placa de dielétrico se atraem mutuamente.

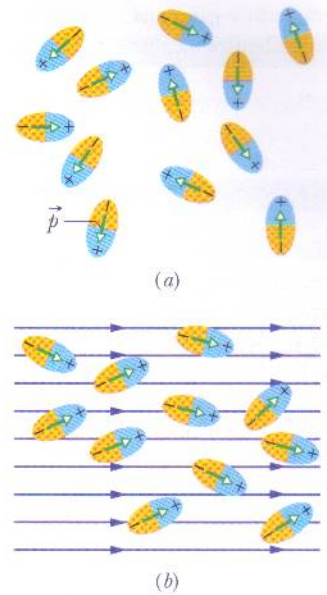
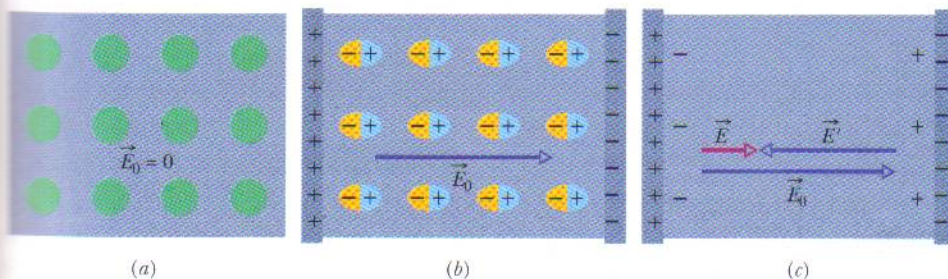



FIG. 25-16 (*a*) Dielétrico apolar. Os círculos representam os átomos eletricamente neutros do material. (*b*) As placas carregadas de um capacitor produzem um campo elétrico; o campo separa ligeiramente as cargas positivas das cargas negativas do material. (*c*) A separação produz cargas nas superfícies do material; as cargas criam um campo $\vec{E}'$ que se opõe ao campo aplicado $\vec{E}_0$. O campo resultante $\vec{E}$ no interior do material (a soma vetorial de $\vec{E}_0$ e $\vec{E}'$) tem a mesma direção que $\vec{E}_0$, mas um módulo menor.

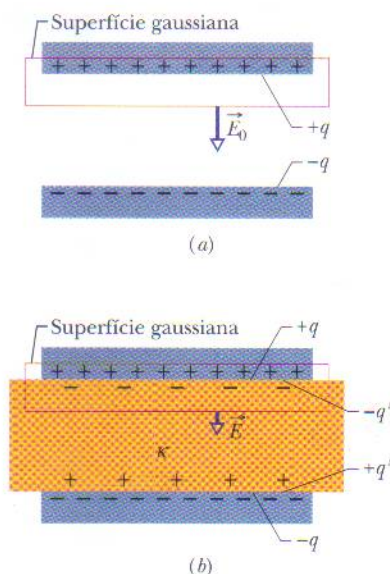



FIG. 25-17 Capacitor de placas paralelas (*a*) sem e (*b*) com um dielétrico entre as placas. A carga q das placas é considerada a mesma nos dois casos.

25-8 | Dielétricos e a Lei de Gauss

Em nossa discussão da lei de Gauss no Capítulo 23 supusemos que as cargas estavam no vácuo. Agora vamos modificar e generalizar a lei para que possa ser aplicada ao interior de materiais dielétricos como os da Tabela 25-1. A Fig. 25-17 mostra um capacitor de placas paralelas com e sem um dielétrico no espaço entre as placas, cuja área é A. Vamos supor que a carga q das placas é a mesma nas duas situações. Observe que o campo elétrico entre as placas induz cargas nas superfícies do dielétrico por um dos mecanismos discutidos na Seção 25-7.

Para a situação da Fig. 25-17*a*, na ausência de um dielétrico, podemos calcular o campo elétrico $\vec{E}_0$ entre as placas como fizemos na Fig. 25-5: envolvemos a carga $+q$ da placa superior com uma superfície gaussiana e aplicamos a lei de Gauss. Chamando de E_0 o módulo do campo, temos:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E_0 A = q, \tag{25-30}$$

ou

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}. \tag{25-31}$$

Na Fig. 25-17*b*, com um dielétrico no espaço entre as placas, podemos calcular o campo elétrico entre as placas (e no interior do dielétrico) usando a mesma superfície gaussiana. Agora, porém, a superfície envolve dois tipos de cargas: a carga $+q$ da placa superior do capacitor e a carga induzida $-q'$ da superfície superior do dielétrico. Dizemos que a carga da placa do capacitor é uma *carga livre* porque pode se mover sob a ação de um campo elétrico aplicado; a carga induzida na superfície do dielétrico não é uma carga livre, pois não pode deixar o local em que se encontra.

Como a carga total envolvida pela superfície gaussiana da Fig. 25-17*b* é $q - q'$, a lei de Gauss nos dá

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E A = q - q', \tag{25-32}$$

ou

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}. \tag{25-33}$$

Como o efeito do dielétrico é dividir por κ o campo original E_0, podemos escrever:

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A}. \tag{25-34}$$

Comparando as Eqs. 25-33 e 25-34, temos

$$q - q' = \frac{q}{\kappa}. \tag{25-35}$$

A Eq. 25-35 mostra corretamente que o valor absoluto q' da carga induzida na superfície do dielétrico é menor que o da carga livre q e que é zero na ausência de um dielétrico (caso em que $\kappa = 1$ na Eq. 25-35).

Substituindo $q - q'$ na Eq. 25-32 pelo seu valor, dado pela Eq. 25-35, podemos escrever a lei de Gauss na forma

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \text{(Lei de Gauss com dielétrico).} \tag{25-36}$$

Essa equação, embora tenha sido demonstrada para o caso particular de um capacitor de placas paralelas, é válida para todos os casos e constitui a forma mais geral da lei de Gauss. Observe o seguinte:

1. A integral de fluxo agora envolve o produto $\kappa\vec{E}$ em vez de $\vec{E}$. (O vetor $\varepsilon_0\kappa\vec{E}$ recebe o nome de *deslocamento elétrico* e é representado pelo símbolo $\vec{D}$; assim, a Eq. 25-36 pode ser escrita na forma $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$.)

2. A carga q envolvida pela superfície gaussiana agora é tomada como sendo *apenas a carga livre*. A carga induzida nas superfícies do dielétrico é deliberadamente ignorada no lado direito da Eq. 25-36, pois seus efeitos já foram levados em conta quando a constante dielétrica κ foi introduzida do lado direito.
3. A diferença entre a Eq. 25-36 e a Eq. 23-7, nossa versão original da lei de Gauss, está apenas no fato de que na Eq. 25-36 a constante ε_0 foi substituída por $\kappa\varepsilon_0$. Mantemos κ no integrando da Eq. 25-36 para incluir os casos em que κ não é a mesma em todos os pontos da superfície gaussiana.

Exemplo 25-7

A Fig. 25-18 mostra um capacitor de placas paralelas em que a área das placas é A e a distância entre as placas é d. Uma diferença de potencial V_0 é aplicada entre as placas. Em seguida, a bateria é desligada e um dielétrico de espessura b e constante dielétrica κ é introduzido entre as placas, da forma mostrada na figura. Suponha que $A = 115$ cm², $d = 1{,}24$ cm, $V_0 = 85{,}5$ V, $b = 0{,}780$ cm e $\kappa = 2{,}61$.

(a) Qual é a capacitância C_0 antes da introdução do dielétrico?

Cálculo: De acordo com a Eq. 25-9, temos:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{1{,}24 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8{,}21 \times 10^{-12}\ \text{F} = 8{,}21\ \text{pF}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o valor da carga das placas?

Cálculo: De acordo com a Eq. 25-1, temos

$$q = C_0 V_0 = (8{,}21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85{,}5\ \text{V})$$
$$= 7{,}02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como a bateria usada para carregar o capacitor foi desligada antes que o dielétrico fosse introduzido, a carga das placas não muda quando o dielétrico é introduzido.

(c) Qual é o campo elétrico E_0 nos espaços entre as placas do capacitor e o dielétrico?

IDÉIA-CHAVE Podemos aplicar a lei de Gauss, na forma da Eq. 25-36, à superfície gaussiana I da Fig. 25-18.

FIG. 25-18 Capacitor de placas paralelas com um dielétrico que não ocupa totalmente o espaço entre as placas.

Cálculos: Como essa superfície passa pelo espaço vazio entre o capacitor e o dielétrico, envolve *apenas* a carga da placa superior do capacitor. Como o vetor área $d\vec{A}$ e o vetor campo $\vec{E}_0$ apontam verticalmente para baixo, o produto escalar da Eq. 25-36 se torna

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = E_0\, dA \cos 0° = E_0\, dA.$$

Nesse caso, a Eq. 25-36 assume a forma

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 \oint dA = q.$$

A integração agora nos dá simplesmente a área A da placa. Assim, temos:

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 A = q,$$

ou

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A}.$$

Devemos fazer $\kappa = 1$ porque a superfície gaussiana I não passa pelo dielétrico. Assim, temos:

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{7{,}02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(1)(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6{,}90\ \text{kV/m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que o valor de E_0 não varia quando o dielétrico é introduzido porque a carga envolvida pela superfície gaussiana I da Fig. 25-18 não varia.

(d) Qual é o campo elétrico E_1 no interior do dielétrico?

IDÉIA-CHAVE Podemos aplicar a lei de Gauss na forma da Eq. 25-36 à superfície gaussiana II da Fig. 25-18.

Cálculos: Essa superfície envolve a carga livre $-q$ e a carga induzida $+q'$, mas esta última deve ser ignorada quando usamos a Eq. 25-36. O resultado é

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_0 \kappa E_1 A = -q. \qquad (25\text{-}37)$$

(O primeiro sinal negativo dessa equação vem do produto escalar $\vec{E}_1 \cdot d\vec{A}$, já que agora o vetor campo $\vec{E}_1$ aponta verticalmente para baixo e o vetor área $d\vec{A}$ aponta verticalmente para cima.) Dessa vez, a constante dielétrica é a do dielétrico ($\kappa = 2{,}61$). Assim, a Eq. 25-37 nos dá

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{6{,}90 \text{ kV/m}}{2{,}61}$$
$$= 2{,}64 \text{ kV/m.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(e) Qual é a diferença de potencial V entre as placas depois da introdução do dielétrico?

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar V integrando de uma placa do capacitor até a outra ao longo de uma trajetória retilínea perpendicular ao plano das placas.

Cálculo: No interior do dielétrico a distância percorrida é b e o campo elétrico é E_1; nos espaços vazios entre as placas do capacitor e a superfície do dielétrico a distância percorrida é $d - b$ e o campo elétrico é E_0. De acordo com a Eq. 25-6, temos

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = E_0(d - b) + E_1 b$$
$$= (6900 \text{ V/m})(0{,}0124 \text{ m} - 0{,}00780 \text{ m})$$
$$+ (2640 \text{ V/m})(0{,}00780 \text{ m})$$
$$= 52{,}3 \text{ V.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Esse valor é menor que a diferença de potencial original de 85,5 V.

(f) Qual é a capacitância com o dielétrico entre as placas do capacitor?

IDÉIA-CHAVE A capacitância C está relacionada à carga livre q e à diferença de potencial V através da Eq. 25-1.

Cálculo: Usando o valor de q calculado no item (b) e o valor de V calculado no item (e), temos:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{7{,}02 \times 10^{-10} \text{ C}}{52{,}3 \text{ V}}$$
$$= 1{,}34 \times 10^{-11} \text{ F} = 13{,}4 \text{ pF.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Esse valor é maior que a capacitância original de 8,21 pF.

REVISÃO E RESUMO

Capacitor; Capacitância Um **capacitor** é formado por dois condutores isolados (as *placas*) com cargas $+q$ e $-q$. A capacitância de um capacitor é definida através da equação

$$q = CV, \qquad (25\text{-}1)$$

onde V é a diferença de potencial entre as placas. A unidade de capacitância do SI é o farad (1 farad = 1 F = 1 coulomb por volt).

Cálculo da Capacitância Podemos calcular a capacitância de um capacitor (1) supondo que uma carga q foi colocada nas placas, (2) calculando o campo elétrico $\vec{E}$ produzido por essa carga, (3) calculando a diferença de potencial V entre as placas e (4) calculando o valor de C com o auxílio da Eq. 25-1. Seguem alguns resultados particulares.

A capacitância de um *capacitor de placas paralelas* de área A separadas por uma distância d é dada por

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}. \qquad (25\text{-}9)$$

A capacitância de um *capacitor cilíndrico* formado por dois cilindros longos coaxiais de comprimento L e raios a e b é dada por

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}. \qquad (25\text{-}14)$$

A capacitância de um *capacitor esférico* formado por duas cascas esféricas concêntricas de raios a e b é dada por

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b - a}. \qquad (25\text{-}17)$$

Fazendo $b \to \infty$ e $a = R$ na Eq. 25-17 obtemos a capacitância de uma *esfera isolada* de raio R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (25\text{-}18)$$

Capacitores em Paralelo e em Série As **capacitâncias equivalentes** C_{eq} de combinações de capacitores ligados em **paralelo** ou em **série** podem ser calculadas usando as expressões

$$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (n \text{ capacitores em paralelo}) \qquad (25\text{-}19)$$

e

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \qquad (n \text{ capacitores em série}). \qquad (25\text{-}20)$$

As capacitâncias equivalentes podem ser usadas para calcular as capacitâncias de combinações mais complicadas de capacitores em série e em paralelo.

Energia Potencial e Densidade de Energia A **energia potencial elétrica** U de um capacitor carregado,

$$U = \frac{q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV^2, \qquad (25\text{-}21, 25\text{-}22)$$

é igual ao trabalho necessário para carregar o capacitor. Essa energia pode ser associada ao campo elétrico $\vec{E}$ criado pelo capacitor no espaço entre as placas. Por extensão, podemos associar qualquer campo elétrico a uma energia armazenada. No vácuo, a **densidade de energia** u, ou energia potencial por unidade de volume, associada a um campo elétrico de módulo E é dada por

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \qquad (25\text{-}25)$$

Capacitância com um Dielétrico Se o espaço entre as placas de um capacitor é totalmente preenchido por um ma-

terial dielétrico, a capacitância C é multiplicada por um fator κ, conhecido como **constante dielétrica**, que varia de material para material. Em uma região totalmente preenchida por um material dielétrico de constante dielétrica κ a permissividade do vácuo ε_0 deve ser substituída por $\kappa\varepsilon_0$ em todas as equações.

Os efeitos da presença de um dielétrico podem ser explicados em termos da ação de um campo elétrico sobre os dipolos elétricos permanentes ou induzidos no dielétrico. O resultado é a formação de cargas induzidas nas superfícies do dielétrico. Essas cargas tornam o campo no interior do dielétrico menor que o campo que seria produzido na mesma região pelas cargas livres das placas do capacitor se o dielétrico não estivesse presente.

Lei de Gauss com um Dielétrico Na presença de um dielétrico a lei de Gauss assume a seguinte forma:

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q, \qquad (25\text{-}36)$$

onde q é a carga livre. O efeito das cargas induzidas no dielétrico é levado em conta através da inclusão na integral da constante dielétrica κ.

PERGUNTAS

1 A Fig. 25-19 mostra os gráficos da carga em função da diferença de potencial para três capacitores de placas paralelas cujos parâmetros são dados na tabela. Associe os gráficos aos capacitores.

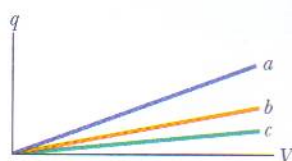



FIG. 25-19 Pergunta 1.

Capacitor	Área	Distância
1	A	d
2	$2A$	d
3	A	$2d$

2 A Fig. 25-20 mostra uma chave aberta, uma bateria que produz uma diferença de potencial V, um medidor de corrente A e três capacitores iguais descarregados de capacitância C. Depois que a chave é fechada e o circuito atinge o equilíbrio, (a) qual é a diferença de potencial entre as placas de cada capacitor? (b) Qual é a carga na placa da esquerda de cada capacitor? (c) Qual é a carga total que passa pelo medidor durante o processo?

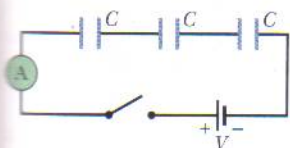



FIG. 25-20 Pergunta 2.

3 Para cada circuito da Fig. 25-21, determine se os capacitores estão ligados em série, em paralelo ou nem em série nem em paralelo.

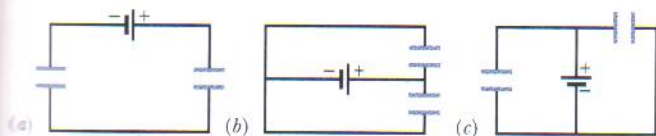



FIG. 25-21 Pergunta 3.

4 Qual é a capacitância equivalente C_{eq} de três capacitores, todos de capacitância C, se os capacitores são ligados a uma bateria (a) em série; (b) em paralelo? (c) Em qual dos dois arranjos a carga total armazenada nos capacitores é maior?

5 (a) Na Fig. 25-22*a* os capacitores 1 e 3 estão ligados em série? (b) Na mesma figura, os capacitores 1 e 2 estão ligados em paralelo? (c) Coloque os circuitos da Fig. 25-22 na ordem de suas capacitâncias equivalentes, começando pela maior.

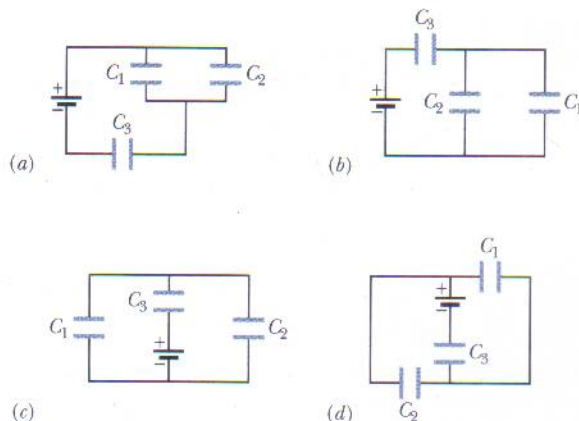



FIG. 25-22 Pergunta 5.

6 A Fig. 25-23 mostra três circuitos formados por uma chave e dois capacitores inicialmente carregados da forma indicada na figura (com a placa superior positiva). Depois que as chaves são fechadas, em que circuito(s) a carga do capacitor da esquerda (a) aumenta; (b) diminui; (c) permanece constante?

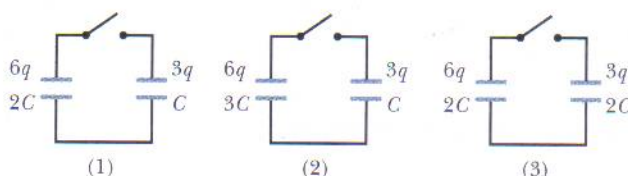



FIG. 25-23 Pergunta 6.

7 Inicialmente, uma capacitância C_1 está ligada a uma bateria. Em seguida a capacitância C_2 é ligada em paralelo com C_1. (a) A diferença de potencial entre as placas de C_1 aumenta, diminui ou permanece a mesma? (b) A carga armazenada em C_1 aumenta,

diminui ou permanece a mesma? (c) A capacitância equivalente de C_1 e C_2, C_{12}, é maior, menor ou igual a C_1? (d) A soma das cargas armazenadas em C_1 e C_2 é maior, menor ou igual à carga armazenada originalmente em C_1?

8 Repita a Pergunta 7 para o caso em que a capacitância C_2 é ligada em série com C_1.

9 As capacitâncias C_1 e C_2, com $C_1 > C_2$, são ligadas a uma bateria, primeiro separadamente, depois em série e depois em paralelo. Coloque os arranjos na ordem da carga armazenada, começando pela maior.

10 Uma placa de material dielétrico é introduzida entre as placas de um dos dois capacitores iguais da Fig. 25-24. Determine se cada uma das propriedades do capacitor mencionadas a seguir aumenta, diminui ou permanece constante: (a) a capacitância; (b) a carga; (c) a diferença de potencial entre as placas; (d) a energia potencial. (e) Responda às mesmas perguntas para o outro capacitor.

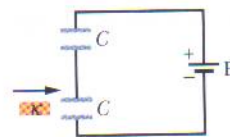



FIG. 25-24 Pergunta 10.

11 Um capacitor de placas paralelas é ligado a uma bateria que produz uma diferença de potencial V. Se a distância entre as placas diminui, determine se cada uma das grandezas mencionadas a seguir aumenta, diminui ou permanece constante: (a) a capacitância do capacitor; (b) a diferença de potencial entre as placas do capacitor; (c) a carga do capacitor; (d) a energia armazenada pelo capacitor; (e) o módulo do campo elétrico na região entre as placas; (f) a densidade de energia do campo elétrico.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 25-2 Capacitância

•1 Os dois objetos de metal da Fig. 25-25 possuem cargas de +70 pC e −70 pC, que resultam em uma diferença de potencial de 20 V entre eles. (a) Qual é a capacitância do sistema? (b) Se as cargas mudam para +200 pC e −200 pC, qual é o novo valor da capacitância? (c) Qual é o novo valor da diferença de potencial?

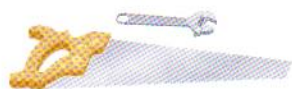



FIG. 25-25 Problema 1.

•2 O capacitor da Fig. 25-26 possui uma capacitância de 25 μF e está inicialmente descarregado. A bateria produz uma diferença de potencial de 120 V. Quando a chave S é fechada, qual é a carga total que passa por ela?

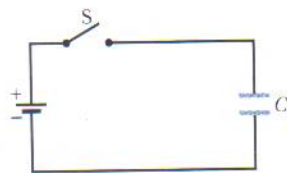



FIG. 25-26 Problema 2.

seção 25-3 Cálculo da Capacitância

•3 Se um capacitor de placas paralelas inicialmente descarregado, de capacitância C, é ligado a uma bateria, uma das placas, de área A, se torna negativa quando muitos elétrons migram para sua superfície. Na Fig. 25-27 a profundidade d até a qual os elétrons migram para a superfície em um certo capacitor está plotada em função da tensão V da bateria. A escala vertical é definida por d_s = 1,00 pm e a escala horizontal por V_s = 20,0 V. Quanto vale a razão C/A?

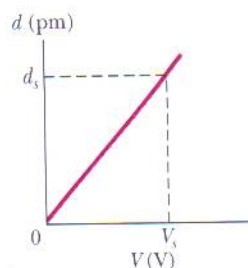



FIG. 25-27 Problema 3.

•4 Pretende-se usar duas placas de metal com 1,00 m² de área para construir um capacitor de placas paralelas. (a) Qual deve ser a distância entre as placas para que a capacitância do dispositivo seja 1,00 F? (b) O dispositivo é fisicamente viável?

•5 Um capacitor de placas paralelas possui placas circulares com um raio de 8,20 cm, separadas por uma distância de 1,30 mm. (a) Calcule a capacitância. (b) Qual é a carga das placas se uma diferença de potencial de 120 V é aplicada ao capacitor?

•6 As placas de um capacitor esférico têm 38,0 mm e 40,0 mm de raio. (a) Calcule a capacitância. (b) Qual é a área das placas de um capacitor de placas paralelas com a mesma capacitância e a mesma distância entre as placas?

•7 Qual é a capacitância de uma gota formada pela fusão de duas gotas esféricas de mercúrio com 2,00 mm de raio?

seção 25-4 Capacitores em Paralelo e em Série

•8 Determine a capacitância equivalente do circuito da Fig. 25-28 para C_1 = 10,0 μF, C_2 = 5,00 μF e C_3 = 4,00 μF.

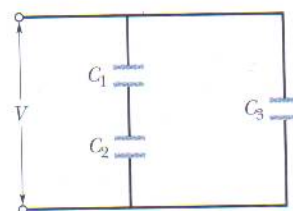



FIG. 25-28 Problemas 8 e 36.

•9 Determine a capacitância equivalente do circuito da Fig. 25-29 para $C_1 = 10{,}0\ \mu F$, $C_2 = 5{,}00\ \mu F$ e $C_3 = 4{,}00\ \mu F$.

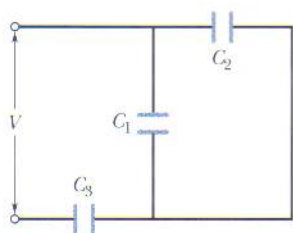



FIG. 25-29 Problemas 9, 13 e 34.

•10 Quantos capacitores de $1{,}00\ \mu F$ devem ser ligados em paralelo para armazenar uma carga de 1,00 C com uma diferença de potencial de 110 V entre as placas dos capacitores?

•11 Os três capacitores da Fig. 25-30 estão inicialmente descarregados e têm uma capacitância de $25{,}0\ \mu F$. Uma diferença de potencial $V = 4200$ V entre as placas dos capacitores é estabelecida quando a chave é fechada. Qual é a carga total que atravessa o medidor A?

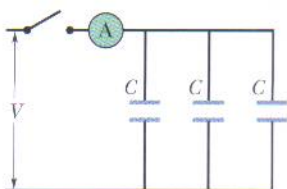



FIG. 25-30 Problema 11.

••12 Na Fig. 25-31 a bateria tem uma diferença de potencial $V = 10{,}0$ V e os cinco capacitores têm uma capacitância de $10{,}0\ \mu F$. Determine a carga (a) do capacitor 1; (b) do capacitor 2.

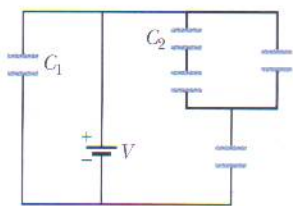



FIG. 25-31 Problema 12.

••13 Na Fig. 25-29, uma diferença de potencial $V = 100{,}0$ V é aplicada ao circuito, e os valores das capacitâncias são $C_1 = 10{,}0\ \mu F$, $C_2 = 5{,}00\ \mu F$ e $C_3 = 4{,}00\ \mu F$. Se o capacitor 3 sofre uma ruptura dielétrica e passa a se comportar como um condutor, determine (a) o aumento da carga do capacitor 1; (b) o aumento da diferença de potencial entre as placas do capacitor 1.

••14 Dois capacitores de placas paralelas, ambos com uma capacitância de $6{,}0\ \mu F$, são ligados em paralelo a uma bateria de 10 V. Em seguida, a distância entre as placas de um dos capacitores é reduzida à metade. Quando essa modificação acontece, (a) qual é a carga adicional transferida aos capacitores pela bateria? (b) Qual é o aumento da carga total armazenada pelos capacitores?

••15 Um capacitor de 100 pF é carregado com uma diferença de potencial de 50 V e a bateria usada para carregar o capacitor é desligada. Em seguida, o capacitor é ligado em paralelo com um segundo capacitor, inicialmente descarregado. Se a diferença de potencial entre as placas do primeiro capacitor cai para 35 V, qual é a capacitância do segundo capacitor?

••16 A Fig. 25-32 mostra quatro capacitores, cujo dielétrico é o ar, ligados em um circuito que faz parte de um circuito maior. O gráfico abaixo do circuito mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x no ramo inferior do circuito, passando pelo capacitor 4. O gráfico acima do circuito mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x no ramo superior do circuito, passando pelos capacitores 1, 2 e 3. O capacitor 3 tem uma capacitância de $0{,}80\ \mu F$. Determine a capacitância (a) do capacitor 1; (b) do capacitor 2.

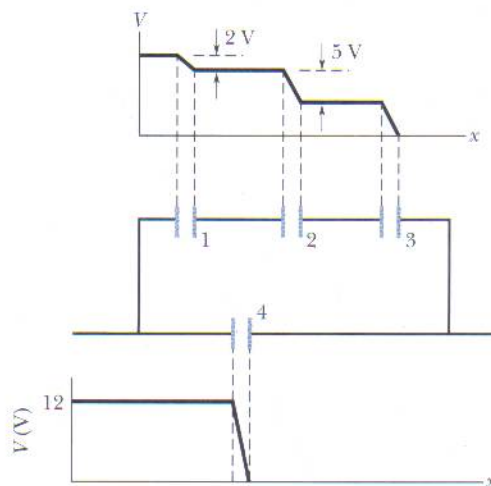



FIG. 25-32 Problema 16.

••17 Na Fig. 25-33 uma bateria de 20,0 V é ligada a um circuito constituído por capacitores de capacitâncias $C_1 = C_6 = 3{,}00\ \mu F$ e $C_3 = C_5 = 2{,}00C_2 = 2{,}00C_4 = 4{,}00\ \mu F$. Determine (a) a capacitância equivalente C_{eq} do circuito; (b) a carga armazenada por C_{eq}; (c) V_1 e (d) q_1 do capacitor 1; (e) V_2 e (f) q_2 do capacitor 2; (g) V_3 e (h) q_3 do capacitor 3.

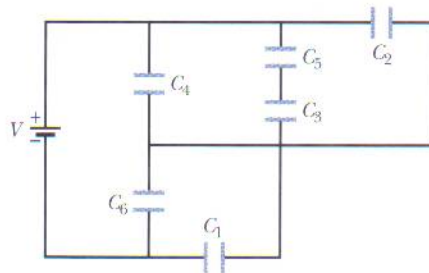



FIG. 25-33 Problema 17.

••18 O gráfico 1 da Fig. 25-34*a* mostra a carga q armazenada no capacitor 1 em função da diferença de potencial V entre as placas. A escala vertical é definida por $q_s = 16{,}0\ \mu C$ e a escala horizontal é definida por $V_s = 2{,}0$ V. Os gráficos 2 e 3 são gráficos do mesmo tipo para os capacitores 2 e 3, respectivamente. A Fig. 25-34*b* mostra um circuito com esses três capacitores e uma bateria de 6,0 V. Determine a carga do capacitor 2.

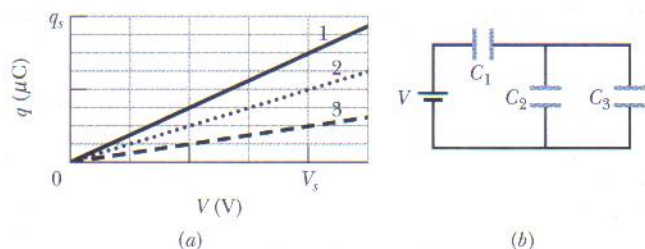



FIG. 25-34 Problema 18.

••19 Na Fig. 25-35, as capacitâncias são $C_1 = 1{,}0\ \mu$F e $C_2 = 3{,}0\ \mu$F, e os dois capacitores são carregados com diferenças de potencial $V = 100$ V de polaridades opostas. Em seguida, as chaves S_1 e S_2 são fechadas. (a) Qual é a nova diferença de potencial entre os pontos a e b? (b) Qual é a nova carga do capacitor 1? (c) Qual é a nova carga do capacitor 2?

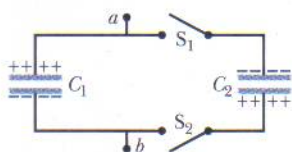



FIG. 25-35 Problema 19.

••20 Na Fig. 25-36, $V = 10$ V, $C_1 = 10\ \mu$F e $C_2 = C_3 = 20\ \mu$F. A chave S é acionada para a esquerda e permanece nessa posição até o capacitor 1 atingir o equilíbrio; em seguida, a chave é acionada para a direita. Quando o equilíbrio é novamente atingido, qual é a carga do capacitor 1?

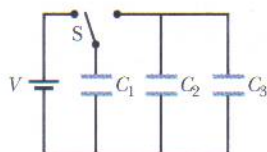



FIG. 25-36 Problema 20.

••21 Na Fig. 25-37, dois capacitores de placas paralelas (com ar entre as placas) são ligados a uma bateria. A área das placas do capacitor 1 é 1,5 cm², e o campo elétrico entre as placas é 2000 V/m. A área das placas do capacitor 2 é 0,70 cm² e o campo elétrico entre as placas é 1500 V/m. Qual é a carga total dos dois capacitores?

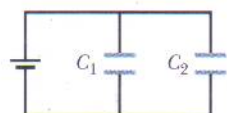



FIG. 25-37 Problema 21.

••22 A Fig. 25-38 mostra dois capacitores cilíndricos cujo dielétrico é o ar, ligados em série a uma bateria com um potencial $V = 10$ V. O capacitor 1 possui um raio interno de 5,0 mm, um raio externo de 1,5 cm e um comprimento de 5,0 cm. O capacitor 2 possui um raio interno de 2,5 mm, um raio externo de 1,0 cm e um comprimento de 9,0 cm. A placa externa do capacitor 2 é uma membrana orgânica condutora que pode ser esticada, e o capacitor pode ser inflado para aumentar a distância entre as placas. Se o raio da placa externa é aumentado para 2,5 cm, (a) quantos elétrons passam pelo ponto P? (b) Os elétrons se movem na direção da bateria ou na direção do capacitor 2?

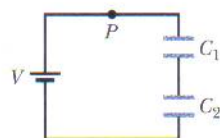



FIG. 25-38 Problema 22.

••23 Na Fig. 25-39, $V = 9{,}0$ V, $C_2 = 3{,}0\ \mu$F, $C_4 = 4{,}0\ \mu$F e todos os capacitores estão inicialmente descarregados. Quando a chave S é fechada uma carga total de 12 μC passa pelo ponto a e uma carga total de 8,0 μC passa pelo ponto b. (a) Qual é o valor de C_1? (b) Qual é o valor de C_3?

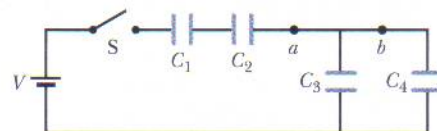



FIG. 25-39 Problema 23.

••24 A Fig. 25-40 mostra um capacitor variável com "dielétrico de ar" do tipo usado para sintonizar manualmente receptores de rádio. O capacitor é formado por dois conjuntos de placas intercaladas, um grupo de placas fixas, todas ligadas entre si, e um grupo de placas móveis, também ligadas entre si. Considere um capacitor com 4 placas de cada tipo de área $A = 1{,}25$ cm²; a distância entre placas vizinhas é $d = 3{,}40$ mm. Qual é a capacitância máxima do conjunto?

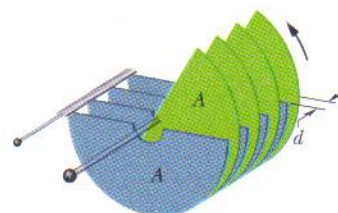



FIG. 25-40 Problema 24.

••25 Os capacitores da Fig. 25-35 estão inicialmente descarregados. As capacitâncias são $C_1 = 4{,}0\ \mu$F, $C_2 = 8{,}0\ \mu$F e $C_3 = 12\ \mu$F, e a diferença de potencial da bateria é $V = 12$ V. Quando a chave S é fechada, quantos elétrons passam (a) pelo ponto a; (b) pelo ponto b; (c) pelo ponto c; (d) pelo ponto d? Na figura, os elétrons estão se movendo para cima ou para baixo ao passarem (e) pelo ponto b; (f) pelo ponto c?

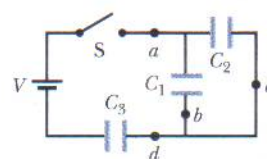



FIG. 25-41 Problema 25.

•••26 A Fig. 25-42 mostra uma bateria de 12,0 V e três capacitores descarregados de capacitâncias $C_1 = 4{,}00\ \mu$F, $C_2 = 6{,}00\ \mu$F e $C_3 = 3{,}00\ \mu$F. A chave é deslocada para a esquerda até que

o capacitor 1 esteja totalmente carregado. Em seguida, a chave é deslocada para a direita. Determine a carga final (a) do capacitor 1; (b) do capacitor 2; (c) do capacitor 3.

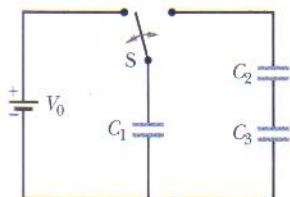



FIG. 25-42 Problema 26.

•••27 A Fig. 25-43 mostra uma bateria de 12,0 V e quatro capacitores descarregados de capacitâncias $C_1 = 1{,}00\ \mu$F, $C_2 = 2{,}00\ \mu$F, $C_3 = 3{,}00\ \mu$F e $C_4 = 4{,}00\ \mu$F. Se apenas a chave S_1 é fechada, determine a carga (a) do capacitor 1; (b) do capacitor 2; (c) do capacitor 3; (d) do capacitor 4. Se as duas chaves são fechadas, determine a carga (e) do capacitor 1; (f) do capacitor 2; (g) do capacitor 3; (h) do capacitor 4.

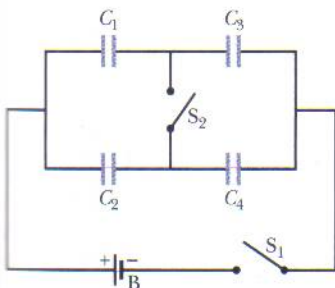



FIG. 25-43 Problema 27.

•••28 O capacitor 3 da Fig. 25-44*a* é um *capacitor variável* (é possível fazer variar a capacitância C_3). A Fig. 25-44b mostra o potencial elétrico V_1 entre as placas do capacitor 1 em função de C_3. A escala horizontal é definida por $C_{3s} = 12{,}0\ \mu$F. O potencial elétrico V_1 tende assintoticamente para 10 V quando $C_3 \to \infty$. Determine (a) o potencial elétrico V da bateria; (b) C_1; (c) C_2.

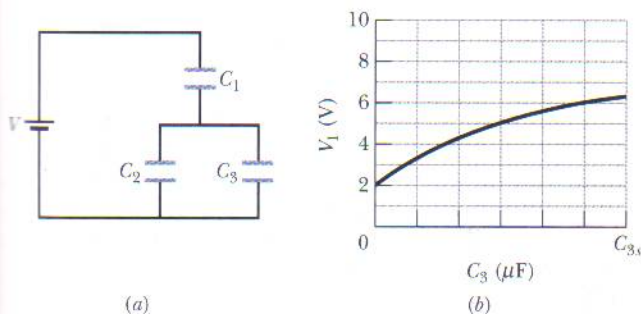



FIG. 25-44 Problema 28.

seção 25-5 Energia Armazenada em um Campo Elétrico

•29 Um capacitor de 2,0 μF e um capacitor de 4,0 μF são ligados em paralelo a uma fonte com uma diferença de potencial de 300 V. Calcule a energia total armazenada nos capacitores.

•30 Um capacitor de placas paralelas cujo dielétrico é o ar é carregado com uma diferença de potencial de 600 V. A área das placas é 40 cm² e a distância entre as placas é 1,00 mm. Determine (a) a capacitância, (b) o valor absoluto da carga em uma das placas, (c) a energia armazenada, (d) o campo elétrico na região entre as placas e (e) a densidade de energia na região entre as placas.

•31 Qual é a capacitância necessária para armazenar uma energia de 10 kW · h com uma diferença de potencial de 1000 V?

•32 Qual é a energia armazenada em 1,00 m³ de ar devido ao campo elétrico em um dia de "tempo bom", que tem um módulo da ordem de 150 V/m?

••33 Considere um elétron estacionário como uma carga pontual e determine a densidade de energia u do campo elétrico criado pela partícula (a) a 1,00 mm de distância; (b) a 1,00 μm de distância; (c) a 1,00 nm de distância; (d) a 1,00 pm de distância. (e) Qual é o limite de u quando a distância tende a zero?

••34 Na Fig. 25-29, uma diferença de potencial $V = 100$ V é aplicada a um circuito de capacitores cujas capacitâncias são $C_1 = 10{,}0\ \mu$F, $C_2 = 5{,}00\ \mu$F e $C_3 = 15{,}0\ \mu$F. Determine (a) q_3; (b) V_3; (c) a energia armazenada U_3; (d) q_1; (e) V_1; (f) U_1; (g) q_2; (h) V_2; (i) U_2.

••35 Um capacitor de placas paralelas cujas placas têm uma área de 8,50 cm² e estão separadas por uma distância de 3,00 mm é carregado por uma bateria de 6,00 V. A bateria é desligada e a distância entre as placas do capacitor é aumentada (sem descarregá-lo) para 8,00 mm. Determine (a) a diferença de potencial entre as placas; (b) a energia armazenada pelo capacitor no estado inicial; (c) a energia armazenada pelo capacitor no estado final; (d) a energia necessária para separar as placas.

••36 Na Fig. 25-28 uma diferença de potencial $V = 100$ V é aplicada a um circuito de capacitores cujas capacitâncias são $C_1 = 10{,}0\ \mu$F, $C_2 = 5{,}00\ \mu$F e $C_3 = 4{,}00\ \mu$F. Determine (a) q_3; (b) V_3; (c) U_3; (d) q_1; (e) V_1; (f) U_1; (g) q_2; (h) V_2; (i) U_2.

••37 Na Fig. 25-45 $C_1 = 10{,}0\ \mu$F, $C_2 = 20{,}0\ \mu$F e $C_3 = 25{,}0\ \mu$F. Se nenhum dos capacitores pode suportar uma diferença de potencial de mais de 100 V sem que o dielétrico se rompa, determine (a) a maior diferença de potencial que pode existir entre os pontos A e B; (b) a máxima energia que pode ser armazenada no conjunto de três capacitores.

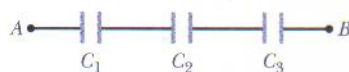



FIG. 25-45 Problema 37.

••38 Como engenheiro de segurança, o leitor precisa emitir um parecer a respeito da prática de armazenar líquidos condutores inflamáveis em recipientes feitos de material não-condutor. A companhia que fornece um certo líquido vem usando um recipiente cilíndrico, feito de plástico, de raio $r = 0{,}20$ m, que está cheio até uma altura $h = 10$ cm, menor que a altura interna do recipiente (Fig. 25-46). A investigação do leitor revela que durante o transporte a superfície externa do recipiente adquire uma densidade de cargas negativas de 2,0 μC/m² (aproximadamente uniforme). Como o líquido é um bom condutor de eletricidade, essa carga faz com que as cargas do líquido se separem. (a) Qual é a carga negativa induzida no centro do líquido? (b) Suponha que a capacitância da parte central do líquido em relação à terra seja 35 pF. Qual é a energia potencial associada à carga negativa desse capacitor efetivo? (c) Se ocorrer uma centelha entre a terra e a parte central do líquido (através do respiradouro), a energia potencial pode alimentar a centelha. A energia mínima necessária para inflamar o líquido é 10 mJ. Nessa situação, o líquido pode pegar fogo por causa de uma centelha?

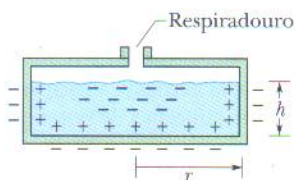



FIG. 25-46 Problema 38.

••39 Uma esfera de metal carregada, com 10 cm de diâmetro, tem uma energia potencial de 8000 V em relação a $V = 0$ no infinito. Calcule a densidade de energia do campo elétrico perto da superfície da esfera.

seção 25-6 Capacitor com um Dielétrico

•40 Um capacitor de placas paralelas cujo dielétrico é o ar tem uma capacitância de 50 pF. (a) Se a área das placas é de 0,35 m^2, qual é a distância entre as placas? (b) Se a região entre as placas é preenchida por um material com $\kappa = 5{,}6$, qual é a nova capacitância?

•41 Dado um capacitor de 7,4 pF cujo dielétrico é o ar, você recebe a missão de convertê-lo em um capacitor capaz de armazenar até 7,4 μJ com uma diferença de potencial máxima de 652 V. Que dielétrico da Tabela 25-1 você usaria para preencher o espaço entre as placas se não fosse permitida nenhuma margem de erro?

•42 Um capacitor de placas paralelas cujo dielétrico é o ar tem uma capacitância de 1,3 pF. A distância entre as placas é multiplicada por dois e o espaço entre as placas é preenchido com cera, o que faz a capacitância aumentar para 2,6 pF. Determine a constante dielétrica da cera.

•43 Um cabo coaxial usado em uma linha de transmissão tem um raio interno de 0,10 mm e um raio externo de 0,60 mm. Calcule a capacitância por metro do cabo, supondo que o espaço entre os condutores seja preenchido com poliestireno.

••44 Na Fig. 25-47, qual é a carga armazenada nos capacitores de placas paralelas se a diferença de potencial da bateria é 12,0 V? O dielétrico de um dos capacitores é o ar; o do outro, uma substância com $\kappa = 3{,}00$. Para os dois capacitores, a área das placas é $5{,}00 \times 10^{-3}$ m^2 e a distância entre as placas é 2,00 mm.

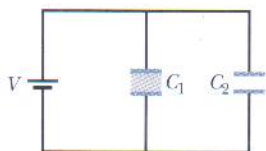



FIG. 25-47 Problema 44.

••45 Uma certa substância tem uma constante dielétrica de 2,8 e uma rigidez dielétrica de 18 MV/m. Se for usada como dielétrico de um capacitor de placas paralelas, qual deverá ser, no mínimo, a área das placas do capacitor para que a capacitância seja $7{,}0 \times 10^{-2}$ μF e o capacitor suporte uma diferença de potencial de 4,0 kV?

••46 Você está interessado em construir um capacitor com uma capacitância de aproximadamente 1 nF e um potencial de ruptura de mais de 10 000 V, e pensa em usar as superfícies laterais de um copo de pirex como dielétrico, revestindo as faces interna e externa com folha de alumínio para fazer as placas. O copo tem 15 cm de altura, um raio interno de 3,6 cm e um raio externo de 3,8 cm. Determine (a) a capacitância e (b) o potencial de ruptura desse capacitor.

••47 Um certo capacitor de placas paralelas contém um dielétrico para o qual $\kappa = 5{,}5$. A área das placas é 0,034 m^2 e a distância entre as placas é 2,0 mm. O capacitor ficará inutilizado se o campo elétrico entre as placas exceder 200 kN/C. Qual é a máxima energia que pode ser armazenada no capacitor?

••48 A Fig. 25-48 mostra um capacitor de placas paralelas com uma área das placas $A = 5{,}56$ cm^2 e uma distância entre as placas $d = 5{,}56$ mm. A metade da esquerda do espaço entre as placas é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_1 = 7{,}00$; a metade da direita é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_2 = 12{,}0$. Qual é a capacitância?

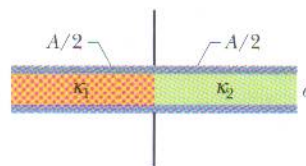



FIG. 25-48 Problema 48.

••49 A Fig. 25-49 mostra um capacitor de placas paralelas com uma área das placas $A = 7{,}89$ cm^2 e uma distância entre as placas $d = 4{,}62$ mm. A metade superior do espaço entre as placas é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_1 = 11{,}00$; a metade inferior é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_2 = 12{,}0$. Qual é a capacitância?

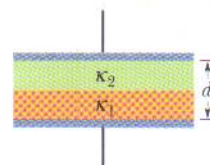



FIG. 25-49 Problema 49.

••50 A Fig. 25-50 mostra um capacitor de placas paralelas com uma área das placas $A = 10{,}5$ cm^2 e uma distância entre as placas $2d = 7{,}12$ mm. O lado esquerdo do espaço entre as placas é preenchido por um material de constante dielétrica $\kappa_1 = 21{,}00$; a metade superior do lado direito é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_2 = 42{,}0$, e a metade inferior do lado direito é preenchida por um material de constante dielétrica $\kappa_3 = 58{,}0$. Qual é a capacitância?

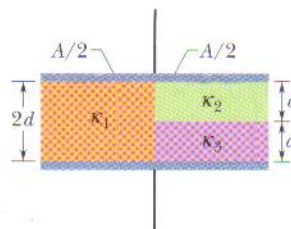



FIG. 25-50 Problema 50.

seção 25-8 Dielétricos e a Lei de Gauss

•51 Um capacitor de placas paralelas tem uma capacitância de 100 pF, uma área das placas de 100 cm^2 e um dielétrico de mica ($\kappa = 5{,}4$) que preenche totalmente o espaço entre as placas. Para uma diferença de potencial de 50 V, calcule (a) o módulo E do campo elétrico no interior do dielétrico; (b) o valor absoluto da carga livre nas placas; (c) o valor absoluto da densidade superficial de cargas induzidas no dielétrico.

•52 No Exemplo 25-7, suponha que a bateria permanece ligada enquanto o dielétrico está sendo introduzido. Determine (a) a capacitância; (b) a carga das placas do capacitor; (c) o campo elétrico nos espaços entre as placas do capacitor e o dielétrico; (d) o campo elétrico no interior do dielétrico, depois que o dielétrico é introduzido.

••53 O espaço entre duas cascas esféricas concêntricas de raios $b = 1{,}70$ cm e $a = 1{,}20$ cm é preenchido por uma substância de constante dielétrica $\kappa = 23{,}5$. Uma diferença de potencial $V = 73{,}0$ V é aplicada entre as duas cascas. Determine (a) a capacitância do dispositivo; (b) a carga livre q da casca interna; (c) a carga q' induzida na superfície do dielétrico mais próxima da casca interna.

••54 Duas placas paralelas de 100 cm^2 de área recebem cargas de mesmo valor absoluto, $8{,}9 \times 10^{-7}$ C, e sinais opostos. O campo elétrico no interior do dielétrico que preenche o espaço entre as placas é $1{,}4 \times 10^6$ V/m. (a) Calcule a constante dielétrica do material. (b) Determine o módulo da carga induzida nas superfícies do dielétrico.

••55 Um capacitor de placas paralelas tem uma área das placas de 0,12 m^2 e uma distância entre as placas de 1,2 cm. Uma bateria é usada para carregar as placas com uma diferença de potencial de 120 V e, em seguida, é removida do circuito. Um dielétrico com 4,0 mm de espessura e constante dielétrica 4,8 é introduzido simetricamente entre as placas. (a) Qual é a capacitância antes da introdução do dielétrico? (b) Qual é a capacitância após a introdução do dielétrico? (c) Qual é a carga das placas antes da introdução do dielétrico? (d) Qual é a carga das placas após a introdução do dielétrico? (e) Qual é o módulo do campo elétrico no espaço entre as placas e o dielétrico? (f) Qual é o módulo do campo elétrico no interior do dielétrico? (g) Qual é a diferença de potencial entre as placas após a introdução do dielétrico? (h) Qual é o trabalho necessário para introduzir o dielétrico?

Problemas Adicionais

56 *O mistério do chocolate em pó.* Esta história começa no Problema 56 do Capítulo 23. Como parte da investigação da explosão ocorrida na fábrica de biscoitos, o potencial elétrico dos operários foi medido enquanto esvaziavam sacos de chocolate em pó em uma bandeja, produzindo uma nuvem de pó de chocolate. Cada operário possuía um potencial elétrico de cerca de 7,0 kV em relação à terra, que foi tomada como potencial zero. (a) Supondo que um operário pode ser modelado por um capacitor com uma capacitância efetiva de 200 pF, determine a energia armazenada nesse capacitor. Se uma única centelha entre um operário e um objeto condutor ligado à terra neutralizasse o operário, essa energia seria transferida para a centelha. De acordo com as medidas, para inflamar uma nuvem de pó de chocolate, provocando assim uma explosão, a centelha teria que ter uma energia de pelo menos 150 mJ. (b) Uma centelha produzida por um operário poderia provocar uma explosão enquanto o chocolate em pó estava sendo descarregado na bandeja? (A história continua no Problema 48 do Capítulo 26.)

57 A Fig. 25-51 mostra o capacitor 1 ($C_1 = 8{,}00\ \mu$F), o capacitor 2 ($C_2 = 6{,}00\ \mu$F) e o capacitor 3 ($C_3 = 8{,}00\ \mu$F) ligados a uma bateria de 12,0 V. Quando a chave S é fechada, ligando ao circuito o capacitor 4 ($C_4 = 6{,}00\ \mu$F), inicialmente descarregado, determine (a) o valor da carga que passa pelo ponto P, proveniente da bateria; (b) o valor da carga armazenada no capacitor 4; (c) Explique por que os resultados dos itens (a) e (b) não são iguais.

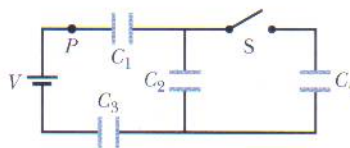



FIG. 25-51 Problema 57.

58 Dois capacitores de placas paralelas cujo dielétrico é o ar são ligados a uma bateria de 10 V, primeiro separadamente, depois em série e, finalmente, em paralelo. Nesses arranjos, a energia armazenada nos capacitores é, em ordem crescente, 75 μJ, 100 μJ, 300 μJ e 400 μJ. (a) Qual é o valor do menor capacitor? (b) Qual é o valor do maior capacitor?

59 Dois capacitores de placas paralelas, ambos com uma capacitância de 6,0 μF, são ligados em série a uma bateria de 10 V; em seguida, a distância entre as placas de um dos capacitores é reduzida à metade. (a) Qual é o valor da carga adicional transferida para os capacitores pela bateria em conseqüência da mudança? (b) Qual é o aumento da carga *total* armazenada nos capacitores (a soma da carga armazenada na placa positiva de um dos capacitores com a carga armazenada na placa positiva do outro capacitor)?

60 Na Fig. 25-52 $V = 12$ V, $C_1 = C_5 = C_6 = 6{,}0\ \mu$F e $C_2 = C_3 = C_4 = 4{,}0\ \mu$F. Determine (a) a carga total armazenada nos capacitores; (b) a carga do capacitor 4.

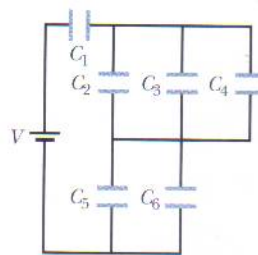



FIG. 25-52 Problema 60.

61 Na Fig. 25-53 $V = 9{,}0$ V, $C_1 = C_2 = 30\ \mu$F e $C_3 = C_4 = 15\ \mu$F. Qual é a carga do capacitor C_4?

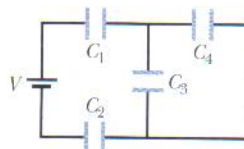



FIG. 25-53 Problema 61.

62 Na Fig. 25-54 a diferença de potencial V da bateria é 10,0 V e os sete capacitores têm uma capacitância de 10,0 μF. Determine (a) a carga do capacitor 1; (b) a carga do capacitor 2.

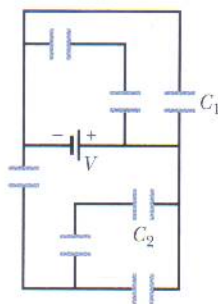



FIG. 25-54 Problema 62.

63 Na Fig. 25-55 $V = 12$ V, $C_1 = C_4 = 2{,}0\ \mu$F, $C_2 = 4{,}0\ \mu$F e $C_3 = 1{,}0\ \mu$F. Qual é a carga do capacitor C_4?

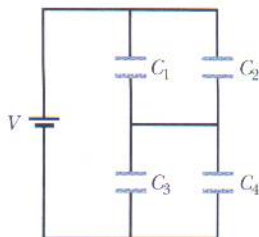



FIG. 25-55 Problema 63.

64 As capacitâncias dos quatro capacitores da Fig. 25-56 são expressas em termos de uma constante C. (a) Se $C = 50\ \mu$F, qual é a capacitância equivalente entre os pontos A e B? (*Sugestão:* Imagine primeiro que uma bateria foi ligada entre os dois pontos; em seguida, reduza o circuito a uma capacitância equivalente.) (b) Responda à mesma pergunta do item (a) para os pontos A e D.

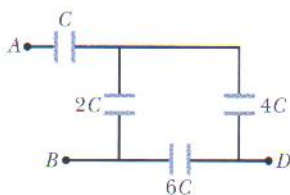



FIG. 25-56 Problema 64.

65 Um capacitor de capacitância $C_1 = 6{,}00\ \mu$F é ligado em série com um capacitor de capacitância $C_2 = 4{,}00\ \mu$F, e uma diferença de potencial de 200 V é aplicada ao par de capacitores. (a) Calcule a capacitância equivalente. Determine (b) a carga q_1; (c) a diferença de potencial V_1; (d) q_2; (e) V_2.

66 Repita o Problema 65 para os mesmos dois capacitores, supondo que estão ligados em paralelo.

67 Um capacitor de capacitância desconhecida C é carregado com 100 V e ligado a um capacitor de 60 μF inicialmente descarregado. Se a diferença de potencial final entre os terminais do capacitor de 60 μF é 40 V, qual é o valor de C?

68 Os raios de um capacitor cilíndrico como o da Fig. 25-6 são a e b. Mostre que metade da energia potencial elétrica armazenada está no interior de um cilindro de raio $r = \sqrt{ab}$.

69 Na Fig. 25-57 dois capacitores de placas paralelas A e B são ligados em paralelo a uma bateria de 600 V. A área das placas dos capacitores é de 80,0 cm^2 e a distância entre as placas é de 3,00 mm. O dielétrico do capacitor A é o ar; o do capacitor B é um material de constante dielétrica $\kappa = 2{,}60$. Determine o módulo do campo elétrico (a) no espaço entre as placas do capacitor B; (b) no espaço entre as placas do capacitor A. Determine a densidade de cargas livres σ (c) na placa de maior potencial do capacitor A; (d) na placa de maior potencial do capacitor B. (e) Determine a densidade de cargas induzidas σ' na superfície superior do dielétrico do capacitor B.

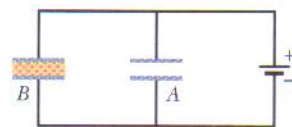



FIG. 25-57 Problema 69.

70 Uma diferença de potencial de 300 V é aplicada à combinação em série de dois capacitores de capacitâncias $C_1 = 2{,}00\ \mu$F e $C_2 = 8{,}00\ \mu$F. Determine (a) a carga q_1; (b) a diferença de potencial V_1; (c) q_2; (d) V_2. Os capacitores carregados são desligados um do outro e da bateria; em seguida, a ligação entre os capacitores é refeita, mas com as placas com cargas de *mesmo* sinal ligadas entre si (a bateria não é mais usada). Determine os novos valores de (e) q_1; (f) V_1; (g) q_2; (h) V_2. Suponha que os capacitores carregados no item (a) tenham sido ligados com cargas de sinais *opostos* ligadas entre si. Determine quais são, nesse caso, os valores de (i) q_1; (j) V_1; (k) q_2; (l) V_2.

71 Um certo capacitor é carregado com uma diferença de potencial V. Qual deve ser o aumento percentual de V para que a energia armazenada aumente de 10%?

72 O leitor dispõe de duas placas de cobre, uma folha de mica (espessura = 0,10 mm, $\kappa = 5{,}4$), um pedaço de vidro (espessura = 2,0 mm, $\kappa = 7{,}0$) e um bloco de parafina (espessura = 1,0 cm, $\kappa = 2{,}0$). Para fabricar um capacitor de placas paralelas com o maior valor possível de C, que material deve ser colocado entre as placas de cobre?

73 Na Fig. 25-58 as placas do capacitor de placas paralelas têm uma área de $2{,}00 \times 10^{-2}$ m^2, e o espaço entre as placas é preenchido por dois blocos de material isolante com 2,00 mm de espessura cada um. A constante dielétrica de um dos materiais é 3,00 e a do outro é 4,00. Qual é a carga armazenada no capacitor por uma bateria de 7,00 V?

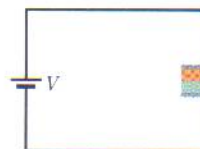



FIG. 25-58 Problema 73.

74 Um bloco de cobre com espessura $b = 2{,}00$ mm é colocado entre as placas de um capacitor de placas paralelas. A área das placas é $A = 2{,}40$ cm^2 e a distância entre elas é $d = 5{,}00$ mm. Como mostra a Fig. 25-59, o bloco é colocado exatamente no centro do espaço entre as placas. (a) Qual é a capacitância após

a introdução do bloco? (b) Se uma carga $q = 3{,}40\ \mu C$ é mantida nas placas, qual é a razão entre as energias armazenadas antes e depois da introdução do bloco? (c) Qual é o trabalho executado quando o bloco é introduzido? (d) O bloco é atraído ou repelido pelo espaço entre as placas?

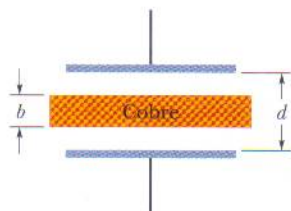



FIG. 25-59 Problemas 74 e 75.

75 Repita o Problema 74 supondo que, em vez de a carga ser mantida constante, uma diferença de potencial entre as placas $V = 85{,}0$ V é que é mantida constante.

76 O leitor dispõe de um suprimento ilimitado de capacitores de $2{,}0\ \mu F$, que suportam uma tensão de 200 V. De que forma esses capacitores podem ser usados para montar um circuito com uma capacitância equivalente (a) de $0{,}40\ \mu F$ e (b) de $1{,}2\ \mu F$? Suponha que em ambos os casos o circuito tem que suportar uma tensão de 1000 V.

77 A Fig. 25-60 mostra um circuito com quatro capacitores que está ligado a um circuito maior através dos pontos A e B. As capacitâncias são $C_1 = 10\ \mu F$ e $C_2 = C_3 = C_4 = 20\ \mu F$. A carga do capacitor 1 é $30\ \mu C$. Qual é o valor absoluto da diferença de potencial $V_A - V_B$?

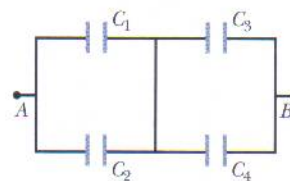



FIG. 25-60 Problema 77.

78 Uma bateria de 10 V é ligada a n capacitores em série, cada um com uma capacitância de $2{,}0\ \mu F$. Se a energia total armazenada nos capacitores é $25\ \mu J$, qual é o valor de n?

26 Corrente e Resistência

Cortesia de The Roanoke Times/©Eric Brady

A foto mostra um relâmpago que caiu a menos de 1 km de um estádio superlotado. A probabilidade de que uma pessoa seja atingida diretamente por um relâmpago é muito pequena; o grande perigo está no movimento de cargas elétricas, conhecido como corrente de terra, produzido por um relâmpago ao atingir o solo. Quando uma pessoa está próxima do local onde ocorreu o relâmpago essa corrente pode produzir paralisia ou até mesmo a morte. Entretanto, existe um método simples para reduzir o risco associado à corrente de terra.

Como é possível reduzir os perigos da corrente de terra?

A resposta está neste capítulo.

26-1 O QUE É FÍSICA?

Nos últimos cinco capítulos discutimos a eletrostática, ou seja, a física das cargas estacionárias. Neste capítulo e no que se segue vamos discutir as **correntes elétricas**, isto é, as cargas em movimento.

Os exemplos de correntes elétricas são inúmeros e envolvem várias profissões. Os meteorologistas estudam os relâmpagos e o movimento de cargas menos espetaculares na atmosfera. Biólogos, fisiologistas e engenheiros que trabalham na área de bioengenharia se interessam pelas correntes nervosas que controlam os músculos e, especialmente, pelo modo como essas correntes podem ser restabelecidas em caso de danos à coluna vertebral. Os engenheiros elétricos trabalham com sistemas elétricos de todos os tipos, como sistemas de energia elétrica, sistemas de proteção contra relâmpagos, sistemas de armazenamento de informações e sistemas musicais. Os engenheiros espaciais observam e estudam as partículas carregadas provenientes do Sol, porque essas partículas podem interferir com os sistemas de telecomunicações via satélite e até mesmo com as linhas de transmissão terrestres.

Neste capítulo vamos discutir a física básica das correntes elétricas e a razão pela qual alguns materiais conduzem corrente elétrica melhor que outros. Começamos pela definição de corrente elétrica.

(*a*)

(*b*)

FIG. 26-1 (*a*) Um fio de cobre em equilíbrio eletrostático. O fio inteiro possui o mesmo potencial e o campo elétrico é zero em todos os pontos do fio. (*b*) Quando introduzimos uma bateria no circuito produzimos uma diferença de potencial entre os pontos do fio que estão ligados aos terminais da bateria. Com isso a bateria produz um campo elétrico no interior do fio, que faz com que cargas elétricas se movam no circuito. Esse movimento de cargas constitui uma corrente i.

26-2 | Corrente Elétrica

Embora uma corrente elétrica seja um movimento de partículas carregadas, nem todas as partículas carregadas que se movem produzem uma corrente elétrica. Para que exista uma corrente elétrica através de uma dada superfície é preciso que haja um fluxo líquido de cargas através da superfície. Dois exemplos deixarão claro o que queremos dizer.

1. Os elétrons livres (elétrons de condução) que existem no interior de um fio de cobre se movem em direções aleatórias com uma velocidade média da ordem de 10^6 m/s. Se fizermos passar um plano imaginário perpendicularmente a um fio de cobre, elétrons de condução passarão pelo plano *nos dois sentidos* bilhões de vezes por segundo, mas não haverá um *fluxo líquido* de cargas e, portanto, não haverá uma *corrente elétrica* no fio. Se ligarmos as extremidades do fio a uma bateria, porém, o número de elétrons que atravessam o plano em um sentido se tornará ligeiramente maior que o número de elétrons que atravessam o plano no sentido oposto; em conseqüência, haverá um fluxo líquido de cargas e, portanto, uma corrente elétrica no fio.
2. O fluxo de água em uma mangueira representa um movimento de cargas positivas (os prótons das moléculas de água) da ordem de milhões de coulombs por segundo. Entretanto, não existe um fluxo líquido de cargas, já que existe também um movimento de cargas negativas (os elétrons das moléculas de água) que compensa exatamente o movimento das cargas positivas. Em conseqüência, a corrente elétrica associada ao movimento da água no interior de uma mangueira é zero.

Neste capítulo vamos nos limitar ao estudo de *correntes constantes* de *elétrons de condução* em *condutores metálicos*, como fios de cobre, por exemplo.

Como lembra a Fig. 26-1*a*, em um circuito fechado feito de material condutor, mesmo que exista um excesso de cargas todos os pontos possuem o mesmo potencial. Não pode existir um campo elétrico no interior do material ou paralelo à superfície. Embora existam elétrons de condução disponíveis, não estão sujeitos a uma força elétrica e, portanto, não existe corrente.

Por outro lado, se introduzimos uma bateria no circuito, como na Fig. 26-1*b*, o potencial não é mais o mesmo em todo o circuito. Campos elétricos são criados no interior do material, exercendo uma força sobre os elétrons de condução que os faz se moverem preferencialmente em uma certa direção e, portanto, produzir uma cor-

FIG. 26-2 A corrente i que atravessa o condutor tem o mesmo valor nos planos aa', bb' e cc'.

FIG. 26-3 relação $i_0 = i_1 + i_2$ é verdadeira para a junção a qualquer que seja a orientação dos três fios no espaço. A corrente não é uma grandeza vetorial, e sim uma grandeza escalar.

rente. Depois de um pequeno intervalo de tempo o movimento dos elétrons atinge um valor constante e a corrente entra no *regime estacionário* (deixa de variar com o tempo).

A Fig. 26-2 mostra uma seção reta de um condutor, parte de um circuito no qual existe uma corrente. Se uma carga dq passa por um plano hipotético (como aa') em um intervalo de tempo dt, a corrente i nesse plano é definida como

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{(definição de corrente).} \tag{26-1}$$

Podemos determinar por integração a carga que passa pelo plano no intervalo de tempo de 0 a t:

$$q = \int dq = \int_0^t i\,dt, \tag{26-2}$$

onde a corrente i pode variar com o tempo.

No regime estacionário a corrente é a mesma nos planos aa', bb' e cc' e em qualquer outro plano que intercepte totalmente o condutor, seja qual for sua localização ou orientação. Isso é uma conseqüência do fato de que a carga é conservada. No regime estacionário, para cada elétron que passa pelo plano cc' um elétron deve passar pelo plano aa'. Da mesma forma, quando um fluxo contínuo de água está passando por uma mangueira, para cada gota que sai pelo bico da mangueira deve entrar uma gota na outra extremidade; a quantidade de água na mangueira também é uma grandeza conservada.

A unidade de corrente no SI é o coulomb por segundo, ou ampère, representado pelo símbolo A:

$$1 \text{ ampère} = 1 \text{ A} = 1 \text{ coulomb por segundo} = 1 \text{ C/s}.$$

A definição formal do ampère será discutida no Capítulo 29.

A corrente elétrica definida pela Eq. 26-1 é uma grandeza escalar, já que a carga e o tempo que aparecem na equação são grandezas escalares. Entretanto, como na Fig. 26-1*b*, freqüentemente representamos uma corrente com uma seta para indicar o sentido em que as cargas estão se movendo. Essas setas não são vetores, e a elas não se aplicam as regras das operações vetoriais. A Fig. 26-3*a* mostra um condutor percorrido por uma corrente i_0 se dividindo em dois ramos. Como a carga é conservada, a soma das correntes nos dois ramos é igual à corrente inicial:

$$i_0 = i_1 + i_2. \tag{26-3}$$

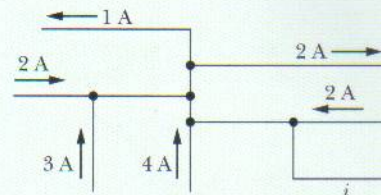
Como ilustra a Fig. 26-3*b*, a Eq. 26-3 continua a ser válida mesmo que os fios sejam retorcidos. No caso da corrente, as setas indicam apenas o sentido em que as cargas estão se movendo em um condutor, e não uma direção no espaço.

O Sentido da Corrente

Na Fig. 26-1*b* desenhamos as setas que indicam a corrente no sentido em que partículas positivamente carregadas seriam forçadas pelo campo elétrico a se mover no circuito. Se fossem positivos, esses *portadores de carga*, como são chamados, sairiam do terminal positivo da bateria e entrariam no terminal negativo. Na verdade, no caso do fio de cobre da Fig. 26-1*b* os portadores de carga são elétrons, partículas negativamente carregadas. O campo elétrico faz essas partículas se moverem no sentido oposto ao indicado pelas setas, do terminal negativo para o terminal positivo. Por razões históricas, porém, usamos a seguinte convenção:

A seta da corrente é desenhada no sentido em que portadores de carga positivos se moveriam, mesmo que os portadores sejam negativos e se movam no sentido oposto.

Podemos usar essa convenção porque, na *maioria* das situações, supor que portadores de carga positivos estão se movendo em um sentido tem exatamente o mesmo efeito do que supor que portadores de carga negativos estão se movendo no sentido oposto. (Nos casos em que isso não é verdade abandonamos a convenção e descrevemos o movimento do modo como realmente acontece.)

TESTE 1 A figura ao lado mostra parte de um circuito. Quais são o valor absoluto e o sentido da corrente i no fio da extremidade inferior direita?

Exemplo 26-1

A vazão da água em uma mangueira, dV/dt, é 450 cm³/s. Qual é a corrente de cargas negativas?

IDÉIAS-CHAVE A corrente i de cargas negativas se deve ao movimento dos elétrons das moléculas de água. A corrente é a taxa com a qual as cargas negativas passam por qualquer plano que intercepta totalmente a mangueira.

Cálculos: Podemos escrever a corrente em termos do número de moléculas que passam por um plano por segundo como

$$i = \begin{pmatrix}\text{carga}\\ \text{por}\\ \text{elétron}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{elétrons}\\ \text{por}\\ \text{molécula}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{moléculas}\\ \text{por}\\ \text{segundo}\end{pmatrix}$$

ou

$$i = (e)(10)\frac{dN}{dt}.$$

Usamos 10 como número de elétrons por molécula porque em uma molécula de água (H_2O) existem 8 elétrons no átomo de oxigênio e 1 elétron em cada átomo de hidrogênio.

Podemos expressar a derivada dN/dt em termos da vazão dV/dt escrevendo

$$\begin{pmatrix}\text{moléculas}\\ \text{por}\\ \text{segundo}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{moléculas}\\ \text{por}\\ \text{mol}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{mols por}\\ \text{unidade}\\ \text{de massa}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{massa por}\\ \text{unidade}\\ \text{de volume}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{volume}\\ \text{por}\\ \text{segundo}\end{pmatrix}.$$

"Moléculas por mol" é o número de Avogadro, N_A. "Mols por unidade de massa" é o inverso da massa molar M da água. "Massa por unidade de volume" é a massa específica ρ da água. "Volume por segundo" é a vazão dV/dt. Assim, temos:

$$\frac{dN}{dt} = N_A\left(\frac{1}{M}\right)\rho\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{N_A\rho}{M}\frac{dV}{dt}.$$

Substituindo este resultado na equação de i, obtemos

$$i = 10eN_AM^{-1}\rho\frac{dV}{dt}.$$

O valor de N_A é $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas/mol, ou $6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}, e $\rho = 1000$ kg/m³. Podemos calcular a massa molar da água a partir das massas molares do oxigênio e do hidrogênio (veja o Apêndice F): Somando a massa molar do oxigênio (16 g/mol) a duas vezes a massa molar do hidrogênio (1 g/mol) obtemos 18 g/mol = 0,018 kg/mol. Assim,

$$\begin{aligned} i &= (10)(1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})(6{,}02 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}) \\ &\quad \times (0{,}018\text{ kg/mol})^{-1}(1000\text{ kg/m}^3)(450 \times 10^{-6}\text{ m}^3\text{/s}) \\ &= 2{,}41 \times 10^7\text{ C/s} = 2{,}41 \times 10^7\text{ A} \\ &= 24{,}1\text{ MA.} \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Essa corrente de cargas negativas é compensada exatamente por uma corrente de cargas positivas associada aos núcleos dos três átomos que formam a molécula de água. Assim, a corrente elétrica associada à água que passa pela mangueira é zero.

26-3 | Densidade de Corrente

Às vezes estamos interessados em conhecer a corrente i em um certo condutor. Em outras ocasiões nosso interesse é mais restrito, e queremos estudar o fluxo de cargas através da seção reta de um condutor em um certo ponto de um circuito. Para descrever esse fluxo usamos a **densidade de corrente** $\vec{J}$, que tem a mesma direção e o

mesmo sentido que a velocidade das cargas que constituem a corrente, se as cargas forem positivas, e a mesma direção e o sentido oposto se as cargas forem negativas. Para cada elemento da seção reta o módulo J da densidade de corrente é igual à corrente dividida pela área do elemento. Podemos escrever a corrente que atravessa o elemento de área como $\vec{J} \cdot d\vec{A}$, em que $d\vec{A}$ é o vetor área do elemento, perpendicular ao elemento. A corrente total que atravessa a superfície é, portanto,

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}. \tag{26-4}$$

Se a corrente é uniforme em toda a superfície e paralela a $d\vec{A}$, $\vec{J}$ também é uniforme e paralela a $d\vec{A}$. Nesse caso, a Eq. 26-4 se torna

$$i = \int J\,dA = J \int dA = JA,$$

e portanto

$$J = \frac{i}{A}, \tag{26-5}$$

onde A é a área total da superfície. De acordo com a Eq. 26-4 e a Eq. 26-5, a unidade de densidade de corrente no SI é o ampère por metro quadrado (A/m^2).

Como vimos no Capítulo 22, os campos elétricos podem ser representados por linhas de campo. A Fig. 26-4 mostra que a densidade de corrente também pode ser representada por um conjunto de linhas, conhecidas como *linhas de corrente*. A corrente, que é da esquerda para a direita na Fig. 26-4, faz uma transição de um condutor mais largo, à esquerda, para um condutor mais estreito, à direita. Como a carga é conservada na transição, a quantidade de carga e, portanto, a quantidade de corrente não pode mudar. O que muda é a densidade de corrente, que é maior no condutor mais estreito. O espaçamento das linhas de corrente é inversamente proporcional à densidade de corrente; quanto mais próximas as linhas de corrente, maior a densidade de corrente.

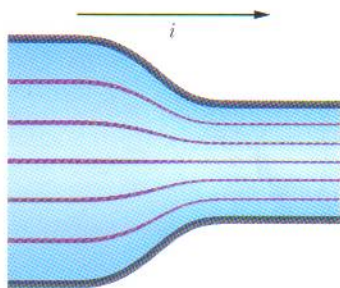



FIG. 26-4 A densidade de corrente pode ser representada por linhas de corrente cujo espaçamento é inversamente proporcional à densidade de corrente.

Velocidade de Deriva

Quando um condutor não está sendo percorrido por uma corrente os elétrons de condução se movem aleatoriamente, sem que haja uma direção preferencial. Quando existe uma corrente os elétrons continuam a se mover aleatoriamente, mas tendem a *derivar* com uma **velocidade de deriva** v_d na direção oposta à do campo elétrico que produziu a corrente. A velocidade de deriva é muito pequena em relação à velocidade com a qual os elétrons se movem aleatoriamente. Assim, por exemplo, nos condutores de cobre da fiação elétrica residencial a velocidade de deriva dos elétrons é da ordem de 10^{-5} ou 10^{-4} m/s, enquanto a velocidade aleatória é da ordem de 10^6 m/s.

Podemos usar a Fig. 26-5 para relacionar a velocidade de deriva v_d dos elétrons de condução em um fio ao módulo J da densidade de corrente no fio. Por conveniência, a Fig. 26-5 mostra a deriva equivalente de portadores de carga *positivos* na direção do campo elétrico aplicado $\vec{E}$. Vamos supor que todos esses portadores de carga se movam com a mesma velocidade de deriva v_d e que a densidade de corrente J é a mesma em toda a seção reta A do fio. Vamos supor ainda que a seção reta do fio é constante. Nesse caso, o número de portadores em um pedaço do fio de comprimento L é nAL, onde n é o número de portadores por unidade de volume. Como cada portador possui uma carga e, a carga total dos portadores nesse pedaço do fio é dada por

$$q = (nAL)e.$$

FIG. 26-5 Portadores de carga positivos se movem com velocidade de deriva v_d na direção do campo elétrico aplicado $\vec{E}$. Por convenção, o sentido da densidade de corrente $\vec{J}$ é o mesmo da corrente.

Como os portadores estão todos se movendo com velocidade v_d, essa carga atravessa uma seção reta do fio em um intervalo de tempo

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

De acordo com a Eq. 26-1, a corrente i é a taxa de variação com o tempo do fluxo de carga em uma seção reta. Assim, temos:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d. \tag{26-6}$$

Explicitando v_d e lembrando que, de acordo com a Eq. 26-5, $i/A = J$, temos:

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{J}{ne}$$

ou, em forma vetorial,

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d. \tag{26-7}$$

O produto ne, que no SI é medido em coulombs por metro quadrado (C/m^3), é chamado de *densidade de carga dos portadores*. No caso de portadores positivos ne é positivo e, portanto, de acordo com a Eq. 26-7, $\vec{J}$ e $\vec{v}_d$ têm o mesmo sentido. No caso de portadores negativos ne é negativo e $\vec{J}$ e $\vec{v}_d$ têm sentidos opostos.

TESTE 2 A figura mostra elétrons de condução que se movem para a esquerda em um fio. Determine se o sentido das grandezas a seguir é para a esquerda ou para a direita: (a) a corrente i; (b) a densidade de corrente $\vec{J}$; (c) o campo elétrico $\vec{E}$ no interior do fio.

Exemplo 26-2

(a) A densidade de corrente em um fio cilíndrico de raio R = 2,0 mm é uniforme ao longo de uma seção reta do fio e igual a $2{,}0 \times 10^5$ A/m^2. Qual é a corrente na parte externa do fio, entre as distâncias radiais $R/2$ e R (Fig. 26-6a)?

IDÉIA-CHAVE Como a densidade de corrente é uniforme, a densidade de corrente J, a corrente i e a seção reta A estão relacionadas através da Eq. 26-5 ($J = i/A$).

Cálculos: Estamos interessados apenas na corrente que atravessa uma parte A' da seção reta do fio, onde

$$A' = \pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{3R^2}{4}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{4}(0{,}0020 \text{ m})^2 = 9{,}424 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Nesse caso, podemos escrever a Eq. 26-5 na forma

$$i = JA'$$

e substituir J e A' por seus valores para obter

$$i = (2{,}0 \times 10^5 \text{ A/m}^2)(9{,}424 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$$
$$= 1{,}9 \text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Suponha que, em vez de ser uniforme, a densidade de corrente varie com a distância radial r de acordo com a equação $J = ar^2$, onde $a = 3{,}0 \times 10^{11}$ A/m^4 e r está em metros. Nesse caso, qual é a corrente na mesma parte do fio?

IDÉIA-CHAVE Como a densidade de corrente não é uniforme, devemos usar a Eq. 26-4 ($i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$) e integrar a densidade de corrente para a parte do fio entre $r = R/2$ e R.

Cálculos: O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ (que é paralelo ao eixo do fio) e o vetor elemento de área $d\vec{A}$ (que é perpendicular à seção reta do fio) têm a mesma direção e o mesmo sentido. Assim,

$$\vec{J} \cdot d\vec{A} = J\,dA \cos 0 = J\,dA.$$

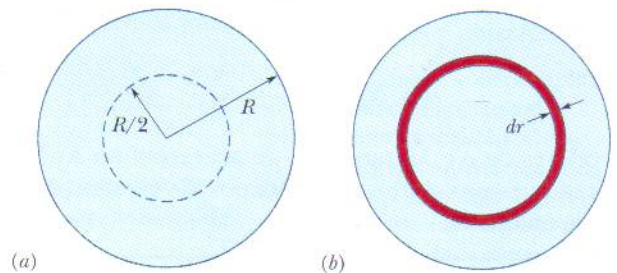



FIG. 26-6 (a) Seção reta de um fio de raio R. (b) Um anel elementar de largura dr e circunferência $2\pi r$ tem uma área elementar $dA = 2\pi r\,dr$.

O elemento de área dA deve ser expresso em termos de uma variável que possa ser integrada entre os limites $r = R/2$ e $r = R$. No caso que estamos examinando, como J é dada em função de r, é conveniente usar como elemento de área a área $2\pi r\,dr$ de um anel elementar de circunferência $2\pi r$ e largura dr (Fig. 26-6b). Podemos integrar a expressão resultante usando r como variável de integração. De acordo com a Eq. 26-4, temos:

$$
\begin{aligned}
i &= \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J\,dA \\
&= \int_{R/2}^{R} ar^2\,2\pi r\,dr = 2\pi a \int_{R/2}^{R} r^3\,dr \\
&= 2\pi a \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R/2}^{R} = \frac{\pi a}{2}\left[R^4 - \frac{R^4}{16}\right] = \frac{15}{32}\pi a R^4 \\
&= \frac{15}{32}\pi(3{,}0\times 10^{11}\ \text{A/m}^4)(0{,}0020\ \text{m})^4 = 7{,}1\ \text{A}.
\end{aligned}
$$

(Resposta)

Exemplo 26-3

Qual é a velocidade de deriva dos elétrons de condução em um fio de cobre de raio $r = 900\ \mu$m percorrido por uma corrente $i = 17$ mA? Suponha que cada átomo de cobre contribua para a corrente com um elétron de condução e que a densidade de corrente é uniforme ao longo da seção reta do fio.

IDÉIAS-CHAVE

1. A velocidade de deriva v_d está relacionada à densidade de corrente $\vec{J}$ e ao número n de elétrons de condução por unidade de volume através da Eq. 26-7, que nesse caso pode ser escrita na forma $J = nev_d$.
2. Como a densidade de corrente é uniforme, o módulo J da densidade de corrente está relacionado à corrente i e à área A da seção reta do fio através da Eq. 26-5, $J = i/A$.
3. Como estamos supondo que existe um elétron de condução por átomo, o número n de elétrons de condução por unidade de volume é igual ao número de átomos por unidade de volume.

Cálculos: Vamos começar pela terceira idéia e escrever

$$
n = \begin{pmatrix}\text{átomos por}\\ \text{unidade}\\ \text{de volume}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{átomos}\\ \text{por}\\ \text{mol}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{mols por}\\ \text{unidade}\\ \text{de massa}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{massa por}\\ \text{unidade}\\ \text{de volume}\end{pmatrix}.
$$

O número de átomos por mol é o número de Avogadro $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. Mols por unidade de massa é o inverso da massa por mol, que no caso é a massa molar M do cobre. Massa por unidade de volume é a massa específica ρ do cobre. Assim,

$$
n = N_A\left(\frac{1}{M}\right)\rho = \frac{N_A \rho}{M}.
$$

Os valores de ρ e M para o cobre aparecem no Apêndice F. Usando esses valores, temos (depois de algumas conversões de unidades)

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{(6{,}02\times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(8{,}96\times 10^{3}\ \text{kg/m}^3)}{63{,}54\times 10^{-3}\ \text{kg/mol}} \\
&= 8{,}49\times 10^{28}\ \text{elétrons/m}^3
\end{aligned}
$$

ou

$$
n = 8{,}49\times 10^{28}\ \text{m}^{-3}.
$$

Vamos agora combinar as duas primeiras idéias e escrever

$$
\frac{i}{A} = nev_d.
$$

Substituindo A por πr^2 ($= 2{,}54 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$) e explicitando v_d, obtemos:

$$
\begin{aligned}
v_d &= \frac{i}{ne(\pi r^2)} \\
&= \frac{17\times 10^{-3}\ \text{A}}{(8{,}49\times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1{,}6\times 10^{-19}\ \text{C})(2{,}54\times 10^{-6}\ \text{m}^2)} \\
&= 4{,}9\times 10^{-7}\ \text{m/s},
\end{aligned}
$$

(Resposta)

que é apenas 1,8 mm/h, uma velocidade menor que a de uma lesma.

A luz acende depressa: A esta altura o leitor deve estar se perguntando: "Se a velocidade de deriva dos elétrons é tão pequena, por que a luz acende no momento em que ligo o interruptor?" Dúvidas como esta surgem porque existe uma diferença entre a velocidade de deriva dos elétrons e a velocidade com a qual *variações* do campo elétrico se propagam ao longo dos fios. Esta última velocidade é quase igual à velocidade da luz; os elétrons em todos os pontos de um circuito começam a se mover quase instantaneamente, entre eles os elétrons que fazem as lâmpadas acender. Analogamente, quando você abre o registro de água do jardim e a mangueira está cheia d'água uma onda de pressão se move ao longo da mangueira com uma velocidade igual à velocidade do som na água, e a água começa a sair do bico da mangueira quase instantaneamente. A velocidade com que a água se move no interior da mangueira, que pode ser medida, por exemplo, usando um corante, é muito menor.

26-4 | Resistência e Resistividade

Quando aplicamos a mesma diferença de potencial às extremidades de barras de mesmas dimensões feitas de cobre e de vidro os resultados são muito diferentes. A característica do material que determina essa diferença é a **resistência** elétrica. Medimos a resistência entre dois pontos de um condutor aplicando uma diferença de potencial V entre esses pontos e medindo a corrente i resultante. A resistência R é dada por

$$R = \frac{V}{i} \quad \text{(definição de } R\text{).} \tag{26-8}$$

FIG. 26-7 Resistores variados. As faixas coloridas indicam o valor da resistência através de um código simples. *(The Image Works)*

De acordo com a Eq. 26-8, a unidade de resistência no SI é o volt por ampère. Esta combinação ocorre com tanta freqüência que uma unidade especial, o **ohm** (Ω), é usada para representá-la. Assim,

$$\begin{aligned} 1 \text{ ohm} &= 1\ \Omega = 1 \text{ volt por ampère} \\ &= 1 \text{ V/A}. \end{aligned} \tag{26-9}$$

Um condutor cuja função em um circuito é introduzir uma certa resistência é chamado de **resistor** (veja a Fig. 26-7). Nos diagramas dos circuitos elétricos um resistor é representado pelo símbolo -ꟿ-. Quando escrevemos a Eq. 26-8 na forma

$$i = \frac{V}{R},$$

vemos que "resistência" é um nome bem escolhido. Para uma dada diferença de potencial, quanto maior a resistência (à passagem de corrente) menor a corrente.

A resistência de um condutor depende do modo como a diferença de potencial é aplicada. A Fig. 26-8, por exemplo, mostra a mesma diferença de potencial aplicada de duas formas diferentes ao mesmo condutor. Como mostram as linhas de corrente, as correntes nos dois casos são diferentes e, portanto, as resistências também são diferentes. A menos que seja dito explicitamente o contrário, vamos supor que as diferenças de potencial são aplicadas aos condutores como na Fig. 26-8*b*.

Como já fizemos em outras ocasiões, estamos interessados em adotar um ponto de vista que enfatize mais o material que o dispositivo. Para isso, concentramos nossa atenção não na diferença de potencial V entre as extremidades de um certo resistor, mas no campo elétrico $\vec{E}$ que existe em um ponto de um material resistivo. Em vez de lidar com a corrente i no resistor, lidamos com a densidade de corrente $\vec{J}$ no ponto em questão. Em vez de falar da resistência R de um dispositivo, falamos da **resistividade** ρ de um material:

$$\rho = \frac{E}{J} \quad \text{(definição de } \rho\text{).} \tag{26-10}$$

FIG. 26-8 Duas formas de aplicar uma diferença de potencial a um condutor. A resistência dos contatos é tão pequena que pode ser desprezada. No arranjo (*a*) em que os contatos se estendem apenas a uma pequena região das extremidades do condutor a resistência é maior que no arranjo (*b*), em que os contatos cobrem toda a superfície das extremidades do condutor.

(Compare esta equação com a Eq. 26-8.)

Combinando as unidades de E e J no SI de acordo com a Eq. 26-10, obtemos, para a unidade de ρ, o ohm-metro ($\Omega \cdot$ m):

$$\frac{\text{unidade de } E}{\text{unidade de } J} = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}}\text{m} = \Omega \cdot \text{m}.$$

(Não confunda o *ohm-metro*, que é a unidade de resistividade, com o *ohmímetro*, que é um instrumento para medir resistências.) A Tabela 26-1 mostra a resistividade de alguns materiais.

Podemos escrever a Eq. 26-10 em forma vetorial:

$$\vec{E} = \rho\vec{J}. \tag{26-11}$$

TABELA 26-1

Resistividade de Alguns Materiais à Temperatura Ambiente (20°C)

Material	Resistividade, ρ $(\Omega \cdot m)$	Coeficiente de Temperatura da Resistividade, α (K^{-1})
	Metais Típicos	
Prata	$1,62 \times 10^{-8}$	$4,1 \times 10^{-3}$
Cobre	$1,69 \times 10^{-8}$	$4,3 \times 10^{-3}$
Ouro	$2,35 \times 10^{-8}$	$4,0 \times 10^{-3}$
Alumínio	$2,75 \times 10^{-8}$	$4,4 \times 10^{-3}$
Manganin[a]	$4,82 \times 10^{-8}$	$0,002 \times 10^{-3}$
Tungstênio	$5,25 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Ferro	$9,68 \times 10^{-8}$	$6,5 \times 10^{-3}$
Platina	$10,6 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
	Semicondutores Típicos	
Silício puro	$2,5 \times 10^{3}$	-70×10^{-3}
Silício[b] tipo n	$8,7 \times 10^{-4}$	
Silício[c] tipo p	$2,8 \times 10^{-3}$	
	Isolantes Típicos	
Vidro	$10^{10} - 10^{14}$	
Quartzo fundido	$\sim 10^{16}$	

[a]Uma liga especial com um baixo valor de α.
[b]Silício dopado com 10^{23} m^{-3} de fósforo.
[c]Silício dopado com 10^{23} m^{-3} de alumínio.

As Eqs. 26-10 e 26-11 são válidas apenas para materiais *isotrópicos*, ou seja, materiais cujas propriedades são as mesmas em todas as direções.

Também podemos falar da **condutividade** σ de um material, que é simplesmente o recíproco da resistividade:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{(definição de } \sigma). \tag{26-12}$$

A unidade de condutividade no SI é o ohm-metro recíproco, $(\Omega \cdot m)^{-1}$. Esta unidade é às vezes chamada de mho (ohm escrito ao contrário). Usando a definição de σ, podemos escrever a Eq. 26-11 na forma

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \tag{26-13}$$

Cálculo da Resistência a Partir da Resistividade

Vamos chamar a atenção mais uma vez para uma importante diferença:

A resistência é uma propriedade de um dispositivo; a resistividade é uma propriedade de um material.

Quando conhecemos a resistividade de um material, como o cobre, por exemplo, não é difícil calcular a resistência de um fio feito desse material. Seja A a área da seção reta, L o comprimento e V a diferença de potencial entre as extremidades do fio (Fig. 26-9). Se as linhas de corrente que representam a densidade de corrente são uniformes ao longo de toda a seção reta, o campo elétrico e a densidade de corrente são iguais em todos os pontos do fio e, de acordo com as Eqs. 24-42 e 26-5, têm os valores

$$E = V/L \quad \text{e} \quad J = i/A. \tag{26-14}$$

FIG. 26-9 Uma diferença de potencial V é aplicada às extremidades de um fio de comprimento L e seção reta A, estabelecendo uma corrente i.

Nesse caso, podemos combinar as Eqs. 26-10 e 26-14 para obter

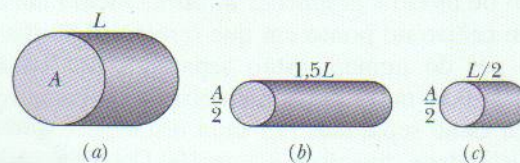
$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{i/A}. \tag{26-15}$$

Como V/i é a resistência R, a Eq. 26-15 pode ser escrita na forma

$$R = \rho\frac{L}{A}. \tag{26-16}$$

A Eq. 26-16 se aplica apenas a condutores isotrópicos homogêneos de seção reta uniforme, com a diferença de potencial aplicada como na Fig. 26-8*b*.

As grandezas macroscópicas V, i e R são de grande interesse quando estamos realizando medidas elétricas em condutores específicos. São essas as grandezas que lemos diretamente nos instrumentos de medida. Por outro lado, quando estamos interessados nas propriedades elétricas dos materiais usamos as grandezas microscópicas E, J e ρ.

TESTE 3 A figura ao lado mostra três condutores cilíndricos de cobre com os respectivos valores do comprimento e da área da seção reta. Coloque os condutores na ordem da corrente que os atravessa quando a mesma diferença de potencial é aplicada às suas extremidades, começando pela maior.

Variação da Resistividade com a Temperatura

Os valores da maioria das grandezas físicas variam com a temperatura, e a resistividade não é exceção. A Fig. 26-10, por exemplo, mostra a variação da resistividade do cobre com a temperatura. A relação entre temperatura e resistividade para o cobre (e para os metais em geral) é quase linear em uma larga faixa de temperaturas. Isso nos possibilita escrever uma fórmula empírica que é adequada para a maioria das aplicações práticas:

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0), \tag{26-17}$$

onde T_0 é uma temperatura de referência e ρ_0 é a resistividade a essa temperatura. Costuma-se escolher como referência $T_0 = 293$ K (temperatura ambiente), caso em que $\rho_0 = 1{,}69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m para o cobre.

Como a temperatura entra na Eq. 26-17 apenas como uma diferença, tanto faz usar a escala Celsius ou a escala Kelvin, já que o valor de um grau nas duas escalas é o mesmo. A constante α que aparece na Eq. 26-17, conhecida como *coeficiente de temperatura da resistividade*, é escolhida para que a concordância da resistividade calculada com a resistividade medida experimentalmente seja a melhor possível para a faixa de temperaturas considerada. A Tabela 26-1 mostra os valores de α para alguns metais.

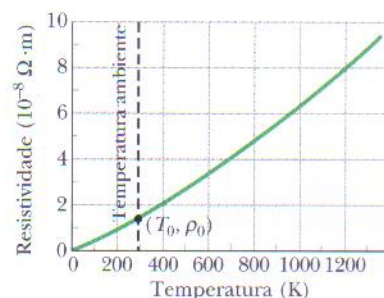



FIG. 26-10 Resistividade do cobre em função da temperatura. O ponto assinala uma temperatura de referência conveniente, $T_0 = 293$ K, na qual a resistividade é $\rho_0 = 1{,}69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m.

Exemplo 26-4

Uma amostra de ferro em forma de paralelepípedo tem dimensões 1,2 cm × 1,2 cm × 15 cm. Uma diferença de potencial é aplicada à amostra entre faces paralelas de tal forma que as faces são superfícies equipotenciais (como na Fig. 26-8*b*). Determine a resistência da amostra se as faces paralelas forem (1) as extremidades quadradas (de dimensões 1,2 cm × 1,2 cm); (2) as extremidades retangulares (de dimensões 1,2 cm × 15 cm).

IDÉIA-CHAVE A resistência R de um objeto depende do modo como o potencial é aplicado ao objeto. Em particu-

lar, de acordo com a Eq. 26-16 ($R = \rho L/A$), a resistência depende da razão L/A, onde A é a área das superfícies às quais é aplicada a diferença de potencial e L é a distância entre essas superfícies.

Cálculos: No caso (1), temos L = 15 cm = 0,15 m e

$$A = (1{,}2 \text{ cm})^2 = 1{,}44 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Substituindo na Eq. 26-16 e usando a resistividade ρ do ferro que aparece na Tabela 26-1, temos:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9{,}68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(0{,}15\text{ m})}{1{,}44 \times 10^{-4}\text{ m}^2}$$
$$= 1{,}0 \times 10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega. \qquad \text{(Resposta)}$$

Analogamente, no caso (2), em que L = 1,2 cm e A = (1,2 cm)(15 cm), obtemos

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9{,}68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(1{,}2 \times 10^{-2}\text{ m})}{1{,}80 \times 10^{-3}\text{ m}^2}$$
$$= 6{,}5 \times 10^{-7}\ \Omega = 0{,}65\ \mu\Omega. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 26-5 Aumente sua capacidade

A Fig. 26-11 mostra um homem e uma vaca, ambos a uma distância D = 60,0 m do local onde um relâmpago de corrente I = 100 kA atingiu o solo. A corrente se espalha pelo solo de modo a preencher uniformemente um hemisfério com centro no ponto em que o relâmpago atingiu o solo. Os pés do homem estão separados por uma distância Δr_h = 0,50 m; as patas dianteiras e as patas traseiras da vaca estão separadas por uma distância Δr_v = 1,50 m. A resistividade do solo é ρ_{solo} = 100 Ω · m. A resistência do homem, entre o pé direito e o pé esquerdo, e a resistência da vaca, entre os cascos dianteiros e os cascos traseiros, são iguais: R = 4,00 kΩ.

(a) Qual é a corrente i_h que atravessa o corpo do homem?

IDÉIAS-CHAVE

1. O relâmpago cria um campo elétrico e um potencial elétrico no solo em volta do ponto de impacto.
2. Como um dos pés do homem está mais próximo do ponto de impacto do que o outro, é estabelecida uma diferença de potencial ΔV entre os pés do homem.
3. Essa diferença de potencial ΔV faz com que uma corrente i_h atravesse o corpo do homem.

FIG. 26-11 A corrente produzida por um relâmpago se espalha pelo solo, de modo a preencher um hemisfério, e chega a uma pessoa e uma vaca situadas a uma distância D do ponto de impacto. Os efeitos do relâmpago sobre as vítimas dependem da distância Δr.

Diferença de potencial: Como a corrente I do relâmpago se espalha uniformemente pelo solo, a densidade de corrente a uma distância r do ponto de impacto pode ser expressa, de acordo com a Eq. 26-5 ($J = i/A$), na forma

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}, \qquad (26\text{-}18)$$

onde $2\pi r^2$ é a área da superfície curva do hemisfério. De acordo com a Eq. 26-10 ($\rho = E/J$), o módulo do campo elétrico é, portanto,

$$E = \rho_{solo} J = \frac{\rho_{solo} I}{2\pi r^2}. \qquad (26\text{-}19)$$

De acordo com a Eq. 24-18 ($\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$), a diferença de potencial ΔV entre um ponto situado a uma distância D do ponto de impacto e um ponto situado a uma distância $D + \Delta r$ é dada por

$$\Delta V = -\int_D^{D+\Delta r} E\, dr. \qquad (26\text{-}20)$$

Substituindo a Eq. 26-19 na Eq. 26-20 e integrando, obtemos:

$$\Delta V = -\int_D^{D+\Delta r} \frac{\rho_{solo} I}{2\pi r^2}\, dr = -\frac{\rho_{solo} I}{2\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_D^{D+\Delta r}$$
$$= \frac{\rho_{solo} I}{2\pi}\left(\frac{1}{D+\Delta r} - \frac{1}{D}\right)$$
$$= -\frac{\rho_{solo} I}{2\pi}\,\frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)}. \qquad (26\text{-}21)$$

Corrente: Se um dos pés do homem está a uma distância D do ponto de impacto e o outro a uma distância $D + \Delta r$, a diferença de potencial entre os pés é dada pela Eq. 26-21. Essa diferença de potencial faz passar uma corrente i_h pelo corpo do homem. Para calcular o valor dessa corrente usamos a Eq. 26-8 ($R = V/i$), onde V é o valor absoluto da diferença de potencial. Combinando as Eqs. 26-8 e 26-21, obtemos:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{\rho_{solo} I}{2\pi}\,\frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)}\,\frac{1}{R}. \qquad (26\text{-}22)$$

Substituindo os valores conhecidos, entre eles a distância entre os pés do homem, $\Delta r_h = 0{,}50$ m, obtemos:

$$i_h = \frac{(100\ \Omega\cdot\text{m})(100\ \text{kA})}{2\pi} \times \frac{0{,}50\ \text{m}}{(60\ \text{m})(60{,}0\ \text{m} + 0{,}50\ \text{m})}\frac{1}{4{,}00\ \text{k}\Omega}$$
$$= 0{,}0548\ \text{A} = 54{,}8\ \text{mA}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Essa corrente é suficiente para causar contrações musculares involuntárias; o homem vai sofrer um choque violento, mas provavelmente não terá danos permanentes. Observe que o homem pode tornar o choque insignificante simplesmente juntando os pés, o que reduz o valor de Δr_h para alguns centímetros.

(b) Qual é a corrente i_v que atravessa o corpo da vaca?

Cálculo: Podemos usar novamente a Eq. 26-22, mas dessa vez Δr é $\Delta r_v = 1{,}50$ m. Para esse valor a corrente que atravessa o corpo da vaca é

$$i_v = 0{,}162\ \text{A} = 162\ \text{mA}, \qquad \text{(Resposta)}$$

um valor suficiente para matar a vaca. A corrente que atravessa o corpo da vaca é maior por causa do maior valor de Δr. Naturalmente, a vaca não pode reduzir o perigo aproximando as patas.

26-5 | Lei de Ohm

Como vimos na Seção 26-4, o resistor é um condutor com um valor específico de resistência. Essa resistência é a mesma, seja qual for o valor absoluto e o sentido (*polaridade*) da diferença de potencial aplicada. Outros dispositivos, porém, podem ter resistências que variam de acordo com a diferença de potencial aplicada.

A Fig. 26-12*a* mostra como caracterizar esses dispositivos. Uma diferença de potencial V é aplicada aos terminais do dispositivo que está sendo testado, e a corrente resultante i é medida em função de V. A polaridade de V é tomada arbitrariamente como sendo positiva quando o terminal da esquerda do dispositivo possui um potencial maior que o terminal da direita. O sentido da corrente (da esquerda para a direita) é tomado arbitrariamente como sendo positivo. Nesse caso, a polaridade contrária de V (com o terminal da direita com um potencial maior) e a corrente resultante são tomadas como sendo negativas.

A Fig. 26-12*b* mostra o gráfico de i em função de V para um certo dispositivo. Como o gráfico é uma linha reta que passa pela origem, a razão i/V (que corresponde à inclinação da reta) é a mesma para qualquer valor de V. Isso significa que a resistência $R = V/i$ do dispositivo é independente do valor absoluto e da polaridade da diferença de potencial aplicada V.

A Fig. 26-12*c* mostra o gráfico de i em função de V para outro dispositivo. Nesse caso só existe corrente quando a polaridade de V é positiva e a diferença de potencial aplicada é maior que 1,5 V. Além disso, no trecho do gráfico em que existe corrente a razão entre i e V não é constante, mas depende do valor da diferença de tensão aplicada V.

Em casos como esses fazemos uma distinção entre os dispositivos que obedecem à lei de Ohm e os que não obedecem à lei de Ohm.

> A **lei de Ohm** é a afirmação de que a corrente que atravessa um dispositivo é *sempre* diretamente proporcional à diferença de potencial aplicada ao dispositivo.

(Hoje sabemos que essa afirmação é correta apenas em certas situações; entretanto, por razões históricas continua a ser chamada de "lei".) O dispositivo da Fig. 26-12*b*, que é um resistor de 1000 Ω, obedece à lei de Ohm. O dispositivo da Fig. 26-12*c*, que é um diodo semicondutor, não obedece à lei de Ohm.

> Um dispositivo obedece à lei de Ohm se a resistência do dispositivo não depende do valor absoluto nem da polaridade da diferença de potencial aplicada.

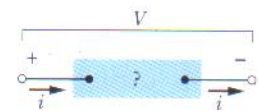
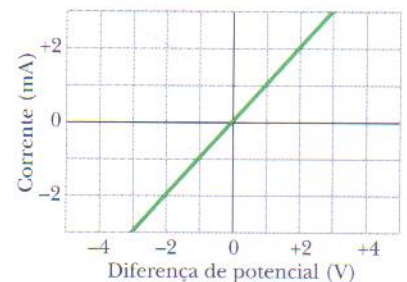
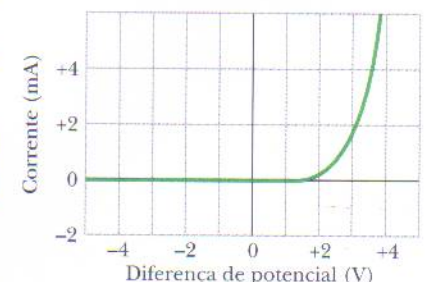
A microeletrônica moderna, e portanto boa parte de nossa tecnologia atual, depende quase totalmente de dispositivos que *não obedecem* à lei de Ohm. Uma calculadora de bolso, por exemplo, contém vários desses dispositivos.

(*a*)

(*b*)

(*c*)

FIG. 26-12 (*a*) Uma diferença de potencial V é aplicada aos terminais de um dispositivo, estabelecendo uma corrente i. (*b*) Gráfico da corrente i em função da diferença de potencial aplicada V quando o dispositivo é um resistor de 1000 Ω. (*c*) O mesmo tipo de gráfico quando o dispositivo é um diodo semicondutor.

É freqüente ouvir a afirmação de que $V = iR$ é uma expressão matemática da lei de Ohm. Isso não é verdade! Essa equação é usada para definir o conceito de resistência e se aplica a todos os dispositivos que conduzem corrente elétrica, mesmo que não obedeçam à lei de Ohm. Se medimos a diferença de potencial V entre os terminais de qualquer dispositivo e a corrente i que atravessa o dispositivo quando ele é submetido a essa diferença de potencial podemos calcular a resistência do dispositivo *para este valor de* V como $R = V/i$, mesmo que se trate de um dispositivo, como um diodo semicondutor, que não obedece à lei de Ohm. A essência da lei de Ohm, por outro lado, está no fato de que o gráfico de i em função de V é linear, ou seja, R não depende de V.

Podemos expressar a lei de Ohm de modo mais geral se nos concentrarmos nos *materiais*, e não nos *dispositivos*. Nesse caso, a relação relevante passa a ser a Eq. 26-11 ($\vec{E} = \rho\vec{J}$) em vez de $V = iR$.

Um material obedece à lei de Ohm se a resistividade do material não depende do módulo nem da direção do campo elétrico aplicado.

Todos os materiais homogêneos, sejam eles condutores como o cobre ou semicondutores como o silício puro ou dopado com impurezas, obedecem à lei de Ohm dentro de uma faixa de valores do campo elétrico aplicado. Para valores elevados do campo elétrico, porém, sempre são observados desvios em relação à lei de Ohm.

TESTE 4 A tabela ao lado mostra a corrente i (em ampères) em dois dispositivos para vários valores da diferença de potencial V (em volts). Determine, a partir desses dados, qual é o dispositivo que não obedece à lei de Ohm.

Dispositivo 1		Dispositivo 2	
V	i	V	i
2,00	4,50	2,00	1,50
3,00	6,75	3,00	2,20
4,00	9,00	4,00	2,80

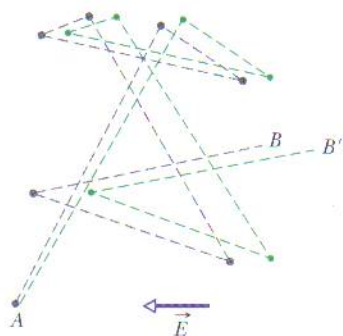



FIG. 26-13 A trajetória A-B mostra um possível caminho aleatório para um elétron na ausência de um campo elétrico aplicado, sofrendo seis colisões no percurso; a trajetória A-B' mostra qual seria o mesmo caminho na presença de um campo elétrico $\vec{E}$. Observe o deslocamento para a direita do ponto final da trajetória, no sentido contrário ao do campo elétrico $\vec{E}$. (Na verdade, as linhas da trajetória A'-B' deveriam ser ligeiramente curvas, para representar as trajetórias parabólicas do elétron entre colisões, sob a influência do campo elétrico.)

26-6 | Uma Visão Microscópica da Lei de Ohm

Para verificar *por que* alguns materiais obedecem à lei de Ohm precisamos examinar os detalhes do processo de condução de eletricidade no nível atômico. No momento vamos considerar apenas a condução em materiais metálicos, como o cobre, por exemplo. Nossa análise será baseada no *modelo de elétrons livres*, no qual supomos que os elétrons de condução de um metal estão livres para vagar por toda a amostra, como as moléculas de gás no interior de um recipiente fechado. Vamos supor também que os elétrons não colidem uns com os outros, mas apenas com os átomos do metal.

De acordo com a física clássica, os elétrons possuem uma distribuição maxwelliana de velocidades como a das moléculas de um gás (Seção 19-7) e, portanto, a velocidade média dos elétrons depende da temperatura. Os movimentos dos elétrons, porém, não são governados pelas leis da física clássica, e sim pelas leis da física quântica. Na verdade, uma hipótese que está muito mais próxima da realidade é a de que os elétrons de condução em um metal se movem com uma única velocidade efetiva v_{ef}, e que essa velocidade não depende da temperatura. No caso do cobre, $v_{ef} \approx 1,6 \times 10^6$ m/s.

Quando aplicamos um campo elétrico a uma amostra metálica os elétrons modificam ligeiramente seus movimentos aleatórios e passam a derivar lentamente, no sentido oposto ao do campo, com uma velocidade de deriva v_d. Como vimos no Exemplo 26-3, a velocidade de deriva em um condutor metálico típico é da ordem de 5×10^{-7} m/s, muito menor, portanto, que a velocidade efetiva ($1,6 \times 10^6$ m/s). A Fig. 26-13 ilustra a relação entre as duas velocidades. A trajetória A-B mostra um possível caminho aleatório para um elétron na ausência de um campo elétrico apli-

cado; o elétron se move de A para B, sofrendo seis colisões no percurso. A trajetória A-B' mostra qual seria o mesmo caminho na presença de um campo elétrico $\vec{E}$. Vemos que o elétron deriva para a direita e vai terminar no ponto B', em vez de B. A Fig. 26-13 foi desenhada para $v_d \approx 0{,}02v_{ef}$. Como na verdade a relação é $v_d \approx (10^{-13})v_{ef}$, a deriva mostrada na figura está grandemente exagerada.

O movimento dos elétrons de condução na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ é, portanto, uma combinação do movimento devido a colisões aleatórias com o movimento devido ao campo elétrico. Quando consideramos todos os elétrons livres, a média dos movimentos aleatórios é zero e não contribui para a velocidade de deriva. Assim, a velocidade de deriva se deve apenas ao efeito do campo elétrico sobre os elétrons.

Se um elétron de massa m é submetido a um campo elétrico de módulo E, o elétron sofre uma aceleração dada pela segunda lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \tag{26-23}$$

A natureza das colisões experimentadas pelos elétrons de condução é tal que depois de uma colisão típica o elétron perde, por assim dizer, a memória da velocidade de deriva que possuía antes da colisão. Assim, os elétrons adquirem um movimento aleatório após cada colisão. No intervalo de tempo médio τ entre colisões um elétron adquire uma velocidade de deriva $v_d = a\tau$. Além disso, quando medimos as velocidades de deriva de todos os elétrons em um dado instante descobrimos que a velocidade média de deriva também é $a\tau$. Assim, em qualquer instante os elétrons possuem, em média, uma velocidade de deriva $v_d = a\tau$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 26-23,

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \tag{26-24}$$

Combinando este resultado com o módulo da Eq. 26-7 ($\vec{J} = ne\vec{v}_d$), obtemos:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m},$$

que pode ser escrita na forma

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n\tau}\right) J.$$

Comparando esta equação com o módulo da Eq. 26-11 ($\vec{E} = \rho\vec{J}$), temos:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau}. \tag{26-25}$$

A Eq. 26-25 pode ser considerada uma demonstração de que os metais obedecem à lei de Ohm se for possível provar que, no caso dos metais, a resistividade ρ não depende da intensidade do campo elétrico aplicado $\vec{E}$. Como n, m e e são constantes, isso se reduz a mostrar que τ, o tempo médio entre colisões, não depende da intensidade do campo aplicado. Acontece que τ pode ser considerado constante porque a velocidade de deriva v_d causada pelo campo é tão menor que a velocidade efetiva v_{ef} que a velocidade dos elétrons e, portanto, τ, praticamente não depende do valor do campo aplicado.

Exemplo 26-6

(a) Qual é o tempo médio entre colisões τ para os elétrons de condução do cobre?

IDÉIAS-CHAVE O tempo médio entre colisões τ no cobre é aproximadamente constante e, em particular, não depende do valor do campo elétrico aplicado a uma amostra de cobre. Assim, não precisamos considerar nenhum valor em particular do campo elétrico aplicado. Por outro lado, como a resistividade ρ do cobre depende de τ podemos determinar o tempo médio entre colisões a partir da Eq. 26-25 ($\rho = m/e^2n\tau$).

Cálculos: De acordo com a Eq. 26-25,

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}.$$

O valor de n, o número de elétrons de condução do cobre por unidade de volume, foi calculado no Exemplo 26-3. O valor de ρ aparece na Tabela 26-1. O denominador é, portanto,

$$(8{,}49 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2(1{,}69 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m})$$
$$= 3{,}67 \times 10^{-17}\ \mathrm{C^2\cdot\Omega/m^2} = 3{,}67 \times 10^{-17}\ \mathrm{kg/s},$$

onde as unidades foram convertidas da seguinte forma:

$$\frac{\mathrm{C^2\cdot\Omega}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{C^2\cdot V}}{\mathrm{m^2\cdot A}} = \frac{\mathrm{C^2\cdot J/C}}{\mathrm{m^2\cdot C/s}} = \frac{\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}}{\mathrm{m^2/s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Usando esses resultados e substituindo a massa m do elétron por seu valor, obtemos:

$$\tau = \frac{9{,}1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{3{,}67 \times 10^{-17}\ \mathrm{kg/s}} = 2{,}5 \times 10^{-14}\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) O livre caminho médio λ dos elétrons de condução em um condutor é definido como a distância média percorrida por um elétron entre duas colisões sucessivas. (Esta definição é semelhante à apresentada na Seção 19-6 para o livre caminho médio das moléculas em um gás.) Qual é o valor de λ para os elétrons de condução do cobre, supondo que a velocidade efetiva dos elétrons é $v_{ef} = 1{,}6 \times 10^6$ m/s?

IDÉIA-CHAVE A distância d percorrida por uma partícula que se move com velocidade constante v durante um intervalo de tempo t é $d = vt$.

Cálculo: No caso dos elétrons no cobre, temos

$$\lambda = v_{ef}\,\tau = (1{,}6 \times 10^6\ \mathrm{m/s})(2{,}5 \times 10^{-14}\ \mathrm{s})$$
$$= 4{,}0 \times 10^{-8}\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{nm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta distância é aproximadamente 150 vezes maior que a distância entre átomos vizinhos na rede cristalina do cobre. Assim, em média um elétron de condução passa por muitos átomos de cobre antes de se chocar com um deles.

26-7 | Potência em Circuitos Elétricos

A Fig. 26-14 mostra um circuito formado por uma bateria B ligada por fios de resistência desprezível a um componente não-especificado que pode ser um resistor, uma bateria recarregável, um motor ou qualquer outro dispositivo elétrico. A bateria mantém uma diferença de potencial de valor absoluto V entre os seus terminais e, portanto (graças aos fios de ligação), entre os terminais do componente, com um potencial mais elevado no terminal a do componente que no terminal b.

Como existe um circuito fechado ligando os dois terminais da bateria e como a diferença de potencial produzida pela bateria é constante, uma corrente constante i atravessa o circuito no sentido do terminal a para o terminal b. A quantidade de carga dq que atravessa o circuito em um intervalo de tempo dt é igual a $i\,dt$. Ao completar o circuito a carga dq tem seu potencial reduzido de V e, portanto, sua energia potencial é reduzida de um valor dado por

$$dU = dq\,V = i\,dt\,V.$$

De acordo com a lei de conservação da energia, a redução da energia potencial elétrica no percurso de a a b deve ser acompanhada por uma conversão da energia para outra forma qualquer. A potência P associada a essa conversão é a taxa de transferência de energia dU/dt, que, de acordo com a última equação, pode ser expressa na forma

$$P = iV \qquad \text{(taxa de transferência de energia elétrica).} \qquad (26\text{-}26)$$

FIG. 26-14 Uma bateria B estabelece uma corrente i em um circuito que contém um componente não-especificado.

Além disso, P é a taxa com a qual a energia é transferida da bateria para o componente. Se o componente é um motor acoplado a uma carga mecânica a energia se transforma no trabalho realizado pelo motor sobre a carga. Se o componente é uma bateria recarregável a energia se transforma na energia química armazenada na bateria. Se o componente é um resistor a energia se transforma em energia térmica e tende a provocar um aumento da temperatura do resistor.

De acordo com a Eq. 26-26, a unidade de potência elétrica é o volt-ampère (V · A), mas a potência elétrica também pode ser escrita na forma

$$1\ \mathrm{V\cdot A} = \left(1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right)\left(1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\right) = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}.$$

O movimento de um elétron ao atravessar um resistor com velocidade de deriva constante é semelhante ao de uma pedra caindo na água com velocidade terminal. A energia cinética média do elétron permanece constante e a energia potencial elétrica perdida é convertida em energia térmica do resistor. Em escala microscópica essa conversão de energia ocorre através de colisões entre os elétrons e as moléculas do resistor, o que leva a um aumento de temperatura do resistor. A energia mecânica assim convertida em energia térmica é *dissipada* (perdida), já que o processo não pode ser revertido.

No caso de um resistor ou outro dispositivo de resistência R, podemos combinar as Eqs. 26-8 ($R = V/i$) e 26-26 para obter, para a taxa de dissipação de energia elétrica devida à resistência, as seguintes expressões:

$$P = i^2R \quad \text{(dissipação resistiva)} \qquad (26\text{-}27)$$

ou

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \text{(dissipação resistiva).} \qquad (26\text{-}28)$$

Atenção: É preciso ter em mente que as Eqs. (26-27) e (26-28) são menos gerais que a Eq. 26-26. $P = iV$ se aplica a qualquer tipo de transferência de energia elétrica; $P = i^2R$ e $P = V^2/R$ se aplicam apenas à transferência de energia elétrica para energia térmica em um dispositivo com resistência.

TESTE 5 Uma bateria de diferença de potencial V é ligada a um dispositivo de resistência R, fazendo com que uma corrente i atravesse o dispositivo. Coloque as seguintes variações na ordem da variação da taxa com a qual a energia elétrica é convertida em energia térmica, começando pela maior: (a) V é multiplicada por dois e R permanece a mesma; (b) i é multiplicada por dois e R permanece a mesma; (c) R é multiplicada por dois e V permanece a mesma; (d) R é multiplicada por dois e i permanece a mesma.

Exemplo 26-7

Um pedaço de fio resistivo, feito de uma liga de níquel, cromo e ferro chamada Nichrome, tem uma resistência de 72 Ω. Determine a taxa com a qual a energia é dissipada nas seguintes situações: (1) uma diferença de potencial de 120 V é aplicada às extremidades do fio; (2) o fio é cortado pela metade e diferenças de potencial de 120 V são aplicadas às extremidades dos dois pedaços resultantes.

IDÉIA-CHAVE Uma corrente em um material resistivo produz uma conversão de energia mecânica em energia térmica; a taxa de conversão (dissipação) é dada pelas Eqs. 26-26 a 26-28.

Cálculos: Como conhecemos o potencial V e a resistência R usamos a Eq. 26-28, que nos dá, para a situação (1),

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120\ \text{V})^2}{72\ \Omega} = 200\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Na situação (2), a resistência de cada metade do fio é $72/2 = 36\ \Omega$. Assim, a dissipação para cada metade é

$$P' = \frac{(120\ \text{V})^2}{36\ \Omega} = 400\ \text{W},$$

e para as duas metades é

$$P = 2P' = 800\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor é quatro vezes maior que a dissipação do fio inteiro. À primeira vista pode parecer que, se você comprar uma resistência de aquecimento, cortá-la ao meio e tornar a ligá-la aos mesmos terminais terá quatro vezes mais calor. Por que não é aconselhável fazer isso? (O que acontece com a corrente que atravessa a resistência?)

26-8 | Semicondutores

Os semicondutores constituem a base da revolução da microeletrônica, responsável pela era da informação. Na Tabela 26-2 as propriedades do silício, um semicondutor típico, são comparadas com as do cobre, um condutor metálico típico. Vemos

TABELA 26-2

Algumas Propriedades Elétricas do Cobre e do Silício

Propriedade	Cobre	Silício
Tipo de material	Metal	Semicondutor
Densidade de portadores de carga, m^{-3}	$8{,}49 \times 10^{28}$	1×10^{16}
Resistividade, $\Omega \cdot m$	$1{,}69 \times 10^{-8}$	$2{,}5 \times 10^{3}$
Coeficiente de temperatura da resistividade, K^{-1}	$+4{,}3 \times 10^{-3}$	-70×10^{-3}

que o silício possui um número muito menor de portadores de carga, uma resistividade muito maior e um coeficiente de temperatura da resistividade que é ao mesmo tempo elevado e negativo. Assim, enquanto a resistividade do cobre aumenta quando a temperatura aumenta, a resistividade do silício diminui.

O silício puro possui uma resistividade tão alta que se comporta como um isolante e, portanto, não tem muita utilidade em circuitos eletrônicos. Entretanto, a resistividade do silício pode ser reduzida de forma controlada pela adição de pequenas quantidades de átomos de "impurezas", um processo conhecido como *dopagem*. A Tabela 26-1 mostra valores típicos da resistividade do silício puro e dopado com duas impurezas diferentes.

Podemos explicar as diferenças de resistividade (e, portanto, de condutividade) entre semicondutores, isolantes e condutores metálicos em termos da energia dos elétrons. (Para uma análise quantitativa da situação é preciso usar as equações da física quântica.) Em um condutor metálico como um fio de cobre quase todos os elétrons estão firmemente presos aos átomos da rede cristalina; seria necessária uma energia muito grande para que esses elétrons se libertassem dos átomos e pudessem participar da corrente elétrica. Entretanto, existem também alguns elétrons que estão fracamente presos aos átomos e precisam de muito pouca energia para se libertar. Essa energia pode ser a energia térmica ou a energia fornecida por um campo elétrico aplicado ao condutor. O campo elétrico não só libera esses elétrons, mas também faz com que se movam ao longo do fio; em outras palavras, um campo elétrico produz uma corrente nos materiais condutores.

Nos isolantes a energia necessária para liberar elétrons dos átomos da rede cristalina é muito grande. A energia térmica não é suficiente para que isso ocorra; um campo elétrico de valor razoável também não é suficiente. Assim, não existem elétrons disponíveis e o material não conduz corrente elétrica, mesmo na presença de um campo elétrico.

Um semicondutor tem as mesmas propriedades de um isolante, *exceto* pelo fato de que a energia necessária para liberar alguns elétrons é um pouco menor. O mais importante, porém, é que a dopagem pode fornecer elétrons ou portadores de carga positivos que estão fracamente presos aos átomos e, por isso, conduzem corrente com facilidade. Através da dopagem de um semicondutor, podemos controlar a concentração de portadores de carga e assim modificar as propriedades elétricas do material. Quase todos os dispositivos semicondutores, como transistores e diodos, são produzidos a partir da dopagem seletiva de diferentes regiões de um substrato de silício com diferentes tipos de impurezas.

Considere novamente a Eq. 26-25, usada para calcular a resistividade de um condutor:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}, \tag{26-29}$$

onde n é o número de portadores de carga por unidade de volume e τ é o tempo médio entre colisões dos portadores de carga. (Esta equação foi deduzida para o caso dos condutores, mas também se aplica aos semicondutores.) Vejamos como as variáveis n e τ se comportam quando a temperatura aumenta.

Nos condutores n tem um valor elevado, que varia muito pouco com a temperatura. O aumento da resistividade com o aumento da temperatura nos metais

(Fig. 26-10) se deve ao aumento das colisões dos portadores de carga com os átomos da rede cristalina, que se manifesta na Eq. 26-29 como uma redução de τ, o tempo médio entre colisões.

Nos semicondutores n é pequeno, mas aumenta rapidamente com a temperatura, já que a agitação térmica faz com que haja um maior número de portadores disponíveis. Isso resulta em uma redução da resistividade com o aumento da temperatura, como indica o valor negativo do coeficiente de temperatura da resistividade para o silício na Tabela 26-2. O mesmo aumento do número de colisões que é observado no caso dos metais também acontece nos semicondutores, mas é mais do que compensado pelo rápido aumento do número de portadores de carga.

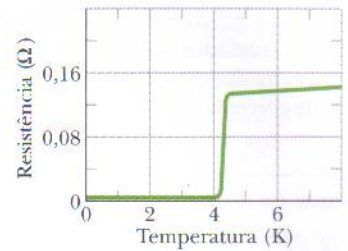
FIG. 26-15 A resistência do mercúrio desaparece totalmente quando o metal é resfriado abaixo de 4 K.

26-9 | Supercondutores

Em 1911 o físico holandês Kamerlingh Onnes descobriu que a resistividade do mercúrio desaparece totalmente quando o metal é resfriado abaixo de 4 K (Fig. 26-15). Esse fenômeno, conhecido como **supercondutividade**, é de grande interesse tecnológico porque significa que as cargas podem circular em um supercondutor sem perder energia na forma de calor. Correntes criadas em anéis supercondutores, por exemplo, persistiram durante vários anos sem perdas; é preciso uma fonte de energia para produzir a corrente inicial, mas depois disso, mesmo que a fonte seja removida, a corrente continua a circular indefinidamente.

Antes de 1986 as aplicações tecnológicas da supercondutividade eram limitadas pelo custo de produzir as temperaturas extremamente baixas necessárias para que o efeito se manifestasse. Em 1986, porém, foram descobertos materiais cerâmicos que se tornam supercondutores em temperaturas bem mais altas (e, portanto, mais fáceis e baratos de obter), embora ainda menores que a temperatura ambiente. No futuro talvez seja possível operar dispositivos supercondutores à temperatura ambiente.

A supercondutividade é um fenômeno muito diferente da condutividade. Na verdade os melhores condutores normais, como a prata e o cobre, não se tornam supercondutores nem em temperaturas muito baixas, enquanto os novos supercondutores cerâmicos são isolantes à temperatura ambiente.

Uma explicação para a supercondutividade é o fato de que os elétrons responsáveis pela corrente se movem em pares. Um dos elétrons do par distorce a estrutura cristalina do material supercondutor, criando nas proximidades uma concentração temporária de cargas positivas. O outro elétron do par é atraído por essas cargas positivas. Segundo a teoria, essa coordenação dos movimentos dos elétrons impede que colidam com os átomos da rede cristalina, eliminando assim a resistência elétrica. A teoria explicou com sucesso o comportamento dos supercondutores de baixa temperatura, descobertos antes de 1986, mas parece que será necessária uma nova teoria para os novos supercondutores cerâmicos.

Um ímã em forma de disco é levitado por um material supercondutor resfriado com nitrogênio líquido. O aquário com o peixinho é parte da demonstração. *(Cortesia de Shoji Tonaka/International Superconductivity Technology Center, Tóquio, Japão)*

REVISÃO E RESUMO

Corrente A **corrente elétrica** i em um condutor é definida através da equação

$$i = \frac{dq}{dt}, \qquad (26\text{-}1)$$

onde dq é a carga (positiva) que passa durante um intervalo de tempo dt por um plano hipotético que corta o condutor. Por convenção, o sentido da corrente elétrica é tomado como o sentido no qual cargas positivas se moveriam. A unidade de corrente no SI é o **ampère** (A): 1 A = 1 C/s.

Densidade de Corrente A corrente (uma grandeza escalar) está relacionada à **densidade de corrente** $\vec{J}$ (uma grandeza vetorial) através da equação

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \qquad (26\text{-}4)$$

onde $d\vec{A}$ é um vetor perpendicular a um elemento de superfície de área dA e a integral é calculada ao longo de uma superfície que intercepta todo o condutor. $\vec{J}$ tem o mesmo sentido que a velocidade dos portadores de carga, se estes são positivos, e o sentido oposto se são negativos.

Velocidade de Deriva dos Portadores de Carga Quando

um campo elétrico $\vec{E}$ é estabelecido em um condutor os portadores de carga (tomados como positivos) adquirem uma **velocidade de deriva** v_d na direção de $\vec{E}$; a velocidade $\vec{v}_d$ está relacionada à densidade de corrente $\vec{J}$ através da equação

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d, \quad (26\text{-}7)$$

onde ne é a *densidade de carga dos portadores*.

Resistência de um Condutor A **resistência** R de um condutor é definida através da equação

$$R = \frac{V}{i} \quad \text{(definição de } R\text{)}, \quad (26\text{-}8)$$

onde V é a diferença de potencial entre as extremidades do condutor e i é a corrente. A unidade de resistência no SI é o **ohm** (V): 1 Ω = 1 V/A. Equações semelhantes definem a **resistividade** ρ e a **condutividade** σ de um material:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad \text{(definição de } \rho \text{ e } \sigma\text{)}, \quad (26\text{-}12, 26\text{-}10)$$

onde E é o módulo do campo elétrico aplicado. A unidade de resistividade no SI é o ohm-metro (Ω · m). A Eq. 26-10 corresponde à equação vetorial

$$\vec{E} = \rho\vec{J}. \quad (26\text{-}11)$$

A resistência R de um fio condutor de comprimento L e seção reta uniforme é dada por

$$R = \rho\frac{L}{A}, \quad (26\text{-}16)$$

onde A é a área da seção reta.

Variação de ρ com a Temperatura A resistividade ρ da maioria dos materiais varia com a temperatura. Em muitos materiais, incluindo os metais, a relação entre ρ e a temperatura T é dada aproximadamente pela equação

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0), \quad (26\text{-}17)$$

onde T_0 é uma temperatura de referência, ρ_0 é a resistividade na temperatura T_0 e α é o coeficiente de temperatura da resistividade do material.

Lei de Ohm Dizemos que um dispositivo (condutor, resistor ou qualquer outro dispositivo elétrico) obedece à *lei de Ohm* se sua resistência R, definida pela Eq. 26-8 como V/i, é independente da diferença de potencial aplicada V. Um *material* obedece à lei de Ohm se sua resistividade, definida pela Eq. 26-10, é independente do módulo e da direção do campo aplicado $\vec{E}$.

Resistividade de um Metal Supondo que os elétrons de condução de um metal estejam livres para se mover como as moléculas de um gás, é possível escrever uma expressão para a resistividade de um metal:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau}, \quad (26\text{-}25)$$

onde n é o número de elétrons livres por unidade de volume e τ é o tempo médio entre colisões dos elétrons de condução com os átomos do metal. Podemos entender por que os metais obedecem à lei de Ohm observando que τ praticamente não depende da intensidade do campo elétrico aplicado ao metal.

Potência A potência P, ou taxa de transferência de energia, em um dispositivo elétrico submetido a uma diferença de potencial V é dada por

$$P = iV \quad \text{(taxa de transferência de energia elétrica)}. \quad (26\text{-}26)$$

Dissipação Resistiva No caso de um resistor, a Eq. 26-26 pode ser escrita na forma

$$P = i^2R = \frac{V^2}{R} \quad \text{(dissipação resistiva)}. \quad (26\text{-}27, 26\text{-}28)$$

Nos resistores, a energia potencial elétrica é convertida em energia térmica através de colisões entre os portadores de carga e os átomos da rede cristalina.

Semicondutores Os *semicondutores* são materiais que possuem um número relativamente pequeno de elétrons de condução, mas se tornam bons condutores quando são *dopados* com outros átomos que fornecem elétrons livres.

Supercondutores Os *supercondutores* são materiais que perdem totalmente a resistência elétrica em baixas temperaturas. Recentemente foram descobertos materiais que se tornam supercondutores em temperaturas relativamente elevadas.

PERGUNTAS

1 A Fig. 26-16 mostra quatro situações nas quais cargas positivas e negativas se movem horizontalmente e a taxa com a qual as cargas se movem. Coloque as situações na ordem da corrente efetiva, começando pela maior.

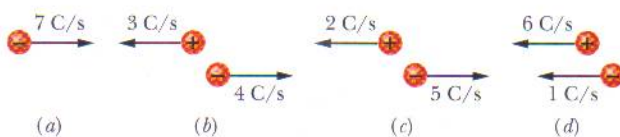



FIG. 26-16 Pergunta 1.

2 A Fig. 26-17 mostra os gráficos da corrente i em uma certa seção reta de um fio em quatro diferentes períodos de tempo. Coloque os períodos na ordem da corrente total que passa pela seção reta durante o período, começando pela maior.

FIG. 26-17 Pergunta 2.

3 A Fig. 26-18 mostra as seções retas de três condutores longos de mesmo comprimento, feitos do mesmo material. As dimensões

das seções retas estão indicadas. O condutor B se encaixa perfeitamente no condutor A e o condutor C se encaixa perfeitamente no condutor B. Coloque na ordem da resistência entre as extremidades, começando pela maior: os três condutores; a combinação $A + B$ (B no interior de A); $B + C$ (C no interior de B); $A + B + C$ (C no interior de B e B no interior de A).

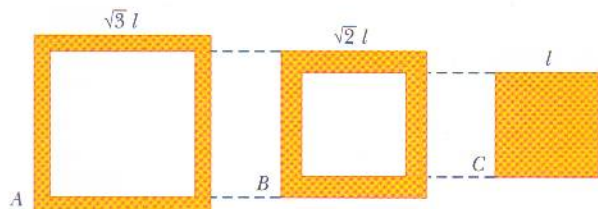



FIG. 26-18 Pergunta 3.

4 A Fig. 26-19 mostra as seções retas de três fios de mesmo comprimento, feitos do mesmo material. A figura também mostra as dimensões das seções retas em milímetros. Coloque os fios na ordem da resistência (medida entre as extremidades do fio), começando pela maior.

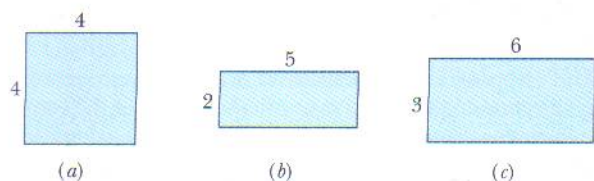



FIG. 26-19 Pergunta 4.

5 A Fig. 26-20 mostra um condutor em forma de paralelepípedo de dimensões L, $2L$ e $3L$. Uma diferença de potencial V é aplicada uniformemente entre pares de faces opostas do condutor, como na Fig. 26-8b. A diferença de potencial é aplicada primeiro entre as faces esquerda e direita, depois entre as faces superior e inferior e, finalmente, entre as faces dianteira e traseira. Coloque essses pares em ordem de acordo com os valores das seguintes grandezas (no interior do condutor), começando pelo maior: (a) módulo do campo elétrico; (b) densidade de corrente; (c) corrente; (d) velocidade de deriva dos elétrons.

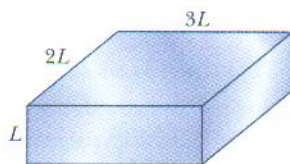



FIG. 26-20 Pergunta 5.

6 A tabela a seguir mostra o comprimento, o diâmetro e a diferença de potencial entre as extremidades de três barras de cobre. Coloque as barras na ordem (a) do módulo do campo elétrico no interior da barra; (b) da densidade de corrente no interior da barra; (c) da velocidade de deriva dos elétrons, começando pelo maior valor.

Barra	Comprimento	Diâmetro	Diferença de Potencial
1	L	$3d$	V
2	$2L$	d	$2V$
3	$3L$	$2d$	$2V$

7 A Fig. 26-21 mostra a velocidade de deriva v_d dos elétrons de condução em um fio de cobre em função da posição x ao longo do fio. O fio possui três trechos com raios diferentes. Coloque os trechos em ordem de acordo com os valores das seguintes grandezas, começando pelo maior: (a) raio; (b) número de elétrons de condução por metro cúbico; (c) módulo do campo elétrico; (d) condutividade.

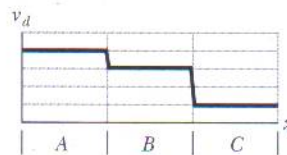



FIG. 26-21 Pergunta 7.

8 Três fios de mesmo diâmetro são ligados sucessivamente entre dois pontos mantidos a uma certa diferença de potencial. As resistividades e os comprimentos dos fios são ρ e L (fio A), $1{,}2\rho$ e $1{,}2L$ (fio B) e $0{,}9\rho$ e L (fio C). Coloque os fios na ordem da taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica, começando pela maior.

9 A Fig. 26-22 mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x ao longo de um fio de cobre percorrido por uma corrente. O fio possui três trechos de raios diferentes. Coloque os trechos em ordem de acordo com os valores das seguintes grandezas, começando pelo maior: (a) campo elétrico; (b) densidade de corrente.

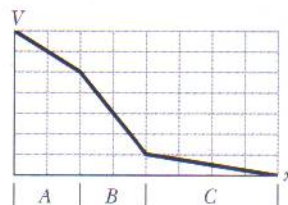



FIG. 26-22 Pergunta 9.

10 Na Fig. 26-23 um fio percorrido por uma corrente possui três trechos de raios diferentes. Coloque os trechos em ordem de acordo com os valores das seguintes grandezas, começando pelo maior: (a) corrente; (b) módulo da densidade de corrente; (c) módulo do campo elétrico.

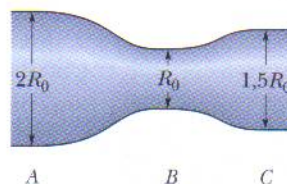



FIG. 26-23 Pergunta 10.

PROBLEMAS

 • – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 26-2 Corrente Elétrica

•1 Durante os 4,0 min em que uma corrente de 5,0 A atravessa um fio, (a) quantos coulombs e (b) quantos elétrons passam por uma seção reta do fio?

••2 Uma esfera condutora isolada tem 10 cm de raio. Um fio leva até ela uma corrente de 1,000 002 0 A. Outro fio retira dela uma corrente de 1,000 000 0 A. Quanto tempo é necessário para que o potencial da esfera aumente de 1000 V?

••3 Uma correia de 50 cm de largura está se movendo a 30 m/s entre uma fonte de cargas e uma esfera. A correia transporta as cargas para a esfera a uma taxa que corresponde a 100 μA. Determine a densidade superficial de cargas da correia.

seção 26-3 Densidade de Corrente

•4 Uma corrente pequena, porém mensurável, de $1,2 \times 10^{-10}$ A atravessa um fio de cobre de 2,5 mm de diâmetro. O número de portadores de carga por unidade de volume é $8,49 \times 10^{28}$ m^{-3}. Supondo que a corrente é uniforme, calcule (a) a densidade de corrente e (b) a velocidade de deriva dos elétrons.

•5 O fusível de um circuito elétrico é um fio projetado para fundir, abrindo o circuito, se a corrente ultrapassar um certo valor. Suponha que o material a ser usado em um fusível funde quando a densidade de corrente ultrapassa 440 A/cm^2. Que diâmetro de fio cilíndrico deve ser usado para fazer um fusível que limite a corrente a 0,50 A?

•6 A tabela a seguir foi extraída do National Electric Code, que estabelece a corrente máxima considerada segura nos Estados Unidos para fios de cobre isolados de vários diâmetros. Plote a densidade de corrente segura mostrada na tabela em função do diâmetro. Para que calibre de fio a densidade de corrente segura é máxima? ("Calibre" é uma forma de indicar o diâmetro dos fios e 1 mil = 1 milésimo de polegada.)

Calibre	4	6	8	10	12	14	16	18
Diâmetro, mils	204	162	129	102	81	64	51	40
Corrente segura, A	70	50	35	25	20	15	6	3

•7 Um feixe de partículas contém $2,0 \times 10^8$ íons positivos duplamente carregados por centímetro cúbico, todos se movendo para o norte com uma velocidade de $1,0 \times 10^5$ m/s. Determine (a) o módulo e (b) a direção da densidade de corrente $\vec{J}$. (c) Que grandeza adicional é necessária para determinar a corrente total i associada a esse feixe de íons?

•8 Um certo fio cilíndrico está conduzindo uma corrente. Desenhamos uma circunferência de raio r e centro no eixo do fio (Fig. 26-24*a*) e determinamos a corrente i no interior da circunferência. A Fig. 26-24*b* mostra a corrente i em função de r^2. A escala vertical é definida por i_s = 4,0 mA, e a escala horizontal é definida por r_s^2 = 4,00 mm^2. (a) A densidade de corrente é uniforme? (b) Caso a resposta do item (a) seja afirmativa, determine o valor da densidade de corrente.

(*a*)

(*b*)

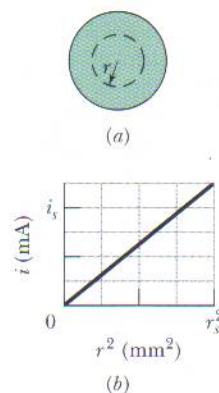



FIG. 26-24 Problema 8.

••9 Quanto tempo os elétrons levam para ir da bateria de um carro até o motor de arranque? Suponha que a corrente é de 300 A e que o fio de cobre que liga a bateria ao motor de arranque tem 0,85 m de comprimento e uma seção reta de 0,21 cm^2. O número de portadores de carga por unidade de volume é $8,49 \times 10^{28}$ m^{-3}.

••10 Perto da Terra, a densidade de prótons no vento solar (uma corrente de partículas proveniente do Sol) é 8,70 cm^{-3} e a velocidade dos prótons é 470 km/s. (a) Determine a densidade de corrente dos prótons do vento solar. (b) Se o campo magnético da Terra não desviasse os prótons, qual seria a corrente recebida pela Terra devido aos prótons do vento solar?

••11 O módulo $J(r)$ da densidade de corrente em um certo fio cilíndrico é dado por $J(r) = Br$, onde r é a distância radial a partir do centro do fio em metros e $B = 2,00 \times 10^5$ A/m^3. Qual é a corrente que passa em um anel concêntrico com o fio, com 10,0 μm de largura, situado a uma distância radial de 1,20 mm do centro do fio?

••12 O módulo J da densidade de corrente em um certo fio cilíndrico de raio R = 2,00 mm é dado por $J = (3,00 \times 10^8)r^2$, com J em ampères por metro quadrado e a distância radial r em metros. Qual é a corrente que passa em um anel concêntrico com o fio de raio interno 0,900R e raio externo R?

••13 Determine a corrente em um fio de raio R = 3,40 mm se o módulo da densidade de corrente é dado por (a) $J_a = J_0 r/R$ e (b) $J_b = J_0(1 - r/R)$, onde r é a distância radial e $J_0 = 5,50 \times 10^4$ A/m^2. (c) Para qual das duas funções a densidade de corrente perto da superfície do fio é maior?

seção 26-4 Resistência e Resistividade

•14 Existe a possibilidade de usar cobre ou alumínio em uma linha de transmissão de alta tensão para transportar uma corrente de até 60,0 A. A resistência por unidade de comprimento deve ser 0,150 Ω/km. As massas específicas do cobre e do alumínio são 8960 e 2600 kg/m^2, respectivamente. Determine (a) o módulo J da densidade de corrente e (b) a massa por unidade de comprimento λ no caso de um cabo de cobre e (c) J e (d) λ no caso de um cabo de alumínio.

•15 Um fio de Nichrome (uma liga de níquel, cromo e ferro muito usada em elementos de aquecimento) tem 1,0 m de comprimento e 1,0 mm^2 de seção reta e conduz uma corrente de 4,0 A

quando uma diferença de potencial de 2,0 V é aplicada a suas extremidades. Calcule a condutividade σ do Nichrome.

•16 Um fio de 4,00 m de comprimento e 6,00 mm de diâmetro tem uma resistência de 15,0 mΩ. Uma diferença de potencial de 23,0 V é aplicada às extremidades do fio. (a) Qual é a corrente no fio? (b) Qual é o módulo da densidade de corrente? (c) Calcule a resistividade do material do fio. (d) Identifique o material com o auxílio da Tabela 26-1.

•17 Um fio elétrico tem 1,0 mm de diâmetro, 2,0 m de comprimento e uma resistência de 50 mΩ. Qual é a resistividade do material?

•18 Um certo fio tem uma resistência R. Qual é a resistência de um segundo fio, feito do mesmo material, com metade do comprimento e metade do diâmetro?

•19 Uma bobina é formada por 250 espiras de fio isolado de cobre calibre 16 (diâmetro: 1,3 mm) enroladas em uma única camada em uma forma cilíndrica de 12 cm de raio. Qual é a resistência da bobina? Despreze a espessura do isolamento. (Use a Tabela 26-1.)

•20 Um ser humano pode morrer se uma corrente elétrica da ordem de 50 mA passar perto do coração. Um eletricista trabalhando com as mãos suadas, o que reduz consideravelmente a resistência da pele, segura dois fios desencapados, um em cada mão. Se a resistência do corpo do eletricista é 2000 Ω, qual é a menor diferença de potencial entre os fios capaz de produzir um choque mortal?

••21 Um fio com uma resistência de 6,0 Ω é esticado de tal forma que seu comprimento se torna três vezes maior que o original. Determine a resistência do fio após a operação, supondo que a resistividade e a densidade do material permaneçam as mesmas.

••22 A Fig. 26-25*a* mostra o módulo $E(x)$ do campo elétrico criado por uma bateria ao longo de uma barra resistiva de 9,00 mm de comprimento (Fig. 26-25*b*). A escala vertical é definida por $E_s = 4{,}00 \times 10^3$ V/m. A barra é formada por três trechos feitos do mesmo material, mas com raios diferentes. (O diagrama esquemático da Fig. 26-25*b* não mostra os raios diferentes.) O raio da seção 3 é de 2,00 mm. Determine o raio (a) da seção 1; (b) da seção 2.

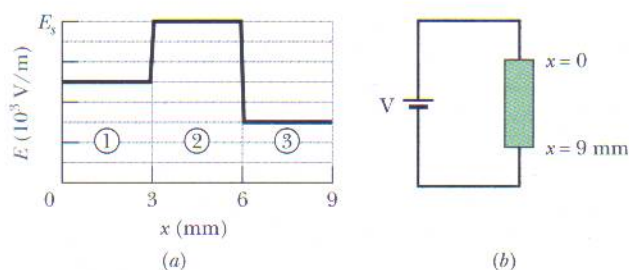



FIG. 26-25 Problema 22.

••23 Dois condutores são feitos do mesmo material e têm o mesmo comprimento. O condutor A é um fio maciço de 1,0 mm de diâmetro; o condutor B é um tubo oco com um diâmetro externo de 2,0 mm e um diâmetro interno de 1,0 mm. Qual é a razão entre as resistências dos dois fios, R_A/R_B? As resistências são medidas entre as extremidades dos fios.

••24 A Fig. 26-26 mostra o potencial elétrico $V(x)$ ao longo de um fio de cobre percorrido por uma corrente uniforme, de um ponto de potencial mais alto, $V_s = 12{,}0\ \mu$V em $x = 0$, até um ponto de potencial de potencial nulo em $x_s = 3{,}00$ m. O fio tem um raio de 2,00 mm. Qual é a corrente no fio?

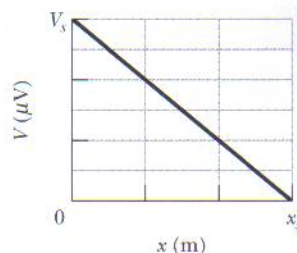



FIG. 26-26 Problema 24.

••25 As especificações de uma lâmpada de lanterna são 0,30 A e 2,9 V (os valores da corrente e tensão de trabalho, respectivamente). Se a resistência do filamento de tungstênio da lâmpada à temperatura ambiente (20°C) é 1,1 Ω, qual é a temperatura do filamento quando a lâmpada está acesa?

••26 *Empinando uma pipa durante uma tempestade.* A história de que Benjamin Franklin empinou uma pipa durante uma tempestade é apenas uma lenda; ele não era tolo nem tinha tendências suicidas. Suponha que a linha de uma pipa tem 2,00 mm de raio, cobre uma distância de 0,800 km na vertical e está coberta por uma camada de água de 0,500 mm de espessura, com uma resistividade de 150 Ω · m. Se a diferença de potencial entre as extremidades da linha é 160 MV, qual é a corrente na camada de água? O perigo não está nessa corrente, mas na possibilidade de que a linha seja atingida por um relâmpago, que pode produzir uma corrente de até 500 000 A (mais do que suficiente para matar uma pessoa).

••27 Uma diferença de potencial de 3,00 nV é estabelecida entre as extremidades de um fio de cobre de 2,00 cm de comprimento com um raio de 2,00 mm. Qual é a carga que passa por uma seção reta do fio em 3,00 ms?

••28 Na Fig. 26-27*a* uma bateria de 9,00 V é ligada a uma placa resistiva formada por três trechos com a mesma seção reta e condutividades diferentes. A Fig. 26-27*b* mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x ao longo da placa. A escala horizontal é definida por $x_s = 8{,}00$ mm. A condutividade do trecho 3 é $3{,}00 \times 10^7\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. (a) Qual é a condutividade do trecho 1? (b) Qual é a condutividade do trecho 2?

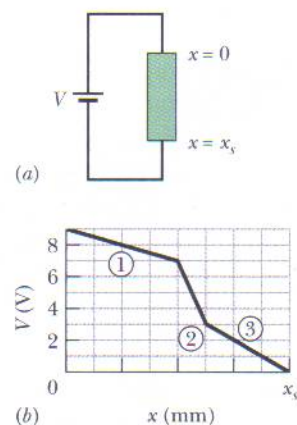



FIG. 26-27 Problema 28.

••29 Quando uma diferença de potencial de 115 V é aplicada às extremidades de um fio de 10 m de comprimento com um raio

de 0,30 mm o módulo da densidade de corrente é $1,4 \times 10^4$ A/m². Determine a resistividade do fio.

••30 A atmosfera inferior da Terra contém íons negativos e positivos que são produzidos por elementos radioativos do solo e por raios cósmicos provenientes do espaço. Em uma certa região a intensidade do campo elétrico atmosférico é 120 V/m e o campo é dirigido verticalmente para baixo. Esse campo faz com que íons com uma unidade de carga positiva, a uma densidade de 620 cm^{-3}, se movam para baixo, enquanto íons com uma unidade de carga negativa, a uma densidade de 550 cm^{-3}, se movam para cima (Fig. 26-28). O valor experimental da condutividade do ar nessa região é $2,70 \times 10^{-14}$ $(\Omega \cdot m)^{-1}$. Determine (a) o módulo da densidade de corrente e (b) a velocidade de deriva dos íons, supondo que é a mesma para íons positivos e negativos.

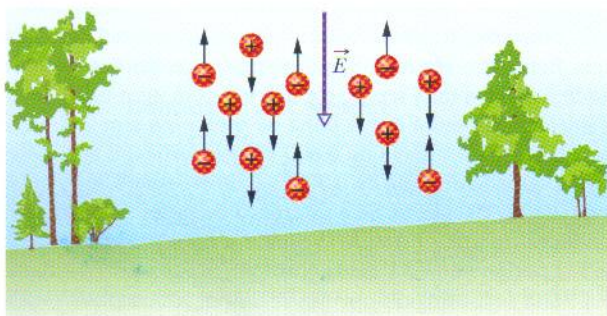



FIG. 26-28 Problema 30.

••31 Um objeto em forma de paralelepípedo tem uma seção reta de 3,50 cm², um comprimento de 15,8 cm e uma resistência de 935 Ω. O material de que é feito o objeto possui $5,33 \times 10^{22}$ elétrons/m³. Uma diferença de potencial de 35,8 V é mantida entre as faces dianteira e traseira. (a) Qual é a corrente que atravessa o objeto? (b) Se a densidade de corrente é uniforme, qual é o valor desta densidade de corrente? (c) Qual é a velocidade de deriva dos elétrons de condução? (d) Qual é o módulo do campo elétrico no interior do objeto?

••32 Se o número que indica o calibre de um fio aumenta de 6, o diâmetro é dividido por 2; se o calibre aumenta de 1, o diâmetro é dividido por $2^{1/6}$ (veja a tabela do Problema 6). Com base nessas informações e no fato de que 1000 pés de fio de cobre calibre 10 têm uma resistência de aproximadamente 1,00 Ω, estime a resistência de 25 pés de fio de cobre calibre 22.

••33 Um cabo elétrico é formado por 125 fios com uma resistência de 2,65 μΩ cada um. A mesma diferença de potencial é aplicada às extremidades de todos os fios, o que produz uma corrente total de 0,750 A. (a) Qual é a corrente em cada fio? (b) Qual é a diferença de potencial aplicada? (c) Qual é a resistência do cabo?

••34 *Nadando durante uma tempestade.* A Fig. 26-29 mostra um nadador a uma distância D = 35,0 m de um relâmpago, com uma corrente I = 78 kA, que atinge a água. A água tem uma resistividade de 30 Ω · m, a largura do nadador ao longo de uma reta que passa pelo ponto em que caiu o raio é 0,70 m e a resistência do corpo do nadador nessa direção é 4,00 kΩ. Suponha que a corrente se espalhe pela água como um hemisfério, com o centro no ponto em que caiu o relâmpago. Qual é o valor da corrente que atravessa o corpo do nadador?

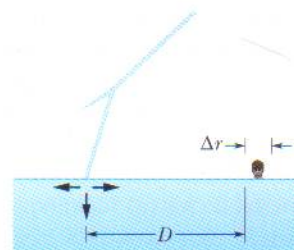



FIG. 26-29 Problema 34.

•••35 Na Fig. 26-30 uma corrente elétrica atravessa um tronco de cone circular reto de resistividade 731 Ω · m, raio menor a = 2,00 mm, raio maior b = 2,30 mm e comprimento L = 1,94 cm. A densidade de corrente é uniforme ao longo de uma seção reta perpendicular ao eixo do objeto. Qual é a resistência do objeto?

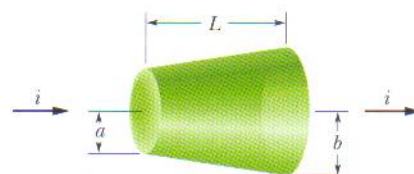



FIG. 26-30 Problema 35.

•••36 A Fig. 26-31 mostra um fio 1, com 4,00R de diâmetro, e um fio 2, com 2,00R de diâmetro, ligados por um trecho de fio em que o diâmetro varia gradualmente. O fio é de cobre e está sendo percorrido por uma corrente distribuída uniformemente ao longo de qualquer seção reta do fio. A variação do potencial elétrico V ao longo do comprimento L = 2,00 m do fio 2 é 10,0 μV. O número de portadores de carga por unidade de volume é $8,49 \times 10^{28}$ m^{-3}. Qual é a velocidade de deriva dos elétrons de condução no fio 1?

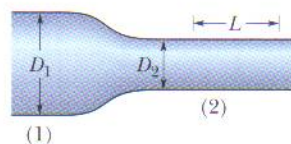



FIG. 26-31 Problema 36.

seção 26-6 Uma Visão Microscópica da Lei de Ohm

••37 Mostre que de acordo com o modelo do elétron livre para a condução de corrente elétrica em metais e a física clássica a resistividade dos metais é proporcional a $\sqrt{T}$, onde T é a temperatura em kelvins. (Veja a Eq. 19-31.)

seção 26-7 Potência em Circuitos Elétricos

•38 Um estudante manteve um rádio de 9,0 V; 7,0 W ligado no volume máximo das 9 horas da noite às 2 horas da madrugada. Qual foi a carga que atravessou o rádio?

•39 Uma diferença de potencial de 120 V é aplicada a um aquecedor de ambiente cuja resistência de operação é 14 Ω. (a) Qual é a taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica? (b) Qual é o custo de 5,0 h de uso do aquecedor se o preço da eletricidade é \$0,05/kW · h?

•40 Na Fig. 26-32 uma bateria com uma diferença de potencial $V = 12$ V está ligada a um fio resistivo de resistência $R = 6{,}0\ \Omega$. Quando um elétron percorre o fio de um extremo a outro, (a) em que sentido o elétron se move? (b) Qual é o trabalho realizado pelo campo elétrico do fio sobre o elétron? (c) Qual é a energia transformada pelo elétron em energia térmica do fio?

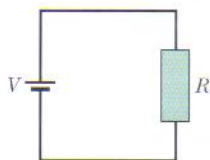



FIG. 26-32 Problema 40.

•41 Quando um resistor de valor desconhecido é ligado aos terminais de uma bateria de 3,00 V, a potência dissipada é 0,540 W. Quando o mesmo resistor é ligado aos terminais de uma bateria de 1,50 V, qual é a potência dissipada?

•42 Um resistor dissipa uma potência de 100 W quando a corrente é de 3,00 A. Qual é a resistência?

•43 Um aquecedor de ambiente de 1250 W foi projetado para funcionar com 115 V. (a) Qual é a corrente consumida pelo aparelho? (b) Qual é a resistência do elemento de aquecimento? (c) Qual é a energia térmica produzida pelo aparelho em 1,0 h?

•44 Na Fig. 26-33*a* um resistor de 20 Ω é ligado a uma bateria. A Fig. 26-33*b* mostra a energia térmica E_t gerada pelo resistor em função do tempo t. A escala vertical é definida por $E_{t,s} = 2{,}50$ mJ, e a escala horizontal é definida por $t_s = 4{,}00$ s. Qual é a diferença de potencial entre os terminais da bateria?

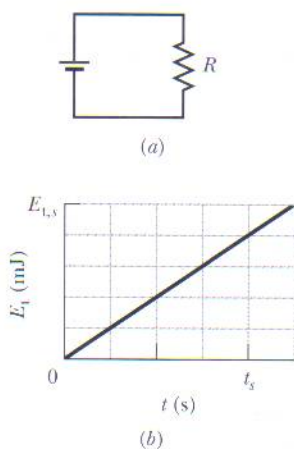



FIG. 26-33 Problema 44.

•45 Uma certa máquina de cachorro-quente funciona aplicando uma diferença de potencial de 120 V às extremidades de uma salsicha e cozinhando-a com a energia térmica produzida. A corrente é 10,0 A e a energia necessária para cozinhar uma salsicha é 60,0 kJ. Se a potência dissipada permanece a mesma, quanto tempo é necessário para cozinhar três salsichas simultaneamente?

••46 *Sapatos que explodem.* Os sapatos molhados de chuva de uma pessoa podem explodir se a corrente de terra de um relâmpago vaporizar a água. A transformação brusca de água em vapor produz uma expansão violenta, suficiente para destruir os sapatos. A água tem uma massa específica de 1000 kg/m³ e um calor de vaporização de 333 kJ/kg. Se a corrente de terra produzida pelo relâmpago é horizontal, aproximadamente constante, dura 2,00 ms e encontra água com uma resistividade de 150 Ω · m, 12,0 cm de comprimento e uma seção reta vertical de 15×10^{-5} m², qual é o valor da corrente necessária para vaporizar a água?

••47 Uma diferença de potencial de 120 V é aplicada a um aquecedor de ambiente de 500 W. (a) Qual é a resistência do elemento de aquecimento? (b) Qual é a corrente no elemento de aquecimento?

••48 A corrente que circula na bateria e nos resistores 1 e 2 da Fig. 26-34*a* é de 2,00 A. A energia elétrica é convertida em energia térmica nos dois resistores. As curvas 1 de 2 da Fig. 26-34*b* mostram a energia térmica E_t produzida pelos dois resistores em função do tempo t. A escala vertical é definida por $E_{t,s} = 40{,}0$ mJ, e a escala horizontal é definida por $t_s = 5{,}00$ s. Qual é a potência da bateria?

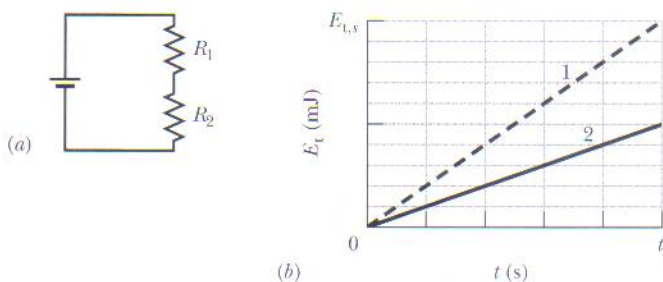



FIG. 26-34 Problema 48.

••49 Um elemento de aquecimento feito de Nichrome, com uma seção reta de $2{,}60 \times 10^{-6}$ m², é submetido a uma diferença de potencial de 75,0 V. O fio de Nichrome tem uma resistividade de $5{,}00 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot$ m. (a) Se o fio dissipa 5000 W, qual é o seu comprimento? (b) Qual deve ser o comprimento do fio para que a mesma dissipação seja obtida com uma tensão de 100 V?

••50 O módulo da densidade de corrente em um certo fio circular de 3,00 mm de raio é dado por $J = (2{,}75 \times 10^{10}\ \text{A/m}^4)r^2$, onde r é a distância radial. O potencial aplicado às extremidades do fio é 60,0 V. Qual é a energia convertida em energia térmica em 1,00 h?

••51 Uma lâmpada de 100 W é ligada a uma tomada de parede de 120 V. (a) Quanto custa deixar a lâmpada ligada continuamente durante um mês de 31 dias? Suponha que o preço da energia elétrica é \$0,06/kW · h. (b) Qual é a resistência da lâmpada? (c) Qual é a corrente na lâmpada?

••52 Um fio de cobre com uma seção reta de $2{,}00 \times 10^{-6}$ m² e um comprimento de 4,00 m é percorrido por uma corrente uniformemente distribuída. (a) Qual é o módulo do campo elétrico no interior do fio? (b) Qual é a energia elétrica transformada em energia térmica em 30 min?

••53 O fio C e o fio D são feitos de materiais diferentes e têm comprimentos $L_C = L_D = 1{,}0$ m. A resistividade e o diâmetro do fio C são $2{,}0 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$ m e 1,00 mm, e a resistividade e o diâmetro do fio D são $1{,}0 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$ m e 0,50 mm. Os fios são unidos da forma mostrada na Fig. 26-35 e submetidos a uma corrente de 2,0 A. Determine a diferença de potencial elétrico (a) entre os pontos 1 e 2; (b) entre os pontos 2 e 3. Determine a potência dissipada (c) entre os pontos 1 e 2; (d) entre os pontos 2 e 3.

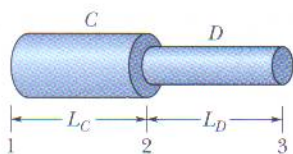



FIG. 26-35 Problema 53.

•••54 A Fig. 26-36*a* mostra uma barra de material resistivo. A resistência por unidade de comprimento da barra aumenta no sentido positivo do eixo x. Em qualquer posição x ao longo da barra a resistência dR de um elemento de largura dx é dada por $dR = 5{,}00x\ dx$, onde dR está em ohms e x em metros. A Fig. 26-36*b* mostra um desses elementos de resistência. O trecho da barra entre $x = 0$ e $x = L$ é cortado e ligado aos terminais de uma bateria com uma diferença de potencial $V = 5{,}0$ V (Fig. 26-36*c*). Qual deve ser o valor de L para que a potência dissipada pelo trecho cortado seja 200 W?

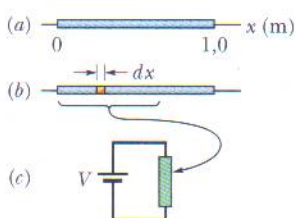



FIG. 26-36 Problema 54.

Problemas Adicionais

55 Um feixe de partículas alfa ($q = +2e$) com uma energia cinética de 20 MeV corresponde a uma corrente de 0,25 μA. (a) Se o feixe incide perpendicularmente em uma superfície plana, quantas partículas alfa atingem a superfície em 3,0 s? (b) Quantas partículas alfa existem em um comprimento de 20 cm do feixe? (c) Qual é a diferença de potencial necessária para acelerar as partículas alfa, a partir do repouso, para que adquiram uma energia de 20 MeV?

56 *O mistério do chocolate em pó*. Esta história começou no Problema 56 do Capítulo 23 e continuou nos Capítulos 24 e 25. O pó de chocolate foi transportado para o silo em um cano de raio R, com velocidade v e densidade uniforme de cargas ρ. (a) Determine uma expressão para a corrente i (o fluxo das cargas elétricas associadas ao pó) em uma seção reta do cano. (b) Calcule o valor de i para as condições da fábrica: raio do cano $R = 5{,}0$ cm, velocidade $v = 2{,}0$ m/s e densidade de cargas $\rho = 1{,}1 \times 10^{-3}$ C/m³.

Se o pó sofresse uma variação de potencial elétrico V, sua energia poderia ser transferida para uma centelha a uma taxa $P = iV$. (c) Poderia haver essa transferência no interior do cano devido à diferença de potencial radial discutida no Problema 68 do Capítulo 24?

Quando o pó saiu do cano e entrou no silo, o potencial elétrico do pó mudou. O valor absoluto dessa variação foi pelo menos igual à diferença de potencial radial no interior do cano (calculada no Problema 68 do Capítulo 24). (d) Tomando esse valor para a diferença de potencial e usando a corrente calculada no item (b) do presente problema, determine a taxa com a qual a energia pode ter sido transferida do pó para uma centelha quando o pó deixou o cano. (e) Se uma centelha ocorreu no momento em que o pó deixou o tubo e durou 0,20 s (uma estimativa razoável), qual foi a energia transferida para a centelha?

Lembre-se de que, como foi visto no Problema 56 do Capítulo 23, é necessária uma transferência de energia de no mínimo 150 mJ para provocar uma explosão. (f) Onde ocorreu provavelmente a explosão: na nuvem de pó da bandeja (Problema 56 do Capítulo 25), no interior do cano ou na entrada do silo?

57 Um aquecedor de 500 W foi projetado para funcionar com uma diferença de potencial de 115 V. (a) Qual é a queda percentual da potência dissipada se a diferença de potencial aplicada diminui para 110 V? Suponha que a resistência permanece a mesma. (b) Se a variação da resistência com a temperatura for levada em consideração, a queda de potência será maior ou menor que o valor calculado no item (a)?

58 Uma diferença de potencial de 1,20 V é aplicada a 33,0 m de um fio de cobre calibre 18 (diâmetro: 0,0400 polegada). Calcule (a) a corrente; (b) o módulo da densidade de corrente no interior do fio; (c) o módulo do campo elétrico no interior do fio; (d) a potência dissipada no fio.

59 Um aquecedor de Nichrome dissipa 500 W quando a diferença de potencial aplicada é 110 V e a temperatura do fio é 800°C. Qual é a potência dissipada se a temperatura do fio é mantida em 200°C por imersão em um banho de óleo? A diferença de potencial é a mesma nos dois casos, e o valor de α para o Nichrome a 800°C é $4{,}0 \times 10^{-4}$ K^{-1}.

60 Uma barra de alumínio de seção reta quadrada tem 1,3 m de comprimento e 5,2 mm de lado. (a) Qual é a resistência entre as extremidades da barra? (b) Qual deve ser o diâmetro de uma barra cilíndrica de cobre com 1,3 m de comprimento para que sua resistência seja igual à da barra de alumínio?

61 Uma barra de metal cilíndrica tem 1,60 m de comprimento e 5,50 mm de diâmetro. A resistência entre as duas extremidades (a 20°C) é $1{,}09 \times 10^{-3}$ Ω. (a) Qual é o material do fio? (b) Um disco circular, com 2,00 cm de diâmetro e 1,00 mm de espessura, é fabricado com o mesmo material. Qual é a resistência entre as faces do disco, supondo que cada face é uma superfície equipotencial?

62 Um resistor cilíndrico de 5,0 mm de raio e 2,0 cm de comprimento é feito de um material cuja resistividade é $3{,}5 \times 10^{-5}$ Ω · m. Determine (a) o módulo da densidade de corrente; (b) a diferença de potencial para que a potência dissipada no resistor seja 1,0 W.

63 Uma diferença de potencial V é aplicada a um fio de seção reta A, comprimento L e resistividade ρ. Estamos interessados em mudar a diferença de potencial aplicada e esticar o fio para que a potência dissipada seja multiplicada por 30,0 e a corrente seja multiplicada por 4,00. Supondo que a densidade do fio não mude, determine (a) a razão entre o novo comprimento e L; (b) a razão entre a nova seção reta e A.

64 Os faróis de um carro em movimento consomem 10 A do alternador de 12 V, que é acionado pelo motor. Suponha que o alternador tem uma eficiência de 80% (a potência elétrica de saída é 80% da potência mecânica de entrada) e calcule o número de cavalos-vapor que o motor precisa fornecer para manter os faróis acesos.

65 Um dispositivo de 18,0 W funciona com uma diferença de potencial de 9,00 V. Qual é a carga que atravessa o dispositivo em 4,00 h?

66 A densidade de corrente em um fio é $2{,}0 \times 10^6$ A/m², o comprimento do fio é 5,0 m e a densidade de elétrons de condução é

$8{,}49 \times 10^{28}\ m^{-3}$. Quanto tempo um elétron leva (em média) para atravessar o fio de um extremo a outro?

67 Qual é a energia consumida em 2,00 h por uma resistência elétrica de 400 Ω quando a diferença de potencial aplicada à resistência é 90,0 V?

68 Um resistor com uma diferença de potencial de 200 V dissipa uma potência de 3000 W. Qual é a resistência do resistor?

69 Uma bobina de fio de Nichrome é imersa em um líquido. (Nichrome é uma liga de níquel, cromo e ferro muito usada em elementos de aquecimento.) Quando a diferença de potencial entre as extremidades da bobina é 12 V e a corrente na bobina é 5,2 A, o líquido evapora à taxa de 21 mg/s. Determine o calor de vaporização do líquido. (Veja a Seção 18-8.)

70 Uma corrente é estabelecida em um tubo de descarga de gás quando uma diferença de potencial suficientemente elevada é aplicada a dois eletrodos situados no interior do tubo. O gás se ioniza; elétrons se movem na direção do eletrodo positivo e íons positivos monoionizados se movem na direção do terminal negativo. (a) Qual é a corrente em um tubo de descarga de hidrogênio no qual $3{,}1 \times 10^{18}$ elétrons e $1{,}1 \times 10^{18}$ prótons atravessam uma seção reta do tubo por segundo? (b) O sentido da densidade de corrente $\vec{J}$ é do eletrodo positivo para o eletrodo negativo ou do eletrodo negativo para o eletrodo positivo?

71 Um elemento de aquecimento de 2,0 kW de uma secadora tem 80 cm de comprimento. Se 10 cm do elemento são removidos, qual é a potência dissipada pelo novo elemento para uma diferença de potencial de 120 V?

72 Os enrolamentos de cobre de um motor têm uma resistência de 50 Ω a 20°C quando o motor está frio. Depois de o motor trabalhar durante várias horas, a resistência aumenta para 58 Ω. Qual é a nova temperatura dos enrolamentos? Suponha que as dimensões dos enrolamentos não variem. (Use a Tabela 26-1.)

73 Um certo tubo de raios X funciona com uma corrente de 7,00 mA e uma diferença de potencial de 80,0 kV. Qual é a potência do tubo em watts?

74 Uma lagarta de 4,0 cm de comprimento rasteja no mesmo sentido que a deriva de elétrons em um fio de cobre de 5,2 mm de diâmetro que conduz uma corrente uniforme de 12 A. (a) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades da lagarta? (b) A cauda da lagarta é positiva ou negativa em relação à cabeça? (c) Quanto tempo a lagarta leva para rastejar 1,0 cm com a mesma velocidade que a velocidade de deriva dos elétrons no fio? (O número de portadores de carga por unidade de volume é $8{,}49 \times 10^{28}\ m^{-3}$.)

75 (a) Para que temperatura a resistência de um fio de cobre é o dobro da resistência a 20,0°C? (Use 20,0°C como ponto de referência na Eq. 26-17; compare a resposta com a Fig. 26-10.) (b) A "temperatura para o dobro da resistência" é a mesma para todos os fios de cobre, independentemente da forma e do tamanho?

76 Um trilho de aço tem uma seção reta de 56,0 cm². Qual é a resistência de 10,0 km de trilhos? A resistividade do aço é $3{,}00 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot m$.

27 Circuitos

Quando um carro de corrida pára no boxe os mecânicos correm para fazer ajustes e encher o tanque. A equipe deve estar bem treinada, já que alguns segundos desperdiçados durante a parada podem custar ao piloto a corrida. Entretanto, o abastecimento rápido nem sempre é seguro, pois o carro pode estar carregado com um potencial de −30 kV ao chegar ao boxe. Uma centelha no ar saturado de vapor de gasolina pode ser suficiente para provocar um incêndio.

©AP/Wide World Photos

Que precaução pode ser tomada para evitar acidentes em uma situação como esta?

A resposta está neste capítulo.

27-1 O QUE É FÍSICA?

Estamos cercados de circuitos elétricos. Podemos nos orgulhar do número de aparelhos elétricos que possuímos ou fazer uma lista mental dos aparelhos elétricos que gostaríamos de possuir. Todos esses aparelhos, e também a rede de distribuição de energia elétrica que os faz funcionar, dependem da engenharia elétrica moderna. Não é fácil estimar o valor econômico atual da engenharia elétrica e seus produtos, mas podemos ter certeza de que esse valor aumenta de ano para ano, à medida que mais e mais tarefas são executadas eletricamente. Hoje em dia os aparelhos de rádio e televisão são ligados eletricamente; as mensagens são enviadas por E-mail; os artigos científicos são copiados na forma de arquivos digitais e lidos nas telas dos computadores.

A ciência básica da engenharia elétrica é a física. Neste capítulo vamos falar da física de circuitos elétricos que contêm apenas resistores e fontes (e, na Seção 27-9, de capacitores). Vamos limitar nossa discussão a circuitos nos quais as cargas se movem sempre no mesmo sentido, conhecidos como *circuitos de corrente contínua* ou *circuitos de CC*. Começamos com a seguinte pergunta: Como colocar cargas elétricas em movimento?

27-2 | "Bombeamento" de Cargas

Para fazer passar cargas elétricas por um resistor precisamos estabelecer uma diferença de potencial entre as extremidades do dispositivo. Uma forma de fazer isso seria ligar as extremidades do resistor às placas de um capacitor carregado. O problema é que o movimento das cargas faria o capacitor se descarregar e, portanto, depois de um certo tempo o potencial seria o mesmo nas duas placas. Quando isso acontecesse não haveria mais um campo elétrico no interior do resistor, e a corrente deixaria de circular.

Para produzir uma corrente estável precisamos de uma "bomba" de cargas, um dispositivo que, realizando trabalho sobre os portadores de carga, mantenha uma diferença de potencial entre dois terminais. Um dispositivo desse tipo é chamado de **fonte de tensão**, ou simplesmente **fonte**. Dizemos que uma fonte de tensão produz uma **força eletromotriz** $\mathscr{E}$, o que significa que submete os portadores de carga a uma diferença de potencial. O termo *força eletromotriz* é usado, por razões históricas, para designar a diferença de potencial produzida por uma fonte de tensão, embora na verdade não se trate de uma força.

No Capítulo 26 discutimos o movimento de portadores de carga em um circuito em termos do campo elétrico existente no circuito; o campo produz forças que colocam os portadores de carga em movimento. Neste capítulo vamos usar uma abordagem diferente, discutindo o movimento dos portadores de carga em termos de energia: uma fonte de tensão fornece a energia necessária para o movimento através do trabalho que realiza sobre os portadores.

Uma fonte muito útil é a *bateria*, usada para alimentar uma grande variedade de máquinas, de relógios de pulso a submarinos. A fonte mais importante na vida diária, porém, é o *gerador de eletricidade*, que, através de ligações elétricas (fios) a partir de uma usina de energia elétrica, cria uma diferença de potencial nas residências e escritórios. As *células solares*, presentes nos painéis em forma de asa das sondas espaciais, também são usadas para gerar energia em localidades remotas do nosso planeta. Fontes menos conhecidas são as *células de combustível* dos ônibus espaciais e as *termopilhas*, que fornecem energia elétrica para algumas naves espaciais e para estações remotas na Antártica e outros locais. Nem todas as fontes são artificiais: organismos vivos, como enguias elétricas e até seres humanos e plantas, são capazes de gerar eletricidade.

Embora os dispositivos mencionados apresentem diferenças significativas quanto ao modo de operação, todos realizam as mesmas funções básicas: realizar trabalho sobre portadores de carga e manter uma diferença de potencial entre dois terminais.

A maior bateria para armazenamento de energia elétrica do mundo (desmontada em 1996) usava mais de 8000 baterias de chumbo-ácido ligadas em 8 séries de 1000 V cada uma, capazes de fornecer uma potência de 10 MW durante 4 horas. Carregadas à noite, as baterias eram utilizadas nas horas em que a demanda de energia elétrica atingia o valor de pico. *(Cortesia da Southern California Edison Company)*

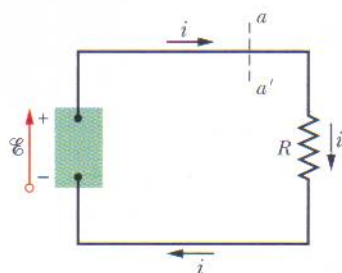



FIG. 27-1 Um circuito elétrico simples, no qual uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}$ realiza trabalho sobre portadores de carga e mantém uma corrente constante i em um resistor de resistência R.

27-3 | Trabalho, Energia e Força Eletromotriz

A Fig. 27-1 mostra um circuito formado por uma fonte (uma bateria, por exemplo) e uma única resistência R (o símbolo de resistência e de um resistor é -\/\/\/-). A fonte mantém um dos terminais (o terminal positivo, ou terminal +) a um potencial elétrico maior que o outro (o terminal negativo, ou terminal −). Podemos representar a força eletromotriz da fonte como uma seta apontando do terminal negativo para o terminal positivo, como na Fig. 27-1. Um pequeno círculo na origem da seta que representa a força eletromotriz serve para distingui-la das setas que indicam a direção da corrente.

Quando uma fonte não está ligada a um circuito, a energia que existe no interior da fonte não provoca nenhum movimento dos portadores de carga. Quando, porém, a fonte é ligada a um circuito, como na Fig. 27-1, essa energia faz com que portadores de carga (positivos, por convenção) sejam transferidos do terminal negativo para o terminal positivo da fonte, ou seja, no sentido da seta que representa a força eletromotriz. Esse movimento é parte da corrente que se estabelece no mesmo sentido em todo o circuito (no caso da Fig. 27-1, o sentido horário).

No interior da fonte os portadores de carga positivos se movem de uma região de baixo potencial elétrico e, portanto, de baixa energia potencial elétrica (o terminal negativo) para uma região de alto potencial elétrico e alta energia potencial elétrica (o terminal positivo). Esse movimento tem o sentido contrário ao sentido no qual os portadores positivos se moveriam sob a ação do campo elétrico que existe entre os dois terminais (que aponta do terminal positivo para o terminal negativo). Assim, deve haver uma energia no interior da fonte realizando um trabalho sobre as cargas e forçando as cargas a se moverem dessa forma. A energia pode ser química, como nas baterias e nas células de combustível, ou mecânica, como nos geradores. Também pode resultar de diferenças de temperatura, como nas termopilhas, ou ser fornecida pelo Sol, como nas células solares.

Vamos agora analisar o circuito da Fig. 27-1 do ponto de vista do trabalho e da energia. Em um intervalo de tempo dt uma carga dq passa por todas as seções retas do circuito, como aa'. A mesma carga entra no terminal de baixo potencial da fonte de tensão e sai do terminal de alto potencial. Para que a carga dq se mova dessa forma a fonte deve realizar sobre ela um trabalho dW. Definimos a força eletromotriz da fonte através desse trabalho:

$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq} \quad \text{(definição de } \mathscr{E}\text{).} \tag{27-1}$$

Em palavras, a força eletromotriz de uma fonte é o trabalho por unidade de carga que a fonte realiza para transferir cargas do terminal de baixo potencial para o terminal de alto potencial. A unidade de força eletromotriz no SI é o joule por coulomb; no Capítulo 24 essa unidade foi definida como o *volt*.

Uma **fonte de tensão ideal**, por definição, é aquela que não apresenta nenhuma resistência ao movimento das cargas de um terminal para o outro. A diferença de potencial entre os terminais de uma fonte ideal é igual à força eletromotriz da fonte. Assim, por exemplo, uma bateria ideal com uma força eletromotriz de 12,0 V mantém uma diferença de 12,0 V entre os terminais.

Uma **fonte de tensão real** possui uma resistência interna que se opõe ao movimento das cargas. Quando uma fonte real não está ligada a um circuito e, portanto, não conduz uma corrente elétrica a diferença de potencial entre os terminais é igual à força eletromotriz. Quando a fonte conduz uma corrente, porém, a diferença de potencial é menor que a força eletromotriz. As fontes reais serão discutidas na Seção 27-5.

Quando uma fonte é ligada a um circuito a fonte transfere energia para os portadores de carga que passam por ela. Essa energia pode então ser transferida dos portadores de carga para outros dispositivos do circuito, como, por exemplo, o filamento de uma lâmpada. A Fig. 27-2*a* mostra um circuito formado por duas baterias ideais recarregáveis A e B, uma resistência R e um motor elétrico M que é capaz de

levantar um objeto usando a energia que recebe dos portadores de carga do circuito. Observe que as baterias estão ligadas de tal forma que tendem a fazer as cargas circularem em sentidos opostos. O sentido da corrente é determinado pela bateria que possui a maior força eletromotriz que, no caso, estamos supondo que seja a bateria B, de modo que a energia química da bateria B diminui com a transferência de parte dessa energia para os portadores de carga. Por outro lado, a energia química da bateria A aumenta, pois o sentido da corrente no seu interior é do terminal positivo para o terminal negativo. Assim, a bateria B, além de fornecer energia para acionar o motor M e vencer a resistência R, também carrega a bateria A. A Fig. 27-2*b* mostra as três transferências de energia; todas diminuem a energia química da bateria B.

FIG. 27-2 (*a*) Como neste circuito $\mathscr{E}_B > \mathscr{E}_A$, o sentido da corrente é determinado pela bateria B. (*b*) As transferências de energia no circuito.

27-4 | Cálculo da Corrente em um Circuito de uma Malha

Vamos discutir agora dois métodos diferentes para calcular a corrente no circuito simples de *uma malha* da Fig. 27-3; um dos métodos se baseia na lei de conservação da energia e o outro no conceito de potencial. O circuito que vamos analisar é formado por uma fonte ideal B com uma força eletromotriz $\mathscr{E}$, um resistor de resistência R e dois fios de ligação. (A menos que seja afirmado explicitamente o contrário, vamos supor que os fios dos circuitos possuem resistência desprezível. A função dos fios, portanto, é apenas permitir a passagem dos portadores de corrente de um dispositivo para outro.)

Método da Energia

De acordo com a Eq. 26-27 ($P = i^2R$), em um intervalo de tempo dt uma energia dada por $i^2R\,dt$ é transformada em energia térmica no resistor da Fig. 27-3. Como foi observado na Seção 26-7, podemos dizer que essa energia é *dissipada*. (Já que estamos supondo que a resistência dos fios é desprezível, eles não dissipam energia.) Durante o mesmo intervalo uma carga $dq = i\,dt$ atravessa a fonte B e o trabalho realizado pela fonte sobre essa carga, de acordo com a Eq. 27-1, é dado por

$$dW = \mathscr{E}\,dq = \mathscr{E}i\,dt.$$

De acordo com a lei de conservação da energia, o trabalho realizado pela fonte (ideal) é igual à energia térmica que aparece no resistor:

$$\mathscr{E}i\,dt = i^2R\,dt.$$

Isso nos dá

$$\mathscr{E} = iR.$$

A força eletromotriz $\mathscr{E}$ é a energia por unidade de carga transferida da fonte para as cargas que se movem no circuito. A grandeza iR é a energia por unidade de carga transferida das cargas móveis para o resistor e convertida em calor. Assim, esta equação mostra que a energia por unidade de carga transferida para as cargas em movimento é igual à energia por unidade de carga transferida pelas cargas em movimento. Explicitando i, obtemos

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{27-2}$$

Método do Potencial

Suponha que começamos em um ponto qualquer do circuito da Fig. 27-3 e nos deslocamos mentalmente ao longo do circuito em um sentido arbitrário, somando algebricamente as diferenças de potencial que encontramos no caminho. Ao voltarmos ao ponto de partida teremos voltado também ao potencial inicial. Antes

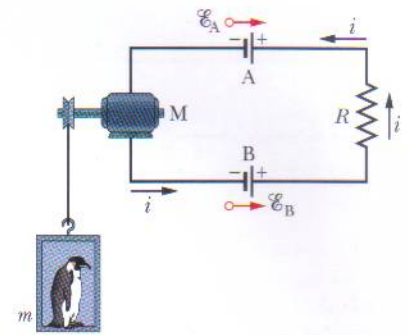
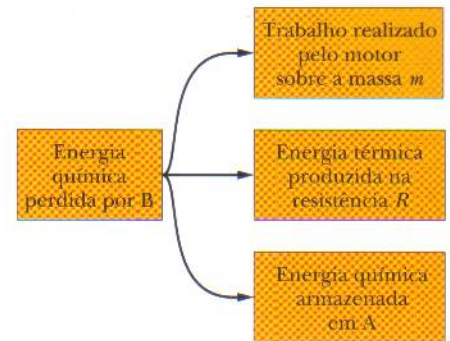
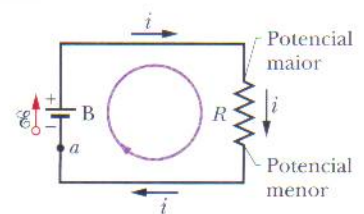



FIG. 27-3 Um circuito de uma malha no qual uma resistência R está ligada aos terminais de uma fonte ideal B de força eletromotriz $\mathscr{E}$. A corrente resultante i é a mesma em todo o circuito.

de prosseguir queremos chamar a atenção para o fato de que isso vale não só para circuitos com uma malha como o da Fig. 27-3, mas também para qualquer malha fechada em um circuito com *várias malhas*, como os que serão discutidos na Seção 27-7.

REGRA DAS MALHAS: A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero.

Esta regra também é conhecida como *lei das malhas de Kirchhoff* (ou *lei das tensões de Kirchhoff*), em homenagem ao físico alemão Gustav Robert Kirchhoff. Ela equivale a dizer que cada ponto de uma montanha possui apenas uma altitude em relação ao nível do mar. Se partimos de um ponto qualquer e voltamos ao mesmo ponto depois de passear pela montanha, a soma algébrica das mudanças de altitude durante a caminhada é necessariamente zero.

Na Fig. 27-3 vamos começar no ponto a, cujo potencial é V_a, e nos deslocar mentalmente no sentido horário até estarmos de volta ao ponto a, anotando as mudanças de potencial que ocorrem no percurso. Nosso ponto de partida é o terminal negativo da fonte. Como a fonte é ideal, a diferença de potencial entre seus terminais é $\mathscr{E}$. Assim, quando atravessamos a fonte, passando do terminal negativo para o terminal positivo, a variação de potencial é $+\mathscr{E}$.

Quando passamos do terminal positivo da fonte para o terminal superior do resistor não há variação de potencial, já que a resistência do fio é desprezível. Quando atravessamos o resistor o potencial varia de acordo com a Eq. 26-8 (que pode ser escrita na forma $V = iR$). O potencial deve diminuir, já que estamos passando do lado de potencial mais alto do resistor para o lado de potencial mais baixo. Assim, a variação de potencial é $-iR$.

Voltamos ao ponto a através do fio que liga o terminal inferior do resistor ao terminal negativo da fonte. Como a resistência do fio é desprezível, não há variação de potencial nesse trecho do circuito. No ponto a o potencial é novamente V_a. Como percorremos todo o circuito, o potencial inicial, depois de modificado pelas variações de potencial ocorridas ao longo do caminho, deve ser igual ao potencial final, ou seja,

$$V_a + \mathscr{E} - iR = V_a.$$

Subtraindo V_a de ambos os membros da equação, obtemos:

$$\mathscr{E} - iR = 0.$$

Explicitando i nesta equação, obtemos o mesmo resultado, $i = \mathscr{E}/R$, do método da energia (Eq. 27-2).

Se aplicarmos a regra da malha a um percurso no *sentido anti-horário*, o resultado será

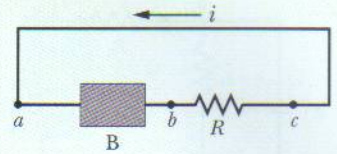
$$-\mathscr{E} + iR = 0$$

e mais uma vez encontraremos $i = \mathscr{E}/R$. Assim, o sentido no qual percorremos o circuito ao aplicar a regra das malhas é arbitrário.

Com o intuito de nos prepararmos para o estudo de circuitos mais complexos que o da Fig. 27-3, vamos formular duas regras para calcular as diferenças de potencial produzidas pelos dispositivos que encontramos ao longo do circuito.

REGRA DAS RESISTÊNCIAS: Quando atravessamos uma resistência no sentido da corrente a variação do potencial é $-iR$; quando atravessamos uma resistência no sentido oposto, a variação é $+iR$.

REGRA DAS FONTES: Quando atravessamos uma fonte ideal do terminal negativo para o positivo, a variação do potencial é $+\mathscr{E}$; quando atravessamos uma fonte no sentido oposto, a variação é $-\mathscr{E}$.

TESTE 1 A figura mostra a corrente i em um circuito formado por uma fonte B e uma resistência R (além de fios de resistência desprezível). (a) A seta que indica a força eletromotriz da fonte B deve apontar para a esquerda ou para a direita? Coloque em ordem os pontos a, b e c de acordo com (b) o valor absoluto da corrente; (c) o potencial elétrico e (d) a energia potencial elétrica dos portadores de carga, começando pelo maior valor.

27-5 | Outros Circuitos de uma Malha

Nesta seção vamos modificar o circuito simples da Fig. 27-3 de duas formas.

Resistência Interna

A Fig. 27-4a mostra uma fonte real, de resistência interna r, ligada a um resistor externo de resistência R. A resistência interna da fonte é a resistência elétrica dos materiais condutores que existem no interior da fonte e, portanto, é parte integrante da fonte. Na Fig. 27-4a, porém, a fonte foi desenhada como se pudesse ser separada em uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e um resistor de resistência r. A ordem em que os dois dispositivos são introduzidos no circuito é irrelevante.

Aplicando a regra das malhas no sentido horário, a partir do ponto a, as *variações* do potencial nos dão

$$\mathscr{E} - ir - iR = 0. \qquad (27\text{-}3)$$

Explicitando a corrente, obtemos

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \qquad (27\text{-}4)$$

Observe que esta equação se reduz à Eq. 27-2 se a fonte for ideal, ou seja, se $r = 0$.

A Fig. 27-4b mostra graficamente as variações de potencial elétrico ao longo do circuito. (Para estabelecer uma ligação mais direta da Fig. 27-4b com o *circuito fechado* da Fig. 27-4a, imagine o gráfico desenhado sobre a superfície lateral de um cilindro, com o ponto a da esquerda coincidindo com o ponto a da direita). Observe que percorrer o circuito é como passear em uma montanha e voltar ao ponto de partida; na chegada, você se encontra na mesma altitude em que estava quando partiu.

Neste livro, quando não dissermos explicitamente que uma fonte é real o leitor pode supor que se trata de uma fonte ideal, ou seja, que a resistência interna da fonte pode ser desprezada.

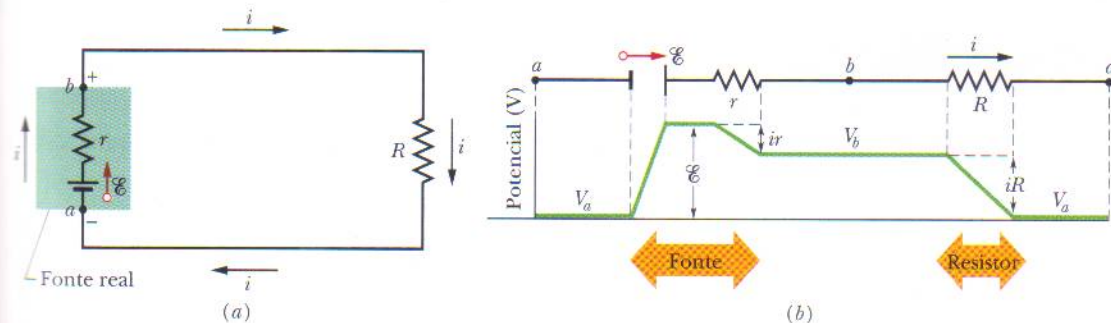



FIG. 27-4 (a) Circuito de uma malha com uma fonte real de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência interna r. (b) O mesmo circuito, representado de outra forma para mostrar as variações do potencial elétrico quando o circuito é percorrido no sentido horário a partir do ponto a. O potencial V_a foi tomado arbitrariamente como sendo zero; os outros potenciais foram calculados em relação a V_a.

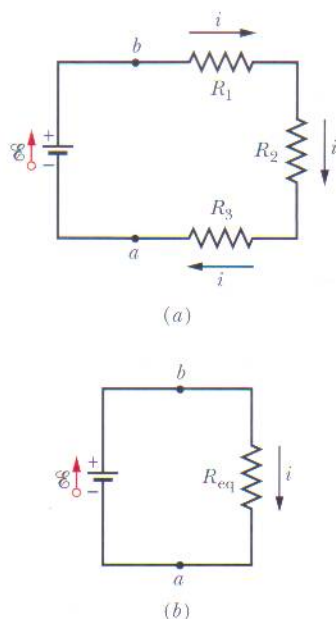



FIG. 27-5 (*a*) Três resistores ligados em série entre os pontos *a* e *b*. (b) Circuito equivalente, com os três resistores substituídos por uma resistência equivalente R_{eq}.

Resistências em Série

A Fig. 27-5*a* mostra três resistências ligadas **em série** a uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$. Esta descrição pouco tem a ver com o modo como as resistências são desenhadas. A expressão "em série" significa apenas que as resistências são ligadas uma após a outra e que uma diferença de potencial V é aplicada às extremidades da ligação. Na Fig. 27-5*a* as resistências estão ligadas uma após a outra entre os pontos *a* e *b*, e uma diferença de potencial entre os pontos *a* e *b* é mantida por uma fonte. As diferenças de potencial entre os terminais de cada resistência produzem a mesma corrente i em todas as resistências. De modo geral,

Quando uma diferença de potencial V é aplicada a resistências ligadas em série a corrente i é a mesma em todas as resistências, e a soma das diferenças de potencial das resistências é igual à diferença de potencial aplicada V.

Observe que as cargas que atravessam resistências ligadas em série têm um único caminho possível. Se existe mais de um caminho, as resistências não estão ligadas em série.

Resistências ligadas em série podem ser substituídas por uma resistência equivalente R_{eq} percorrida pela mesma corrente i e com a mesma diferença de potencial *total* V que as resistências originais.

A Fig. 27-5*b* mostra a resistência equivalente R_{eq} das três resistências da Fig. 27-5*a*.

Para determinar o valor da resistência R_{eq} da Fig. 27-5*b* aplicamos a regra das malhas aos dois circuitos. Na Fig. 27-5*a*, começando no ponto *a* e percorrendo o circuito no sentido horário, temos:

$$\mathscr{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0,$$

ou

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{27-5}$$

Na Fig. 27-5*b*, com as três resistências substituídas por uma resistência equivalente R_{eq}, encontramos:

$$\mathscr{E} - iR_{eq} = 0,$$

ou

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}. \tag{27-6}$$

Igualando as Eqs. 27-5 e 27-6, obtemos:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3.$$

A extensão para n resistores é imediata e nos dá

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j \qquad (n \text{ resistências em série}). \tag{27-7}$$

Observe que quando duas ou mais resistências estão ligadas em série a resistência equivalente é maior que a maior as resistências.

TESTE 2 Na Fig. 27-5*a*, se $R_1 > R_2 > R_3$, coloque as três resistências na ordem (a) da corrente que passa pelas resistências e (b) da diferença de potencial das resistências, começando pelo maior valor.

27-6 | Diferença de Potencial entre Dois Pontos

Muitas vezes estamos interessados em determinar a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito. Assim, por exemplo, na Fig. 27-6, qual é a diferença de potencial $V_b - V_a$ entre os pontos a e b? Para descobrir a resposta vamos começar no ponto a (cujo potencial é V_a) e nos deslocar, passando pela fonte, até o ponto b (cujo potencial é V_b), anotando as diferenças de potencial encontradas no percurso. Quando passamos pela fonte o potencial aumenta de $\mathscr{E}$. Quando passamos pela resistência interna r da fonte estamos nos movendo no sentido da corrente e, portanto, o potencial diminui de ir. A essa altura, estamos no ponto b, e temos

FIG. 27-6 Existe uma diferença entre os potenciais dos pontos a e b, que são os terminais de uma fonte real.

$$V_a + \mathscr{E} - ir = V_b,$$

ou

$$V_b - V_a = \mathscr{E} - ir. \tag{27-8}$$

Para calcular o valor dessa expressão precisamos conhecer a corrente i. Observe que o circuito é o mesmo da Fig. 27-4a, para o qual, de acordo com a Eq. 27-4,

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{27-9}$$

Substituindo esta equação na Eq. 27-8, obtemos:

$$V_b - V_a = \mathscr{E} - \frac{\mathscr{E}}{R + r} r$$

$$= \frac{\mathscr{E}}{R + r} R. \tag{27-10}$$

Substituindo os valores numéricos que aparecem na Fig. 27-6, temos:

$$V_b - V_a = \frac{12 \text{ V}}{4{,}0 \ \Omega + 2{,}0 \ \Omega} 4{,}0 \ \Omega = 8{,}0 \text{ V}. \tag{27-11}$$

Suponha que tivéssemos escolhido percorrer o circuito no sentido anti-horário, passando pelo resistor R em vez de passar pela fonte. Como, nesse caso, estaríamos nos movendo no sentido oposto ao da corrente, o potencial aumentaria de iR. Assim,

$$V_a + iR = V_b$$

ou

$$V_b - V_a = iR. \tag{27-12}$$

Substituindo i pelo seu valor, dado pela Eq. 27-9, obtemos mais uma vez a Eq. 27-10. Assim, substituindo os valores numéricos obtemos o mesmo resultado, $V_b - V_a = 8{,}0$ V. No caso geral,

> Para determinar o potencial entre dois pontos de um circuito começamos em um dos pontos e percorremos o circuito até o outro ponto, somando algebricamente todas as variações de potencial que encontramos no percurso.

Diferença de Potencial de uma Fonte Real

Na Fig. 27-6 os pontos a e b estão situados nos terminais da fonte; assim, a diferença de potencial $V_b - V_a$ é a diferença de potencial entre os terminais da fonte. De acordo com a Eq. 27-8, temos:

$$V = \mathscr{E} - ir. \tag{27-13}$$

De acordo com a Eq. 27-13, se a resistência interna r da fonte da Fig. 27-6 fosse zero V seria igual à força eletromotriz $\mathscr{E}$ da fonte, ou seja, 12 V. Entretanto, como $r = 2{,}0 \ \Omega$ V é menor que $\mathscr{E}$. De acordo com a Eq. 27-11, $V = 8{,}0$ V. Observe que o resultado depende da corrente que atravessa a fonte. Se a fonte estivesse em outro circuito no qual a corrente fosse diferente, V teria outro valor.

(a)

(b)

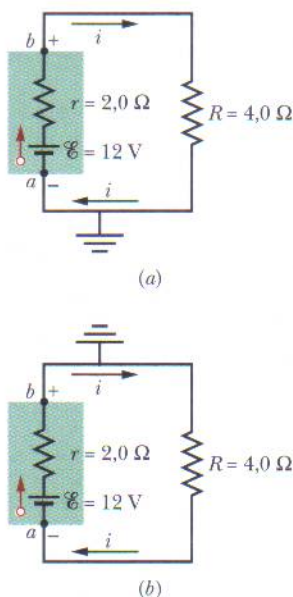



FIG. 27-7 (*a*) O ponto *a* está diretamente ligado à terra. (*b*) O ponto *b* está diretamente ligado à terra.

Aterrando um Circuito

A Fig. 27-7*a* mostra o mesmo circuito da Fig. 27-6, exceto pelo fato de que o ponto *a* está diretamente ligado à *terra*, o que é indicado pelo símbolo ⏚. *Aterrar um circuito* pode significar ligar o circuito à superfície da Terra (na verdade, ao solo úmido, que é um bom condutor de eletricidade). Nesse diagrama, porém, o símbolo de terra significa apenas que o potencial é definido como sendo zero no ponto indicado pelo símbolo. Assim, na Fig. 27-7*a* o potencial do ponto *a* é definido como sendo $V_a = 0$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 27-11, o potencial no ponto *b* é $V_b = 8{,}0$ V.

A Fig. 27-7*b* mostra o mesmo circuito, exceto pelo fato de que agora é o ponto *b* que está ligado à terra. Assim, o potencial do ponto *b* é definido como sendo $V_b = 0$; nesse caso, de acordo com a Eq. 27-11, o potencial no ponto *a* é $V_b = -8{,}0$ V.

Potência, Potencial e Força Eletromotriz

Quando uma bateria ou outro tipo de fonte realiza trabalho sobre portadores de carga para estabelecer uma corrente *i* o dispositivo transfere energia de sua fonte interna de energia (energia química, no caso de uma bateria) para os portadores de carga. Como toda fonte real possui uma resistência interna *r*, a fonte também dissipa uma parte da energia na forma de calor (Seção 26-7). Vamos ver agora como essas transferências estão relacionadas.

A potência *P* fornecida pela fonte aos portadores de carga é dada pela Eq. 26-26:

$$P = iV, \tag{27-14}$$

onde *V* é a diferença de potencial entre os terminais da fonte. De acordo com a Eq. 27-13, podemos fazer $V = \mathscr{E} - ir$ na Eq. 27-14 para obter

$$P = i(\mathscr{E} - ir) = i\mathscr{E} - i^2r. \tag{27-15}$$

Examinando a Eq. 27-15, reconhecemos o termo i^2r como a potência P_r dissipada no interior da fonte (Eq. 26-27):

$$P_r = i^2r \qquad \text{(potência dissipada na fonte).} \tag{27-16}$$

Nesse caso, o termo $i\mathscr{E}$ da Eq. 27-15 é a *soma* da potência transferida para os portadores de carga com a potência dissipada pela fonte, que pode ser chamada de P_{fonte}. Assim,

$$P_{\text{fem}} = i\mathscr{E} \qquad \text{(potência fornecida pela fonte).} \tag{27-17}$$

Quando uma bateria está sendo *recarregada*, com uma corrente passando no "sentido inverso", a transferência de energia é *dos* portadores de carga *para* a bateria; parte dessa energia é usada para aumentar a energia química da bateria e parte é dissipada na resistência interna *r* da bateria. A taxa de variação da energia química é dada pela Eq. 27-17, a taxa de dissipação é dada pela Eq. 27-16 e a taxa com a qual os portadores de carga fornecem energia é dada pela Eq. 27-14.

TESTE 3 Uma fonte possui uma força eletromotriz de 12 V e uma resistência interna de 2 Ω. A diferença de potencial entre os terminais é menor, maior ou igual a 12 V se a corrente que atravessa a fonte (a) é do terminal negativo para o terminal positivo; (b) é do terminal positivo para o terminal negativo; (c) é zero?

Exemplo 27-1

As forças eletromotrizes e as resistências do circuito da Fig. 27-8*a* têm os seguintes valores:

$$\mathscr{E}_1 = 4{,}4\text{ V},\quad \mathscr{E}_2 = 2{,}1\text{ V},$$
$$r_1 = 2{,}3\ \Omega,\quad r_2 = 1{,}8\ \Omega,\quad R = 5{,}5\ \Omega.$$

(a) Qual é a corrente i no circuito?

IDÉIA-CHAVE Podemos obter uma expressão para a corrente i em um circuito como este aplicando a regra das malhas.

Cálculos: Embora conhecer o sentido de i não seja necessário, podemos determiná-lo com facilidade a partir dos valores das forças eletromotrizes das duas fontes. Como $\mathscr{E}_1$ é maior que $\mathscr{E}_2$, a fonte 1 controla o sentido de i e, portanto, a corrente tem o sentido horário. Vamos aplicar a regra das malhas percorrendo o circuito no sentido anti-horário (contra a corrente), começando no ponto a. O resultado é o seguinte:

$$-\mathscr{E}_1 + ir_1 + iR + ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0.$$

O leitor pode verificar que a mesma equação é obtida quando aplicamos a regra das malhas no sentido horário ou começamos em outro ponto do circuito. Além disso, vale a pena comparar esta equação termo a termo com a Fig. 27-8*b*, que mostra graficamente as variações de potencial (com o potencial do ponto a tomado arbitrariamente como sendo zero).

Explicitando a corrente i nesta equação, obtemos:

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{4{,}4\text{ V} - 2{,}1\text{ V}}{5{,}5\ \Omega + 2{,}3\ \Omega + 1{,}8\ \Omega}$$
$$= 0{,}2396\text{ A} \approx 240\text{ mA}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a diferença de potencial entre os terminais da fonte 1 na Fig. 27-8*a*?

IDÉIA-CHAVE Precisamos somar as diferenças de potencial entre os pontos a e b.

Cálculos: Vamos começar no ponto b (o terminal negativo da fonte 1) e percorrer o circuito no sentido horário até chegar ao ponto a (o terminal positivo da fonte 1), anotando as variações de potencial. O resultado é o seguinte:

$$V_b - ir_1 + \mathscr{E}_1 = V_a,$$

o que nos dá

$$V_a - V_b = -ir_1 + \mathscr{E}_1$$
$$= -(0{,}2396\text{ A})(2{,}3\ \Omega) + 4{,}4\text{ V}$$
$$= +3{,}84\text{ V} \approx 3{,}8\text{ V}, \qquad \text{(Resposta)}$$

que é menor que a força eletromotriz da fonte. O leitor pode verificar que este resultado está correto começando no ponto b da Fig. 27-8*a* e percorrendo o circuito no sentido anti-horário até chegar ao ponto a.

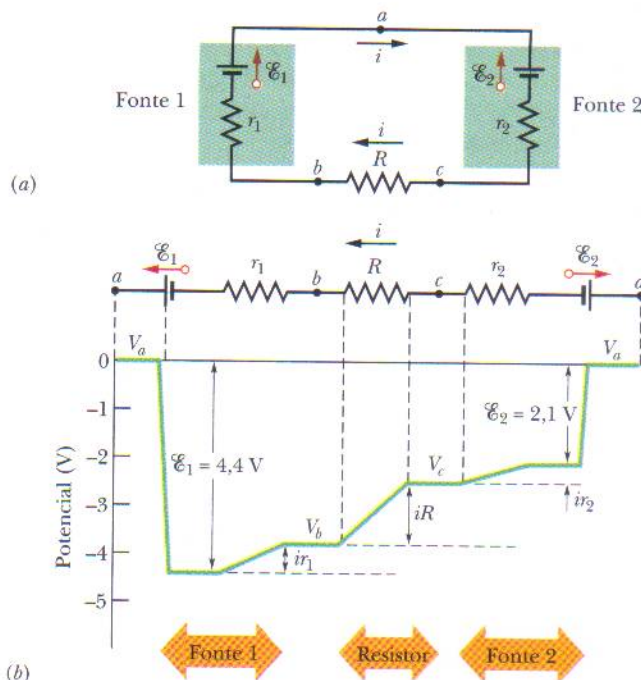



FIG. 27-8 (*a*) Circuito de uma malha com duas fontes reais e um resistor. As fontes estão em oposição, ou seja, tendem a fazer a corrente atravessar o resistor em sentidos opostos. (*b*) Gráfico dos potenciais, percorrendo o circuito no sentido horário a partir do ponto a e tomando arbitrariamente o potencial do ponto a como sendo zero. (Para estabelecer uma correlação direta da Fig. 27-8*b* com o circuito fechado da Fig. 27-8*a*, interrompa mentalmente o circuito no ponto a da Fig. 27-8*a*; em seguida, desdobre para a esquerda a parte do circuito à esquerda de a e desdobre para a direita a parte do circuito à direita de a.)

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 1:** O Sentido Inicial Escolhido para a Corrente É Irrelevante* Para resolver problemas de circuitos elétricos não é necessário conhecer de antemão o sentido da corrente; o sentido usado inicialmente nos cálculos pode ser escolhido arbitrariamente. Para mostrar que isso é verdade, suponha que o sentido escolhido para a corrente na Fig. 27-8*a* fosse o sentido anti-horário. Nesse caso, aplicando a regra das malhas a partir do ponto a e percorrendo o circuito no sentido anti-horário, teríamos:

$$-\mathscr{E}_1 - ir_1 - iR - ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0,$$

ou

$$i = -\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Substituindo os valores numéricos do Exemplo 27-1, obtemos $i = -240$ mA. O sinal negativo significa que a corrente tem o sentido oposto ao que foi escolhido inicialmente.

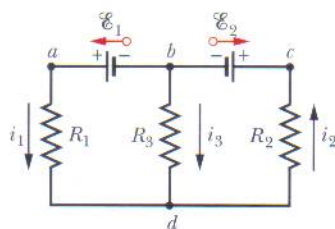



FIG. 27-9 Circuito com mais de uma malha formado por três ramos: o ramo da esquerda *bad*, o ramo da direita *bcd* e o ramo central *bd*. O circuito também contém três malhas: a malha da esquerda *badb*, a malha da direita *bcdb* e a malha externa *badcb*.

27-7 | Circuitos com Mais de uma Malha

A Fig. 27-9 mostra um circuito com mais de uma malha. Para simplificar a análise, vamos supor que as fontes são ideais. Existem dois *nós* no circuito, nos pontos *b* e *d*, e três *ramos* ligando esses nós: o ramo da esquerda (*bad*), o ramo da direita (*bcd*) e o ramo central (*bd*). Quais são as correntes nos três ramos?

Vamos rotular arbitrariamente as correntes usando um índice diferente para cada ramo. A corrente i_1 tem o mesmo valor em todos os pontos do ramo *bad*, i_2 tem o mesmo valor em todos os pontos do ramo *bcd* e i_3 tem o mesmo valor em todos os pontos do ramo *bd*. Os sentidos das correntes foram escolhidos arbitrariamente.

Considere o nó *d*. As cargas entram nesse nó através das correntes i_1 e i_3 e deixam o nó através da corrente i_2. Como a carga total não pode mudar, a corrente total que chega tem que ser igual à corrente total que sai:

$$i_1 + i_3 = i_2. \tag{27-18}$$

Podemos verificar facilmente que a aplicação dessa condição ao nó *b* leva exatamente à mesma equação. A Eq. 27-18 sugere o seguinte princípio geral:

REGRA DOS NÓS: A soma das corrente que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

Esta regra também é conhecida como *lei dos nós de Kirchhoff* (ou *lei das correntes de Kirchhoff*). Trata-se simplesmente de outra forma de enunciar a lei de conservação das cargas: cargas não podem ser criadas nem destruídas em um nó. Assim, nossos instrumentos básicos para resolver circuitos complexos são a *regra das malhas* (baseada na lei de conservação da energia) e a *regra dos nós* (baseada na lei da conservação das cargas).

A Eq. 27-18 envolve três incógnitas. Para resolver totalmente o circuito (ou seja, determinar os valores das três correntes) precisamos de mais duas equações independentes que envolvam as mesmas variáveis. Podemos obtê-las aplicando duas vezes a regra das malhas. No circuito da Fig. 27-9 temos três malhas: a malha da esquerda (*badb*), a malha da direita (*bcdb*) e a malha externa (*badcb*). A escolha é arbitrária; vamos optar pela malha da esquerda e a malha da direita.

Percorrendo a malha da esquerda no sentido anti-horário a partir do ponto *b*, temos:

$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = 0. \tag{27-19}$$

Percorrendo a malha da direita no sentido anti-horário a partir do ponto *b*, temos:

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0. \tag{27-20}$$

Agora dispomos de três equações (Eqs. 27-18, 27-19 e 27-20), tendo como incógnitas as três correntes; esse sistema de equações pode ser resolvido por várias técnicas.

Se tivéssemos aplicado a regra das malhas à malha externa teríamos obtido (percorrendo a malha no sentido anti-horário a partir do ponto *b*) a seguinte equação:

$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0.$$

Esta equação pode parecer uma informação nova, mas é na verdade a soma das Eqs. 27-19 e 27-20 e, portanto, não constitui uma terceira equação independente baseada na regra das malhas. (Entretanto, poderia ser usada para resolver o problema em combinação com a Eq. 27-18 e a Eq. 27-19 ou a Eq. 27-20.)

Resistências em Paralelo

A Fig. 27-10*a* mostra três resistências ligadas *em paralelo* a uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$. O termo "em paralelo" significa que um dos terminais de todas as

resistências é ligado a um certo ponto, o outro terminal de todas as resistências é ligado a um segundo ponto e uma diferença de potencial V é aplicada entre esses pontos. Assim, a mesma diferença da potencial é aplicada a todas as resistências. No caso geral,

> Quando uma diferença de potencial V é aplicada a resistências ligadas em paralelo todas as resistências são submetidas à mesma diferença de potencial V.

Na Fig. 27-10*a* a diferença de potencial aplicada V é mantida pela fonte. Na Fig. 27-10*b* as três resistências em paralelo foram substituídas por uma resistência equivalente R_{eq}.

> Resistências ligadas em paralelo podem ser substituídas por uma resistência equivalente R_{eq} com a mesma diferença de potencial V e a mesma corrente *total* i que as resistências originais.

FIG. 27-10 (*a*) Três resistores ligados em paralelo entre os pontos *a* e *b*. (*b*) Circuito equivalente, com os três resistores substituídos por uma resistência equivalente R_{eq}.

Para determinar o valor da resistência R_{eq} da Fig. 27-10*b*, escrevemos as correntes nas resistências da Fig. 27-10*a* na forma

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \quad \text{e} \quad i_3 = \frac{V}{R_3},$$

onde V é a diferença de potencial entre a e b. Aplicando a regra dos nós ao ponto a da Fig. 27-10*a* e substituindo as correntes por seus valores, temos:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right). \tag{27-21}$$

Substituindo as resistências em paralelo pela resistência equivalente R_{eq} (Fig. 27-10*b*), temos:

$$i = \frac{V}{R_{eq}}. \tag{27-22}$$

Comparando as Eqs. 27-21 e 27-22, obtemos:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{27-23}$$

Generalizando este resultado para o caso de n resistências, temos:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ resistências em paralelo}). \tag{27-24}$$

No caso de duas resistências, a resistência equivalente é o produto das resistências dividido pela soma:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{27-25}$$

TABELA 27-1

Resistores e Capacitores em Série e em Paralelo

Em série	Em paralelo	Em série	Em paralelo
Resistores		Capacitores	
$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$ Eq. 27-7	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$ Eq. 27-24	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$ Eq. 25-20	$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$ Eq. 25-19
A corrente é a mesma em todos os resistores	A diferença de potencial é a mesma em todos os resistores	A carga é a mesma em todos os capacitores	A diferença de potencial é a mesma em todos os capacitores

Se o leitor se confundisse e pensasse que a resistência equivalente era a soma dividida pelo produto, veria de imediato que o resultado estava dimensionalmente incorreto, já que teria as dimensões de inverso de resistência.

Observe que quando duas ou mais resistências são ligadas em paralelo a resistência equivalente é menor que a menor das resistências. A Tabela 27-1 mostra as relações de equivalência para resistores e capacitores em série e em paralelo.

TESTE 4 Uma fonte com uma diferença de potencial V entre os terminais é ligada a uma combinação de dois resistores iguais e passa a conduzir uma corrente i. Quais são a diferença de potencial e a corrente em um dos resistores se os resistores estão ligados (a) em série; (b) em paralelo?

Exemplo 27-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 27-11a mostra um circuito com mais de uma malha formado por uma fonte ideal e quatro resistências com os seguintes valores:

$$R_1 = 20\ \Omega,\quad R_2 = 20\ \Omega,\quad \mathscr{E} = 12\ \text{V},$$

$$R_3 = 30\ \Omega,\quad R_4 = 8{,}0\ \Omega.$$

(a) Qual é a corrente na fonte?

IDÉIA-CHAVE Observando que a corrente na fonte é a mesma que em R_1, vemos que é possível determinar a corrente aplicando a regra das malhas a uma malha que inclui R_1, já que a corrente pode ser calculada a partir da diferença de potencial em R_1.

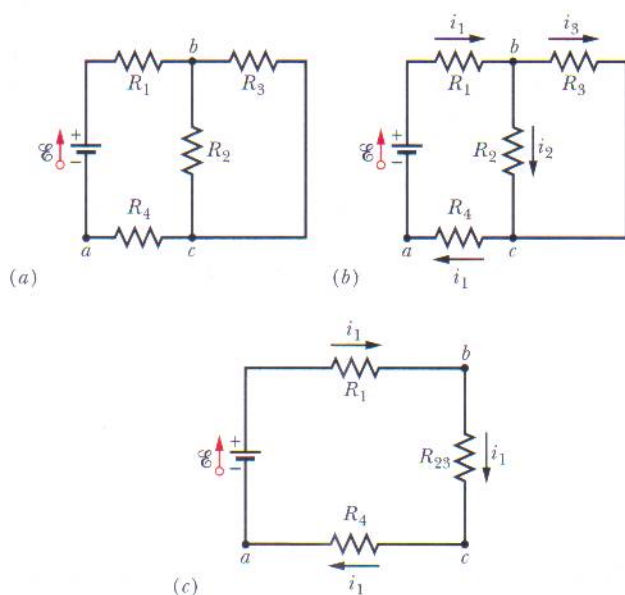



FIG. 27-11 (a) Circuito com mais de uma malha formado por uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e quatro resistências. (b) Sentidos escolhidos arbitrariamente para as correntes. (c) Circuito simplificado, com as resistências R_2 e R_3 substituídas pela resistência equivalente R_{23}. A corrente em R_{23} é igual à corrente em R_1 e R_4.

Método incorreto: As duas malhas que se prestam a esse papel são a malha da esquerda e a malha externa. Observando que a seta que representa a força eletromotriz aponta para cima e, portanto, a corrente na fonte tem o sentido horário, podemos aplicar a regra das malhas à malha da esquerda, começando no ponto a e percorrendo a malha no sentido horário. Chamando de i a corrente na fonte, temos:

$$+\mathscr{E} - iR_1 - iR_2 - iR_4 = 0 \qquad \text{(incorreta).}$$

Esta equação, porém, é incorreta, porque parte do pressuposto de que as correntes nas resistências R_1, R_2 e R_4 são iguais. As correntes em R_1 e R_4 são realmente iguais, já que a corrente que passa por R_4 também passa pela fonte e por R_1 sem mudar de valor. Entretanto, essa corrente se divide ao chegar ao nó b: parte da corrente passa por R_2 e parte passa por R_3.

Método ineficaz: Para distinguir as várias correntes presentes no circuito devemos rotulá-las, como na Fig. 27-11b. Em seguida, começando no ponto a, podemos aplicar a regra das malhas à malha da esquerda, no sentido horário, para obter:

$$+\mathscr{E} - i_1R_1 - i_2R_2 - i_1R_4 = 0.$$

Infelizmente, esta equação contém duas incógnitas, i_1 e i_2; necessitamos de pelo menos mais uma equação para resolver o problema.

Método eficaz: Uma tática muito mais simples é simplificar o circuito da Fig. 27-11b usando uma resistência equivalente. Observe que R_1 e R_2 *não estão* em série e, portanto, não podem ser substituídas por uma resistência equivalente; entretanto, R_2 e R_3 estão em paralelo, de modo que podemos usar a Eq. 27-24 ou a Eq. 27-25 para calcular o valor da resistência equivalente R_{23}. De acordo com a Eq. 27-25,

$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20\ \Omega)(30\ \Omega)}{50\ \Omega} = 12\ \Omega.$$

Podemos agora desenhar o circuito como na Fig. 27-11*c*; observe que a corrente em R_{23} deve ser i_1, já que as mesmas cargas que passam por R_1 e R_4 também passam por R_{23}. Para esse circuito simples, com uma única malha, a regra das malhas (aplicada no sentido horário, a partir do ponto *a*) nos dá

$$+\mathscr{E} - i_1R_1 - i_1R_{23} - i_1R_4 = 0.$$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$$12\text{ V} - i_1(20\,\Omega) - i_1(12\,\Omega) - i_1(8{,}0\,\Omega) = 0,$$

e portanto

$$i_1 = \frac{12\text{ V}}{40\,\Omega} = 0{,}30\text{ A}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a corrente i_2 em R_2?

IDÉIA-CHAVE (1) Podemos começar com o circuito equivalente da Fig. 27-11*c*, no qual R_2 e R_3 foram substituídas por R_{23}. (2) Como R_2 e R_3 estão em paralelo, estão submetidas à mesma diferença de potencial, que também é a mesma de R_{23}.

Cálculos: Sabemos que a corrente em R_{23} é $i_1 = 0{,}30$ A. Assim, podemos usar a Eq. 26-8 ($R = V/i$) para calcular a diferença de potencial V_{23} em R_{23}:

$$V_{23} = i_1R_{23} = (0{,}30\text{ A})(12\,\Omega) = 3{,}6\text{ V}.$$

Isso significa que a diferença de potencial em R_2 é 3,6 V. De acordo com a Eq. 26-8, a corrente em R_2 é dada por

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{3{,}6\text{ V}}{20\,\Omega} = 0{,}18\text{ A}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a corrente i_3 em R_3?

IDÉIA-CHAVE Podemos empregar a mesma técnica do item (b) ou usar o seguinte raciocínio: de acordo com a regra dos nós, no ponto *b* da Fig. 27-11*b* a corrente que entra, i_1, e as correntes que saem, i_2 e i_3, estão relacionadas através da equação

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Cálculo: Explicitando i_3 na equação anterior, obtemos

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0{,}30\text{ A} - 0{,}18\text{ A} = 0{,}12\text{ A}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 27-3

A Fig. 27-12 mostra um circuito cujos elementos têm os seguintes valores:

$$\mathscr{E}_1 = 3{,}0\text{ V}, \quad \mathscr{E}_2 = 6{,}0\text{ V},$$
$$R_1 = 2{,}0\,\Omega, \quad R_2 = 4{,}0\,\Omega.$$

As três fontes são ideais. Determine o valor absoluto e o sentido das correntes nos três ramos.

IDÉIAS-CHAVE Não vale a pena tentar simplificar esse circuito, já que não existem dois resistores em paralelo e os resistores que estão em série (no ramo da direita e no ramo da esquerda) não representam nenhum problema. Assim, é melhor aplicar logo de saída as regras dos nós e das malhas.

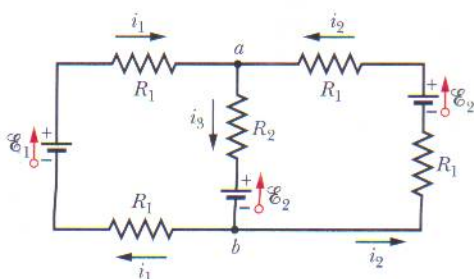



FIG. 27-12 Circuito de duas malhas com três fontes ideais e cinco resistências.

Regra dos nós: Escolhendo arbitrariamente o sentido das correntes, como na Fig. 27-12, aplicamos a regra dos nós ao ponto *a* e escrevemos

$$i_3 = i_1 + i_2. \quad (27\text{-}26)$$

Como uma aplicação da regra dos nós ao ponto *b* fornece apenas uma repetição da equação já obtida, aplicamos em seguida a regra das malhas a duas das três malhas do circuito.

Malha da esquerda: Escolhemos arbitrariamente a malha da esquerda, começamos arbitrariamente no ponto *b* e percorremos arbitrariamente a malha no sentido horário, obtendo

$$-i_1R_1 + \mathscr{E}_1 - i_1R_1 - (i_1 + i_2)R_2 - \mathscr{E}_2 = 0,$$

onde usamos $(i_1 + i_2)$ em vez de i_3 para representar a corrente do ramo central. Substituindo os valores dados e simplificando, obtemos:

$$i_1(8{,}0\,\Omega) + i_2(4{,}0\,\Omega) = -3{,}0\text{ V}. \quad (27\text{-}27)$$

Malha da direita: Para aplicar a regra das malhas pela segunda vez escolhemos arbitrariamente percorrer a malha da direita no sentido anti-horário a partir do ponto *b*, obtendo

$$-i_2R_1 + \mathscr{E}_2 - i_2R_1 - (i_1 + i_2)R_2 - \mathscr{E}_2 = 0.$$

Substituindo os valores dados e simplificando, obtemos:

$$i_1(4{,}0\,\Omega) + i_2(8{,}0\,\Omega) = 0. \quad (27\text{-}28)$$

Resolvendo as equações: Agora temos um sistema de duas equações (Eqs. 27-27 e 27-28) e duas incógnitas (i_1 e i_2), que podemos resolver "à mão" (o que é fácil, neste caso) ou usando um computador. (Uma técnica de solução é a regra de Cramer, que aparece no Apêndice E.) O resultado é o seguinte:

$$i_1 = -0{,}50 \text{ A}. \qquad (27\text{-}29)$$

(O sinal negativo mostra que o sentido escolhido para i_1 na Fig. 27-12 está errado, mas a correção só deve ser feita no final dos cálculos.) Fazendo $i_1 = -0{,}50$ A na Eq. 27-28 e explicitando i_2, obtemos

$$i_2 = 0{,}25 \text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 27-26, temos:

$$i_3 = i_1 + i_2 = -0{,}50 \text{ A} + 0{,}25 \text{ A} = -0{,}25 \text{ A}.$$

O sinal positivo de i_2 mostra que os sentidos escolhidos para esta corrente estão corretos. Entretanto, os sinais negativos de i_1 e i_3 mostram que os sentidos escolhidos para as duas correntes estão errados. Assim, *depois de executados todos os cálculos* corrigimos a resposta, invertendo as setas que indicam os sentidos de i_1 e i_3 na Fig. 27-12 e escrevendo

$$i_1 = 0{,}50 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_3 = 0{,}25 \text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Atenção: Esta correção só deve ser feita depois de *todas* as correntes tiverem sido calculadas.

Exemplo 27-4

Os peixes elétricos são capazes de gerar correntes elétricas com o auxílio de células chamadas *eletroplacas*, que são fontes de tensão biológicas. No peixe elétrico conhecido como poraquê as eletroplacas estão dispostas em 140 linhas, cada linha se estendendo horizontalmente ao longo do corpo do animal e contendo 5000 eletroplacas. O circuito correspondente aparece na Fig. 27-13*a*; cada eletroplaca tem uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ de 0,15 V e uma resistência interna r de 0,25 Ω. A água em torno da enguia completa o circuito entre as extremidades do arranjo de eletroplacas, uma na cabeça do animal e a outra na cauda.

(a) Se a água em torno da enguia tem uma resistência R_a = 800 Ω, qual é o valor da corrente que o animal é capaz de produzir na água?

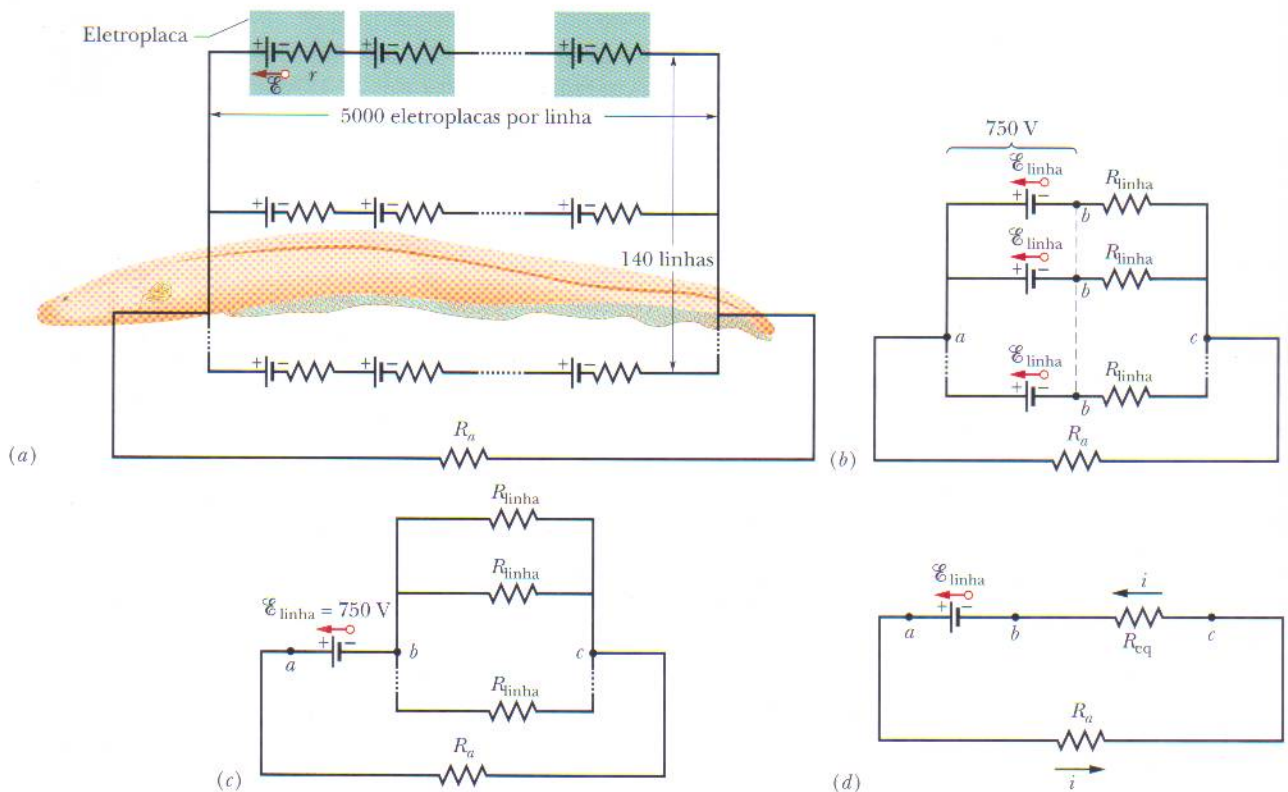



FIG. 27-13 (*a*) Circuito usado para modelar uma enguia elétrica. Cada eletroplaca do animal tem uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ e uma resistência interna r. Em cada uma das 140 linhas que se estendem da cabeça à cauda da enguia existem 5000 eletroplacas. A resistência da água é R_a. (*b*) A força eletromotriz $\mathscr{E}_{\text{linha}}$ e a resistência R_{linha} de cada linha. (*c*) A força eletromotriz entre os pontos a e b é $\mathscr{E}_{\text{linha}}$. Entre os pontos b e c existem 140 resistências R_{linha} em paralelo. (*d*) Circuito simplificado, com as resistências em paralelo substituídas por uma resistência equivalente.

IDÉIA-CHAVE Podemos simplificar o circuito da Fig. 27-13*a* substituindo combinações de forças eletromotrizes e resistências internas por fontes e resistências equivalentes.

Cálculos: Considere uma linha. A força eletromotriz total $\mathscr{E}_{linha}$ de 5000 eletroplacas ligadas em série é a soma das forças eletromotrizes:

$$\mathscr{E}_{linha} = 5000\mathscr{E} = (5000)(0{,}15\ V) = 750\ V.$$

A resistência total R_{linha} de uma linha é a soma das resistências internas das 5000 eletroplacas:

$$R_{linha} = 5000r = (5000)(0{,}25\ \Omega) = 1250\ \Omega.$$

Podemos agora representar cada uma das 140 linhas por uma única força eletromotriz $\mathscr{E}_{linha}$ e uma única resistência R_{linha} (Fig. 27-13*b*).

Na Fig. 27-13*b* a força eletromotriz entre o ponto *a* e o ponto *b* em qualquer linha é $\mathscr{E}_{linha} = 750$ V. Como as linhas são iguais e estão todas ligadas ao ponto *a* da Fig. 27-13*b*, o potencial é o mesmo em todos os pontos *b* da figura. Assim, podemos imaginar que todos os pontos *b* estão ligados entre si, formando um único ponto *b*. Como a força eletromotriz entre o ponto *a* e este ponto *b* único é $\mathscr{E}_{linha} = 750$ V, podemos substituir o circuito da Fig. 27-13*b* pelo circuito da Fig. 27-13*c*.

Entre os pontos *b* e *c* da Fig. 27-13*c* existem 140 resistências $R_{linha} = 1250\ \Omega$, todas em paralelo. A resistência equivalente R_{eq} dessa combinação é dada pela Eq. 27-24:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140\frac{1}{R_{linha}},$$

ou

$$R_{eq} = \frac{R_{linha}}{140} = \frac{1250\ \Omega}{140} = 8{,}93\ \Omega.$$

Substituindo as resistências em paralelo por R_{eq} obtemos o circuito simplificado da Fig. 27-13*d*. Aplicando a regra das malhas e percorrendo esse circuito no sentido anti-horário a partir do ponto *b*, temos:

$$\mathscr{E}_{linha} - iR_a - iR_{eq} = 0.$$

Explicitando *i* e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$i = \frac{\mathscr{E}_{linha}}{R_a + R_{eq}} = \frac{750\ V}{800\ \Omega + 8{,}93\ \Omega}$$
$$= 0{,}927\ A \approx 0{,}93\ A. \qquad \text{(Resposta)}$$

Se a cabeça ou a cauda da enguia está nas proximidades de um peixe, parte dessa corrente pode passar pelo corpo do peixe, atordoando-o ou matando-o.

(b) Qual é corrente i_{linha} em cada linha da Fig. 27-13*a*?

IDÉIA-CHAVE Como todas as linhas são iguais, a corrente se divide igualmente entre elas.

Cálculo: Podemos escrever:

$$i_{linha} = \frac{i}{140} = \frac{0{,}927\ A}{140} = 6{,}6 \times 10^{-3}\ A. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a corrente em cada linha é pequena, cerca de duas ordens de grandeza menor que a corrente que circula na água. Como a corrente está bem distribuída pelo corpo da enguia o animal não sofre nenhum incômodo ao produzir uma descarga elétrica.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: *Análise de Circuitos com Fontes e Resistores* Existem duas técnicas gerais para calcular os valores das correntes e diferenças de potencial em um circuito.

1. Simplifique o circuito sempre que possível, substituindo resistores em série ou em paralelo por resistores equivalentes. Se com essas substituições o circuito ficar reduzido a uma única malha a corrente que passa na fonte poderá ser calculada, como no Exemplo 27-2*a*. Em seguida, talvez seja necessário trabalhar no sentido inverso, desfazendo o processo de simplificação, para obter a corrente ou a diferença de potencial em um determinado resistor, como no Exemplo 27-2*b*.
2. Se o *circuito não puder ser simplificado até ser reduzido a uma* única malha, use a regra dos nós e a regra das malhas para escrever um sistema de equações, como no Exemplo 27-3. O número de equações independentes deve ser igual ao número de incógnitas. Se você estiver interessado em conhecer a corrente ou a diferença de potencial em um certo resistor, faça com que essa corrente ou diferença de potencial apareça nas equações escolhendo pelo menos uma malha que contenha o resistor.

Tática 3: *Escolhas Arbitrárias na Análise de Circuitos* No Exemplo 27-3 fizemos várias escolhas arbitrárias: (1) escolhemos o sentido das correntes na Fig. 27-12; (2) escolhemos duas das três malhas para aplicar a regra das malhas; (3) escolhemos o sentido em que as malhas foram percorridas; (4) escolhemos o ponto inicial de cada percurso.

Essas arbitrariedades costumam preocupar os novatos, mas os alunos mais experientes sabem que todas as escolhas levam ao mesmo resultado, contanto que se tenha duas coisas em mente. Em primeiro lugar as malhas devem ser percorridas totalmente. Em segundo lugar, uma vez escolhidos os sentidos das correntes tais sentidos devem ser mantidos até todas as correntes terem sido calculadas. Se o sentido escolhido para uma das correntes não for o correto a corrente será obtida com um sinal negativo. Nesse caso bastará eliminar o sinal negativo e inverter a seta que indica o sentido da corrente. Entretanto, *o leitor deve fazer essa correção apenas depois de terminar os cálculos*, como no Exemplo 27-3.

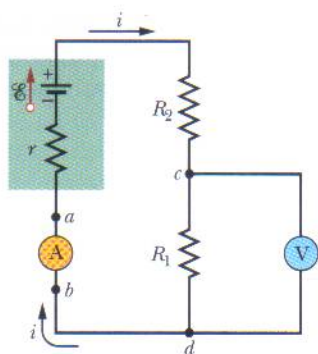



FIG. 27-14 Circuito de uma malha, mostrando como ligar um amperímetro (A) e um voltímetro (V).

27-8 I O Amperímetro e o Voltímetro

O instrumento usado para medir correntes é chamado de *amperímetro*. Para medir a corrente em um fio em geral precisamos desligar ou cortar o fio e introduzir o amperímetro no circuito para que a corrente passe pelo aparelho. (Na Fig. 27-14 o amperímetro A está sendo usado para medir a corrente i.)

É essencial que a resistência R_A do amperímetro seja muito menor que todas as outras resistências do circuito; se não for assim, a presença do medidor mudará o valor da corrente que se pretende medir.

O instrumento usado para medir diferenças de potencial é chamado de *voltímetro*. Para medir a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito ligamos os terminais do voltímetro a esses pontos sem desligar nem cortar nenhum fio do circuito. (Na Fig. 27-14, o voltímetro V está sendo usado para medir a diferença de potencial em R_1.)

É essencial que a resistência R_V do voltímetro seja muito maior que a resistência dos elementos do circuito entre os pontos nos quais no voltímetro está ligado. Se não for assim a presença do medidor mudará o valor da diferença de potencial que se pretende medir.

Existem medidores que, dependendo da posição de uma chave, podem ser usados como amperímetro ou como voltímetro, e também, muitas vezes, como *ohmímetro*, um aparelho que mede a resistência do elemento ligado entre seus terminais. Esses instrumentos multifuncionais são chamados de *multímetros*.

27-9 I Circuitos *RC*

Nas seções precedentes lidamos apenas com circuitos nos quais as correntes não variavam com o tempo. Vamos agora iniciar uma discussão de correntes que variam com o tempo.

Carga de um Capacitor

O capacitor de capacitância C da Fig. 27-15 está inicialmente descarregado. Para carregá-lo colocamos a chave S na posição a. Isso completa um *circuito RC série* formado por um capacitor, uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e uma resistência R.

Como vimos na Seção 25-2, no momento em que o circuito é completado cargas começam a se mover (surgem correntes) no circuito. Essas correntes acumulam uma carga q cada vez maior nas placas do capacitor e estabelecem uma diferença de potencial V_C $(= q/C)$ entre as placas do capacitor. Quando essa diferença de potencial é igual à diferença de potencial entre os terminais da fonte (que é igual, por sua vez, à força eletromotriz $\mathscr{E}$) a corrente deixa de circular. De acordo com a Eq. 25-1 ($q = CV$), a *carga de equilíbrio* (carga final) do capacitor é igual a $C\mathscr{E}$.

Vamos examinar mais de perto o processo de carregamento do capacitor. Em particular, estamos interessados em saber como variam com o tempo a carga q, a diferença de potencial V_C e a corrente i enquanto o capacitor está sendo carregado. Começamos por aplicar a regra das malhas ao circuito, percorrendo-o no sentido horário a partir do terminal negativo da fonte. Temos:

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = 0. \tag{27-30}$$

FIG. 27-15 Quando a chave S é colocada na posição a, o capacitor é *carregado* através do resistor. Mais tarde, quando a chave é colocada na posição b o capacitor é *descarregado* através do resistor.

O último termo do lado esquerdo representa a diferença de potencial entre as placas do capacitor. O termo é negativo porque a placa de cima do capacitor, que está ligada ao terminal positivo da fonte, tem um potencial mais alto que a placa de baixo: assim, há uma queda de potencial quando passamos da placa de cima para a placa de baixo do capacitor.

Não podemos resolver imediatamente a Eq. 27-30 porque a equação tem duas variáveis, i e q. Entretanto, as variáveis não são independentes, mas estão relacionadas através da equação

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (27\text{-}31)$$

Combinando as Eqs. 27-30 e 27-31, obtemos:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E} \quad \text{(equação de carregamento).} \qquad (27\text{-}32)$$

Esta equação diferencial descreve a variação com o tempo da carga q no capacitor da Fig. 27-15. Para resolvê-la precisamos encontrar a função $q(t)$ que satisfaz essa equação e também a condição de que o capacitor está inicialmente descarregado, ou seja, de que $q = 0$ no instante $t = 0$.

Mais adiante vamos mostrar que a solução da Eq. 27-32 é

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{(carregamento de um capacitor).} \qquad (27\text{-}33)$$

(A constante e que aparece na Eq. 27-33 é a base dos logaritmos neperianos, 2,718... e não a carga elementar.) Observe que essa equação satisfaz a condição inicial, já que, para $t = 0$, o termo $e^{-t/RC}$ é igual a 1 e, portanto, $q = 0$. Observe também que quando t tende ao infinito (ou seja, após um longo período de tempo), o termo $e^{-t/RC}$ tende a zero. Isso significa que a equação também prevê corretamente o valor final da carga do capacitor, $q = C\mathscr{E}$. A Fig. 27-16a mostra o gráfico de $q(t)$ em função de t durante o processo de carregamento do capacitor.

A derivada de $q(t)$ é a corrente de carregamento do capacitor:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \quad \text{(carregamento de um capacitor).} \qquad (27\text{-}34)$$

A Fig. 27-16b mostra o gráfico de $i(t)$ em função de t durante o processo de carregamento do capacitor. Observe que o valor inicial da corrente é $\mathscr{E}/R$ e que a corrente tende a zero quando t tende ao infinito e a carga do capacitor tende para o valor final.

Um capacitor que está sendo carregado se comporta inicialmente como um fio comum. Após um longo período de tempo o capacitor se comporta como um fio interrompido.

Combinando a Eq. 25-1 ($q = CV$) e a Eq. 27-33 descobrimos que a diferença de potencial $V_C(t)$ entre as placas do capacitor durante o processo de carregamento é dada por

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{(carregamento de um capacitor).} \qquad (27\text{-}35)$$

De acordo com a Eq. 27-35, $V_C = 0$ no instante $t = 0$, em que o capacitor está totalmente descarregado, e $V_C \to \mathscr{E}$ quando $t \to \infty$ e a carga do capacitor tende para o valor final.

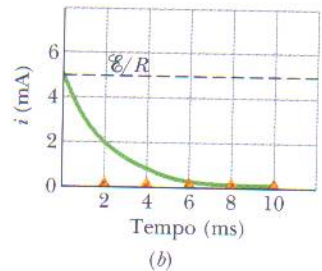
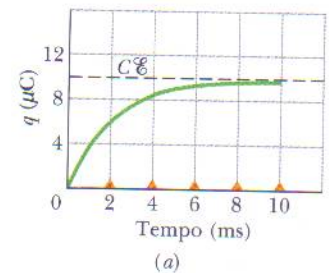



FIG. 27-16 (a) Gráfico da Eq. 27-33 que mostra a carga do capacitor da Fig. 27-15 em função do tempo. (b) Gráfico da Eq. 27-34 que mostra a corrente de carga no circuito da Fig. 27-15 em função do tempo. As curvas foram plotadas para $R = 2000\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$ e $\mathscr{E} = 10$ V; os triângulos representam intervalos sucessivos de uma constante de tempo τ.

A Constante de Tempo

O produto RC que aparece nas Eqs. 27-33, 27-34 e 27-35 tem dimensão de tempo (tanto porque o argumento de uma exponencial deve ser adimensional como pelo fato de que $1{,}0\ \Omega \times 1{,}0\ F = 1{,}0$ s). O produto RC é chamado de **constante de tempo capacitiva** do circuito e representado pela letra grega τ:

$$\tau = RC \quad \text{(constante de tempo).} \qquad (27\text{-}36)$$

De acordo com a Eq. 27-33, no instante $t = \tau$ $(= RC)$ a carga do capacitor inicialmente descarregado da Fig. 27-15 aumentou de zero para

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-1}) = 0{,}63C\mathscr{E}. \tag{27-37}$$

Em palavras, durante a primeira constante de tempo τ a carga aumentou de zero para 63% do valor final $C\mathscr{E}$. Na Fig. 27-16, os triângulos no eixo dos tempos assinalam intervalos sucessivos de uma constante de tempo durante o carregamento do capacitor. Os tempos de carregamento dos circuitos RC são freqüentemente expressos em termos de τ; quanto maior o valor de τ, maior o tempo necessário para carregar um capacitor.

Descarga de um Capacitor

Suponha agora que o capacitor da Fig. 27-15 esteja totalmente carregado, ou seja, com um potencial V_0 igual à força eletromotriz $\mathscr{E}$ da fonte. Em um novo instante $t = 0$ a chave S é deslocada da posição a para a posição b, fazendo com que o capacitor comece a se *descarregar* através da resistência R. Nesse caso, como variam com o tempo a carga q do capacitor e a corrente i no circuito?

A equação diferencial que descreve a variação de q com o tempo é semelhante à Eq. 27-32, exceto pelo fato de que agora, como a fonte não está mais no circuito, $\mathscr{E} = 0$. Assim,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{(equação de descarga).} \tag{27-38}$$

A solução desta equação diferencial é

$$q = q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(descarga de um capacitor),} \tag{27-39}$$

onde q_0 $(= CV_0)$ é a carga inicial do capacitor. O leitor pode verificar, por substituição, que a Eq. 27-39 é realmente uma solução da Eq. 27-38.

De acordo com a Eq. 27-39, a carga q diminui exponencialmente com o tempo a uma taxa que depende da constante de tempo capacitiva $\tau = RC$. No instante $t = \tau$ a carga do capacitor diminuiu para q_0e^{-1}, ou aproximadamente 37% do valor inicial. Observe que quanto maior o valor de τ maior o tempo de descarregamento.

Derivando a Eq. 27-39, obtemos a corrente $i(t)$:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \qquad \text{(descarga de um capacitor).} \tag{27-40}$$

De acordo com a Eq. 27-40, a corrente também diminui exponencialmente com o tempo a uma taxa dada por τ. A corrente inicial i_0 é igual a q/RC. Observe que é possível encontrar o valor de i_0 simplesmente aplicando a regra das malhas ao circuito no instante $t = 0$; nesse instante o potencial inicial do capacitor, V_0, está aplicado à resistência R e, portanto, a corrente é dada por $i_0 = V_0/R = (q_0/C)/R = q_0/RC$. O sinal negativo da Eq. 27-40 pode ser ignorado; significa simplesmente que a carga q do capacitor está diminuindo.

Demonstração da Eq. 27-33

Para resolver a Eq. 27-32 começamos por escrever a equação na seguinte forma:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{27-41}$$

A solução geral dessa equação diferencial é da forma

$$q = q_p + Ke^{-at}, \tag{27-42}$$

onde q_p é uma *solução particular* da equação diferencial, K é uma constante a ser determinada a partir das condições iniciais e $a = 1/RC$ é o coeficiente de q na Eq. 27-41. Para determinar q_p, fazemos $dq/dt = 0$ na Eq. 27-41 (o que corresponde à situação final de equilíbrio), fazemos $q = q_p$ e resolvemos a equação, obtendo

$$q_p = C\mathscr{E}. \qquad (27\text{-}43)$$

Para determinar K, primeiro substituímos a Eq. 27-43 na Eq. 27-42 para obter

$$q = C\mathscr{E} + Ke^{-at}.$$

Em seguida, usando a condição inicial $q = 0$ em $t = 0$, obtemos

$$0 = C\mathscr{E} + K,$$

ou $K = -C\mathscr{E}$. Finalmente, com os valores de q_p, a e K inseridos, a Eq. 27-42 se torna

$$q = C\mathscr{E} - C\mathscr{E}e^{-t/RC},$$

que, com uma pequena modificação, é a Eq. 27-33.

TESTE 5 A tabela mostra quatro conjuntos de valores para os componentes do circuito da Fig. 27-15. Coloque os conjuntos em ordem de acordo (a) com a corrente inicial (com a chave na posição *a*) e (b) com o tempo necessário para que a corrente diminua para metade do valor inicial, começando pelo maior valor.

	1	2	3	4
$\mathscr{E}$ (V)	12	12	10	10
R (Ω)	2	3	10	5
C (μF)	3	2	0,5	2

Exemplo 27-5

Quando um carro está em movimento elétrons passam do piso para os pneus e dos pneus para a carroceria. O carro armazena essa carga em excesso como se a carroceria fosse uma das placas do capacitor e o piso a outra placa (Fig. 27-17*a*). Quando o carro pára descarrega o excesso de carga através dos pneus, da mesma forma que um capacitor se descarrega através de um resistor. Se um objeto condutor se aproxima do carro antes que esteja totalmente descarregado a diferença de potencial associada ao excesso de cargas pode produzir uma centelha entre o carro e o objeto. Suponha que o objeto condutor seja o bico de uma mangueira de combustível. Nesse caso, a centelha não inflamará o combustível, produzindo um incêndio, se sua energia foi menor que o valor crítico U_{fogo} = 50 mJ.

Quando o carro da Fig. 27-17*a* pára no instante $t = 0$ a diferença de potencial entre o carro e o piso é $V_0 = 30$ kV. A capacitância do sistema carro-piso é $C = 500$ pF, e a resistência de *cada* pneu é $R_{pneu} = 100$ GΩ. Quanto tempo é necessário para que a energia associada às cargas do carro caia abaixo do valor crítico U_{fogo}?

IDÉIAS-CHAVE (1) Em qualquer instante t a energia potencial elétrica U do capacitor está relacionada à carga armazenada q através da Eq. 25-21 ($U = q^2/2C$). (2) Quando um capacitor está se descarregando a carga diminui com o tempo de acordo com a Eq. 27-39 ($q = q_0e^{-t/RC}$).

Cálculos: Podemos tratar os pneus como resistores, com uma extremidade em contato com a carroceria do carro e a outra extremidade em contato com o piso. A Fig. 27-17*b* mostra os quatro resistores ligados em paralelo com a capacitância do carro, e a Fig. 27-17*c* mostra a resistência equivalente R dos quatro resistores. De acordo com a Eq. 27-24, a resistência R é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{pneu}} + \frac{1}{R_{pneu}} + \frac{1}{R_{pneu}} + \frac{1}{R_{pneu}},$$

ou
$$R = \frac{R_{pneu}}{4} = \frac{100 \times 10^9\,\Omega}{4} = 25 \times 10^9\,\Omega. \qquad (27\text{-}44)$$

Quando o carro pára, a carga em excesso é descarregada através de R.

Vamos agora usar as duas Idéias-chave para analisar a descarga. Substituindo a Eq. 27-39 na Eq. 25-21, obtemos

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{(q_0e^{-t/RC})^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\,e^{-2t/RC}. \qquad (27\text{-}45)$$

De acordo com a Eq. 25-1 ($q = CV$), podemos relacionar a carga inicial q_0 do carro à diferença de potencial V_0: $q_0 = CV_0$. Substituindo esta equação na Eq. 27-45, obtemos

$$U = \frac{(CV_0)^2}{2C}\,e^{-2t/RC} = \frac{CV_0^2}{2}\,e^{-2t/RC},$$

(a)

(b) (c) (d)

FIG. 27-17 (a) Um carro eletricamente carregado e o piso se comportam como um capacitor que pode se descarregar através dos pneus. (b) Circuito usado para modelar o capacitor carro-piso, com as resistências dos quatro pneus R_{pneu} ligadas em paralelo. (c) Resistência equivalente R dos pneus. (d) A energia potencial elétrica U do capacitor carro-piso diminui durante a descarga.

ou

$$e^{-2t/RC} = \frac{2U}{CV_0^2}. \qquad (27\text{-}46)$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os membros, obtemos:

$$-\frac{2t}{RC} = \ln\left(\frac{2U}{CV_0^2}\right),$$

ou

$$t = -\frac{RC}{2}\ln\left(\frac{2U}{CV_0^2}\right). \qquad (27\text{-}47)$$

Substituindo os valores conhecidos, descobrimos que o tempo que o carro leva para se descarregar até a energia $U_{fogo} = 50$ mJ é

$$t = -\frac{(25 \times 10^9\,\Omega)(500 \times 10^{-12}\,\text{F})}{2} \times \ln\left(\frac{2(50 \times 10^{-3}\,\text{J})}{(500 \times 10^{-12}\,\text{F})(30 \times 10^3\,\text{V})^2}\right)$$
$$= 9{,}4\ \text{s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Conclusão: Seria preciso esperar pelo menos 9,4 s para aproximar com segurança do automóvel o bico da mangueira de combustível. Esse tempo de espera seria inaceitável durante uma corrida; por isso, a borracha dos pneus dos carros de corrida é misturada com um material condutor (negro de fumo, por exemplo) para diminuir a resistência do pneu e assim reduzir o tempo de descarga. A Fig. 27-17*d* mostra a energia armazenada U em função do tempo t para resistências de 100 GΩ (o valor usado até agora nos cálculos) e 10 GΩ. Observe que com o valor menor da resistência dos pneus a energia chega muito mais depressa ao nível U_{fogo}.

REVISÃO E RESUMO

Força Eletromotriz Uma fonte de tensão realiza um trabalho sobre cargas elétricas para manter uma diferença de potencial entre seus terminais. Se dW é o trabalho realizado pela fonte para transportar uma carga positiva dq do terminal negativo para o terminal positivo, a **força eletromotriz** (trabalho por unidade de carga) da fonte é dada por

$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq} \quad \text{(definição de } \mathscr{E}\text{).} \qquad (27\text{-}1)$$

A unidade de força eletromotriz e de diferença de potencial no SI é o volt. Uma **fonte de tensão ideal** não possui resistência interna; a diferença de potencial entre seus terminais é igual à força eletromotriz. Uma **fonte de tensão real** possui resistência interna; a diferença de potencial entre seus terminais é igual à força eletromotriz apenas quando a corrente que a atravessa é zero.

Análise de Circuitos A variação de potencial quando atravessamos uma resistência R no sentido da corrente é $-iR$; a variação quando atravessamos a resistência no sentido oposto é $+iR$ (regra das resistências). A variação de potencial quando atravessamos uma fonte de tensão ideal do terminal negativo para o terminal positivo é $+\mathscr{E}$; a variação quando atravessamos a fonte no sentido oposto é $-\mathscr{E}$ (regra das fontes). A lei de conservação da energia leva à regra das malhas:

Regra das Malhas. *A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero.*

A lei de conservação das cargas leva à regra dos nós:

Regra dos Nós. *A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.*

Circuitos com uma Malha A corrente em um circuito com uma malha que contém uma única resistência R e uma fonte de tensão de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência r é dada por

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r}, \qquad (27\text{-}4)$$

que se reduz a $i = \mathscr{E}/R$ para uma fonte ideal, ou seja, com uma fonte com $r = 0$.

Potência Quando uma fonte de tensão real de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência r realiza trabalho sobre portadores de carga, fazendo uma corrente i atravessar a fonte, a potência P trans-

ferida para os portadores de carga é dada por

$$P = iV, \qquad (27\text{-}14)$$

onde V é a diferença de potencial entre os terminais da fonte. A potência P_r dissipada na fonte é dada por

$$P_r = i^2r. \qquad (27\text{-}16)$$

A potência P_{fem} fornecida pela fonte é dada por

$$P_{fem} = i\mathscr{E}. \qquad (27\text{-}17)$$

Resistências em Série Quando duas ou mais resistências estão ligadas em **série**, todas são percorridas pela mesma corrente. Resistências em série podem ser substituídas por uma resistência equivalente dada por

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j \quad \text{(n resistências em série).} \qquad (27\text{-}7)$$

Resistências em Paralelo Quando duas ou mais resistências estão ligadas em **paralelo**, todas são submetidas à mesma diferença de potencial. Resistências em paralelo podem ser substituídas por uma resistência equivalente dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \quad \text{(n resistências em paralelo).} \qquad (27\text{-}24)$$

Circuitos *RC* Quando uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ é aplicada a uma resistência R e uma capacitância C em série, como na Fig. 27-15 com a chave na posição a, a carga do capacitor aumenta com o tempo de acordo com a equação

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{(carregamento de um capacitor),} \qquad (27\text{-}33)$$

onde $C\mathscr{E} = q_0$ é a carga de equilíbrio (carga final) e $RC = \tau$ é a **constante de tempo capacitiva** do circuito. Durante o carregamento do capacitor a corrente é dada por

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \quad \text{(carregamento de um capacitor).} \qquad (27\text{-}34)$$

Quando um capacitor se descarrega através de uma resistência R, a carga do capacitor diminui com o tempo de acordo com a equação

$$q = q_0e^{-t/RC} \quad \text{(descarga de um capacitor).} \qquad (27\text{-}39)$$

Durante a descarga do capacitor a corrente é dada por

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \quad \text{(descarga de um capacitor).} \qquad (27\text{-}40)$$

PERGUNTAS

1 Para cada circuito da Fig. 27-18, responda se os resistores estão ligados em série, em paralelo ou nem em série nem em paralelo.

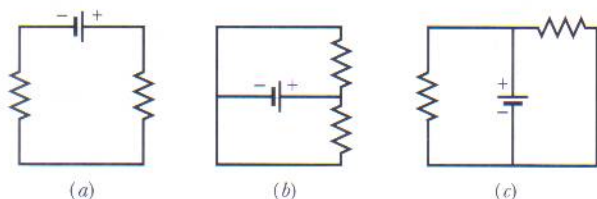



FIG. 27-18 Pergunta 1.

2 Na Fig. 27-19 um circuito é formado por uma fonte e dois resistores uniformes; a parte do circuito ao longo do eixo x é dividida em cinco segmentos iguais. (a) Suponha que $R_1 = R_2$ e coloque os segmentos na ordem do módulo do campo elétrico no interior, começando pelo maior. (b) Repita o item (a) supondo que $R_1 > R_2$. (c) Qual é o sentido do campo elétrico ao longo do eixo x?

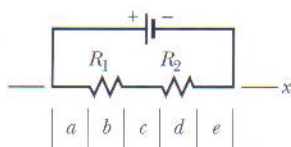



FIG. 27-19 Pergunta 2.

3 (a) Na Fig. 27-20a, com $R_1 > R_2$ a diferença de potencial entre os terminais de R_2 é maior, menor ou igual à diferença de potencial entre os terminais de R_1? (b) A corrente no resistor R_2 é maior, menor ou igual à corrente no resistor R_1?

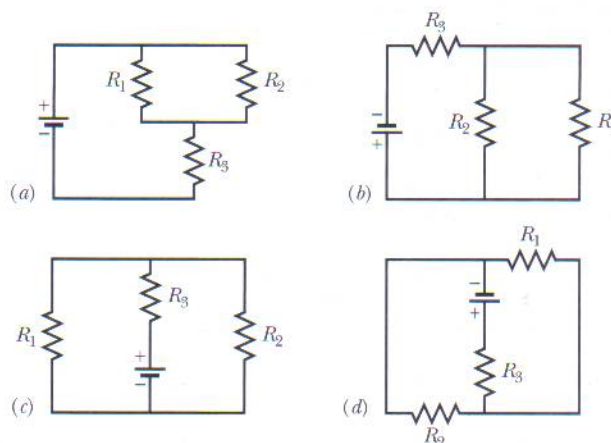



FIG. 27-20 Perguntas 3 e 4.

4 (a) Na Fig. 27-20a os resistores R_1 e R_3 estão em série? (b) Os resistores R_1 e R_2 estão em paralelo? (c) Coloque os quatro circuitos da Fig. 27-20 na ordem das resistências equivalentes, começando pela maior.

5 Os resistores R_1 e R_2, com $R_1 > R_2$, são ligados a uma fonte, primeiro separadamente, depois em série e finalmente em paralelo. Coloque esses arranjos na ordem da corrente na fonte, começando pela maior.

6 *Labirinto de capacitores.* Na Fig. 27-21 todos os capacitores têm uma capacitância de 6,0 μF e todas as fontes têm uma força eletromotriz de 10 V. Qual é a carga do capacitor C? (Se o leitor souber escolher a malha apropriada neste labirinto poderá responder à pergunta de cabeça em poucos segundos.)

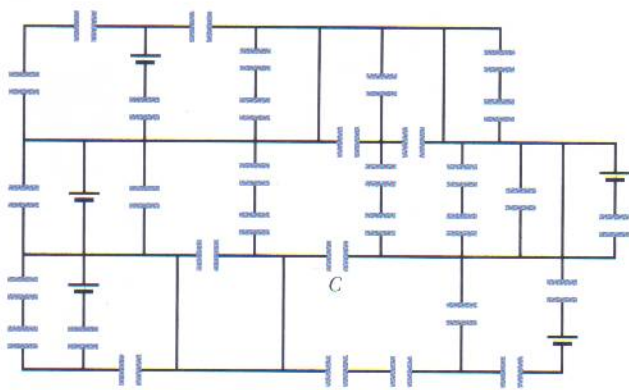



FIG. 27-21 Pergunta 6.

7 Inicialmente um único resistor R_1 é ligado a uma fonte ideal. Em seguida o resistor R_2 é ligado em paralelo com R_1. Quando o resistor R_2 é introduzido no circuito (a) a diferença de potencial entre os terminais de R_1 aumenta, diminui ou permanece a mesma? (b) A corrente em R_1 aumenta, diminui ou permanece a mesma? (c) A resistência equivalente R_{12} de R_1 e R_2 é maior, menor ou igual a R_1? (d) A corrente total em R_1 e R_2 juntos é maior, menor ou igual à corrente em R_1 antes da introdução de R_2?

8 *Labirinto de resistores.* Na Fig. 27-22 todos os resistores têm uma resistência de 4,0 Ω e todas as fontes (ideais) têm uma força eletromotriz de 4,0 V. Qual é a corrente no resistor R? (Se o leitor souber escolher a malha apropriada neste labirinto poderá responder à pergunta de cabeça em poucos segundos.)

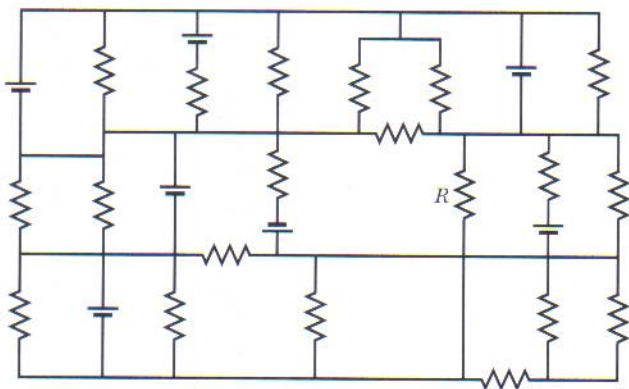



FIG. 27-22 Pergunta 8.

9 Inicialmente um único resistor R_1 é ligado a uma fonte ideal. Em seguida o resistor R_2 é ligado em série com R_1. Quando o resistor R_2 é introduzido no circuito (a) a diferença de potencial entre os terminais de R_1 aumenta, diminui ou permanece a mesma? (b) A corrente em R_1 aumenta, diminui ou permanece a mesma? (c) A resistência equivalente R_{12} de R_1 e R_2 é maior, menor ou igual a R_1?

10 Quando a chave da Fig. 27-15 é colocada na posição a uma corrente i passa a atravessar a resistência R. A Fig. 27-23 mostra a corrente i em função do tempo para quatro conjuntos de valores de R e da resistência C: (1) R_0 e C_0; (2) $2R_0$ e C_0; (3) R_0 e $2C_0$; (4) $2R_0$ e $2C_0$. Quais são as curvas correspondentes a cada conjunto?

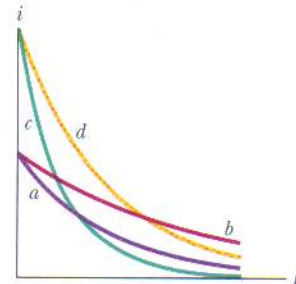



FIG. 27-23 Pergunta 10.

11 A Fig. 27-24 mostra três conjuntos de componentes que podem ser ligados alternadamente à mesma fonte através de uma chave como a da Fig. 27-15. Os resistores e capacitores são todos iguais. Coloque os conjuntos na ordem (a) da carga final do capacitor; (b) do tempo necessário para a carga do capacitor atingir metade da carga final, começando pelo maior valor.

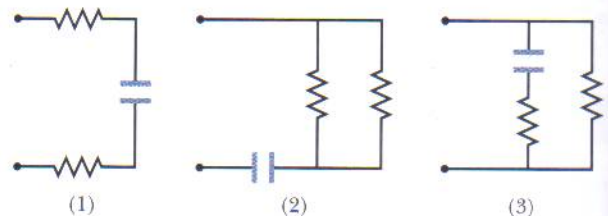



FIG. 27-24 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 27-6 Diferença de Potencial entre Dois Pontos

•1 Um fio com uma resistência de 5,0 Ω é ligado a uma bateria cuja força eletromotriz $\mathscr{E}$ é 2,0 V e cuja resistência interna é 1,0 Ω. Em 2,0 min, qual é (a) a energia química consumida pela bateria; (b) a energia dissipada pelo fio; (c) a energia dissipada pela bateria?

•2 Uma certa bateria de automóvel com uma força eletromotriz de 12,0 V tem uma carga inicial de 120 A · h. Supondo que a diferença de potencial entre os terminais permanece constante até a bateria se descarregar totalmente, durante quantas horas a bateria é capaz de fornecer uma potência de 100 W?

•3 Uma corrente de 5,0 A é estabelecida de um circuito durante 6,0 min por uma bateria recarregável com uma força eletromotriz de 6,0 V. Qual é a redução da energia química da bateria?

•4 Uma pilha comum de lanterna pode fornecer uma energia

da ordem de 2,0 W · h antes de se esgotar. (a) Se uma pilha custa $0,80, quanto custa manter acesa uma lâmpada de 100 W durante 8,0 h usando pilhas? (b) Quanto custa manter acesa a mesma lâmpada usando a eletricidade da tomada se o preço da energia elétrica é $0,06 por quilowatt-hora?

•5 Uma bateria de automóvel com uma força eletromotriz de 12 V e uma resistência interna de 0,040 Ω está sendo carregada com uma corrente de 50 A. Determine (a) a diferença de potencial V entre os terminais da bateria; (b) a potência P_r dissipada no interior da bateria; (c) a potência P_{fem} fornecida pela bateria. Se a bateria depois de carregada é usada para fornecer 50 A ao motor de arranque, determine (d) V; (e) P_r.

•6 Na Fig. 27-25 as fontes ideais têm forças eletromotrizes $\mathscr{E}_1 = 150$ V e $\mathscr{E}_2 = 50$ V, e os resistores têm resistências $R_1 = 3,0\ \Omega$ e $R_2 = 2,0\ \Omega$. Se o potencial no ponto P é tomado como sendo 100 V, qual é o potencial no ponto Q?

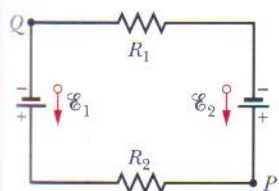



FIG. 27-25 Problema 6.

•7 Na Fig. 27-26 as fontes ideais têm forças eletromotrizes $\mathscr{E}_1 = 12$ V e $E_2 = 6,0$ V e os resistores têm resistências $R_1 = 4,0\ \Omega$ e $R_2 = 8,0\ \Omega$. Determine (a) a corrente no circuito; (b) a potência dissipada no resistor 1; (c) a potência dissipada no resistor 2; (d) a potência fornecida pela fonte 1; (e) a potência fornecida pela fonte 2. (f) A fonte 1 está fornecendo ou recebendo energia? (g) A fonte 2 está fornecendo ou recebendo energia?

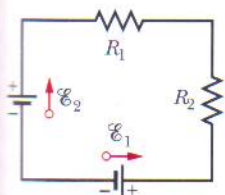



FIG. 27-26 Problema 7.

•8 A Fig. 27-27 mostra um conjunto de quatro resistores que faz parte de um circuito maior. O gráfico abaixo do circuito mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x ao longo do ramo inferior do conjunto, do qual faz parte o resistor 4; o potencial V_A é 12,0 V. O gráfico acima do circuito mostra o potencial elétrico $V(x)$ em função da posição x ao longo do ramo superior do conjunto, do qual fazem parte os resistores 1, 2 e 3; as diferenças de potencial são $\Delta V_B = 2,00$ V e $\Delta V_C = 5,00$ V. O resistor 3 tem uma resistência de 200 Ω. Determine a resistência (a) do resistor 1; (b) do resistor 2.

•9 Pretende-se obter uma resistência total de 3,00 Ω ligando uma resistência de valor desconhecido a uma resistência de 12,0 Ω. (a) Qual deve ser o valor da resistência desconhecida? (b) As duas resistências devem ser ligadas em série ou em paralelo?

•10 (a) Qual é o trabalho, em elétrons-volts, realizado por uma fonte ideal de 12 V sobre um elétron que passa do terminal positivo da fonte para o terminal negativo? (b) Se $3,40 \times 10^{18}$ elétrons passam pela fonte por segundo, qual é a potência da fonte em watts?

FIG. 27-27 Problema 8.

••11 *Descarga lateral.* A Fig. 27-28 ilustra uma das razões pelas quais é perigoso se abrigar debaixo de uma árvore durante uma tempestade elétrica. Se um relâmpago atinge a árvore, parte da descarga pode passar para a pessoa, especialmente se a corrente que atravessa a árvore atingir uma região seca da casca e, por isso, tiver que atravessar o ar para chegar ao solo. Na figura, parte do relâmpago atravessa uma distância d no ar e chega ao solo através da pessoa (que possui uma resistência desprezível em comparação com a do ar). O resto da corrente viaja pelo ar paralelamente ao tronco da árvore, percorrendo uma distância h. Se $d/h = 0,400$ e a corrente total é $I = 5000$ A, qual é o valor da corrente que atravessa a pessoa?

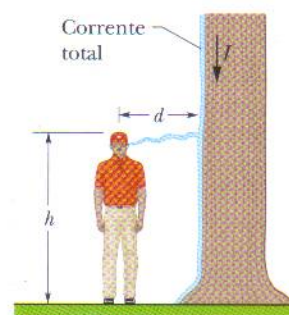



FIG. 27-28 Problema 11.

••12 (a) Na Fig. 27-29, qual deve ser o valor de R para que a corrente no circuito seja 1,0 mA? Sabe-se que $\mathscr{E}_1 = 2,0$ V, $\mathscr{E}_2 = 3,0$ V, $r_1 = r_2 = 3,0\ \Omega$. (b) Qual é a potência dissipada em R?

FIG. 27-29 Problema 12.

••**13** Na Fig. 27-30 o trecho AB do circuito dissipa uma potência de 50 W quando a corrente $i = 1{,}0$ A tem o sentido indicado. O valor da resistência R é 2,0 Ω. (a) Qual é a diferença de potencial entre A e B? O dispositivo X não possui resistência interna. (b) Qual é a força eletromotriz do dispositivo X? (c) O ponto B está ligado ao terminal positivo ou ao terminal negativo do dispositivo X?

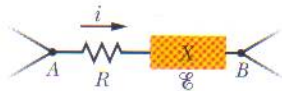



FIG. 27-30 Problema 13.

••**14** A Fig. 27-31 mostra uma fonte ligada a um resistor uniforme R_0. Um contato deslizante pode se deslocar ao longo do resistor do ponto $x = 0$, à esquerda, até o ponto $x = 10$ cm, à direita. O valor da resistência à esquerda e à direita do contato depende da posição do contato. Determine a potência dissipada no resistor R em função de x. Plote a função para $\mathscr{E} = 50$ V, $R = 2000$ Ω e $R_0 = 100$ Ω.

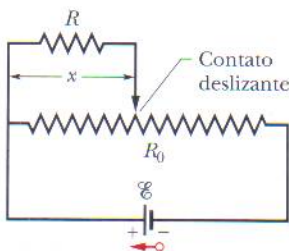



FIG. 27-31 Problema 14.

••**15** Um cabo subterrâneo de 10 km de comprimento está orientado na direção leste-oeste e é formado por dois fios paralelos, ambos com uma resistência de 13 Ω/km. Um defeito no cabo faz com que surja uma resistência efetiva R entre os fios a uma distância x da extremidade oeste (Fig. 27-32). Com isso, a resistência total dos fios passa a ser 100 Ω quando a medida é realizada na extremidade leste e 200 Ω quando a medida é realizada na extremidade oeste. Determine (a) o valor de x; (b) o valor de R.

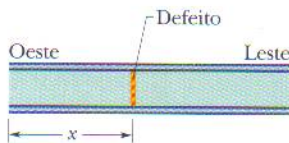



FIG. 27-32 Problema 15.

••**16** A fonte ideal da Fig. 27-33a tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 6{,}0$ V. A curva 1 da Fig. 27-33b mostra a diferença de potencial V entre os terminais do resistor 1 em função da corrente i no resistor. A escala do eixo vertical é definida por $V_s = 18{,}0$ V e a escala do eixo horizontal é definida por $i_s = 3{,}00$ mA. As curvas 2 e 3 são gráficos semelhantes para os resistores 2 e 3. Qual é a corrente no resistor 2?

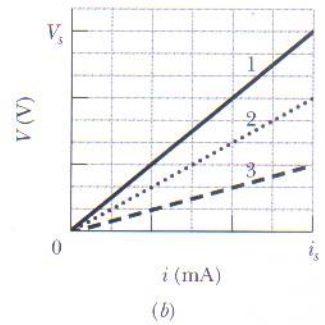
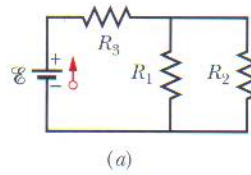



FIG. 27-33 Problema 16.

••**17** Na Fig. 27-34, $R_1 = 6{,}00$ Ω, $R_2 = 18{,}0$ Ω e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 12{,}0$ V. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da corrente i_1. (c) Qual é a energia total dissipada nos quatro resistores em 1,00 min?

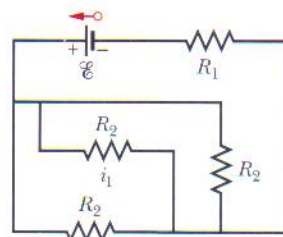



FIG. 27-34 Problema 17.

••**18** A Fig. 27-35 mostra um resistor de resistência $R = 6{,}00$ Ω ligado a uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V através de dois fios de cobre. Cada fio tem 20,0 cm de comprimento e 1,00 mm de raio. Neste capítulo desprezamos a resistência dos fios de ligação. Verifique se a aproximação é válida para o circuito da Fig. 27-35, determinando (a) a diferença de potencial entre as extremidades do resistor; (b) a diferença de potencial entre as extremidades de um dos fios; (c) a potência dissipada no resistor; (d) a potência dissipada em um dos fios.

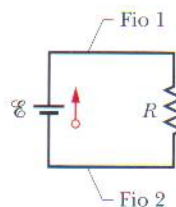



FIG. 27-35 Problema 18.

••**19** A corrente em um circuito com uma única malha e uma resistência R é 5,0 A. Quando uma resistência de 2,0 Ω é ligada em série com R, a corrente diminui para 4,0 A. Qual é o valor de R?

••**20** Na Fig. 27-36a as duas fontes têm uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 1{,}20$ V e a resistência externa R é um resistor variável. A Fig. 27-36b mostra as diferenças de potencial V entre os terminais das duas fontes em função de R: a curva 1 corresponde à fonte 1 e a curva 2 corresponde à fonte 2. A escala horizontal é definida por $R_s = 0{,}20$ Ω. Determine (a) a resistência interna da fonte 1; (b) a resistência interna da fonte 2.

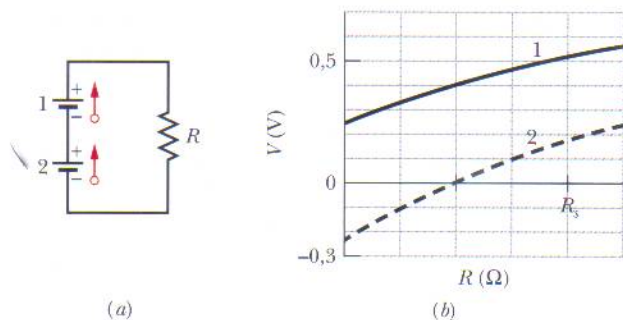



FIG. 27-36 Problema 20.

•••21 Na Fig. 27-37 a fonte 1 tem uma força eletromotriz $\mathscr{E}_1 = 12{,}0$ V e uma resistência interna $r_1 = 0{,}016\ \Omega$, e a fonte 2 tem uma força eletromotriz $\mathscr{E}_2 = 12{,}0$ V e uma resistência interna $r_1 = 0{,}012\ \Omega$. As fontes são ligadas em série com uma resistência externa R. (a) Qual é o valor de R para o qual a diferença de potencial entre os terminais de uma das fontes é zero? (b) Com qual das duas fontes isso acontece?

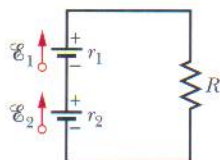



FIG. 27-37 Problema 21.

•••22 Uma célula solar produz uma diferença de potencial de 0,10 V quando um resistor de 500 Ω é ligado a seus terminais, e uma diferença de potencial de 0,15 V quando o valor do resistor é 1000 Ω. Determine (a) a resistência interna e (b) a força eletromotriz da célula solar. (c) A área da célula é 5,0 cm² e a potência luminosa recebida é 2,0 mW/cm². Qual é a eficiência da célula ao converter energia luminosa em energia térmica fornecida ao resistor de 1000 Ω?

seção 27-7 Circuitos com Mais de uma Malha

•23 Na Fig. 27-38, $R_1 = R_2 = 4{,}00\ \Omega$ e $R_3 = 2{,}50\ \Omega$. Determine a resistência equivalente entre os pontos D e E. (*Sugestão:* Imagine que entre os dois pontos é ligada uma fonte.)

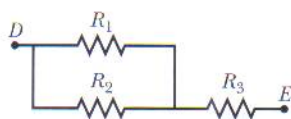



FIG. 27-38 Problema 23.

•24 Quando duas resistências 1 e 2 são ligadas em série, a resistência equivalente é 16,0 Ω. Quando são ligadas em paralelo, a resistência equivalente é 3,0 Ω. Determine (a) a menor; (b) a maior das duas resistências.

•25 Quatro resistores de 18,0 Ω são ligados em paralelo a uma fonte ideal de 25,0 V. Qual é a corrente na fonte?

•26 A Fig. 27-39 mostra cinco resistores de 5,00 Ω. Determine a resistência equivalente (a) entre os pontos F e H; (b) entre os pontos F e G. (*Sugestão:* Para cada par de pontos, imagine que entre os dois pontos é ligada uma fonte.)

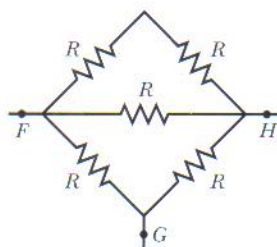



FIG. 27-39 Problema 26.

•27 Na Fig. 27-40, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$ e as fontes ideais têm forças eletromotrizes $\mathscr{E}_1 = 6{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 5{,}0$ V e $\mathscr{E}_3 = 4{,}0$ V. Determine (a) a corrente no resistor 1; (b) a corrente no resistor 2; (c) a diferença de potencial entre os pontos a e b.

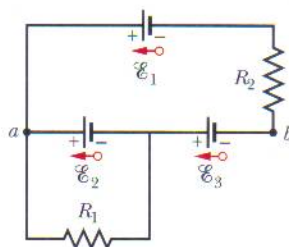



FIG. 27-40 Problema 27.

•28 Na Fig. 27-9, determine a diferença de potencial $V_d - V_c$ entre os pontos d e c se $\mathscr{E}_1 = 4{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 1{,}0$ V, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 5{,}0\ \Omega$ e a fonte é ideal.

•29 Nove fios de cobre de comprimento l e diâmetro d são ligados em paralelo para formar um cabo de resistência R. Qual deve ser o diâmetro D de um fio de cobre de comprimento l para que sua resistência seja a mesma do cabo?

••30 As resistências das Figs. 27-41*a* e 27-41*b* são todas de 6,0 Ω, e as fontes ideais são baterias de 12 V. (a) Quando a chave S da Fig. 27-41*a* é fechada, qual é a variação da diferença de potencial V_1 entre os terminais do resistor 1? (b) Quando a chave S da Fig. 27-41*b* é fechada, qual é a variação da diferença de potencial V_1 entre os terminais do resistor 1?

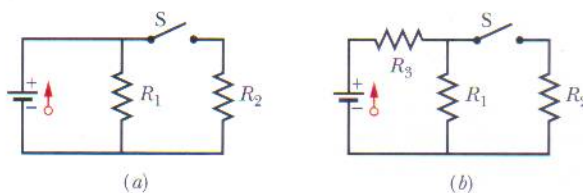



FIG. 27-41 Problema 30.

••31 Na Fig. 27-42 a corrente na resistência 6 é $i_6 = 1{,}40$ A e as resistências são $R_1 = R_2 = R_3 = 2{,}00\ \Omega$, $R_4 = 16{,}0\ \Omega$, $R_5 = 8{,}00\ \Omega$ e $R_6 = 4{,}00\ \Omega$. Qual é a força eletromotriz da fonte ideal?

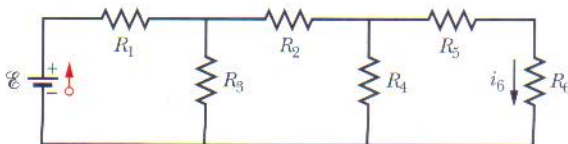



FIG. 27-42 Problema 31.

••**32** Na Fig. 27-43 as fontes ideais têm forças eletromotrizes $\mathscr{E}_1 = 10{,}0$ V e $\mathscr{E}_2 = 0{,}500\mathscr{E}_1$, e todas as resistências são de 4,00 Ω. Determine a corrente (a) na resistência 2; (b) na resistência 3.

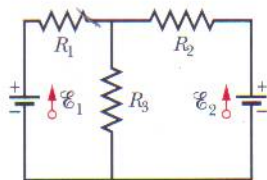



FIG. 27-43 Problemas 32, 43 e 98.

••**33** Na Fig. 27-44 as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 5{,}0$ V e $\mathscr{E}_2 = 12$ V, as resistências são de 2,0 Ω e o potencial é tomado como sendo zero no ponto do circuito ligado à terra. Determine os potenciais (a) V_1 e (b) V_2 nos pontos indicados.

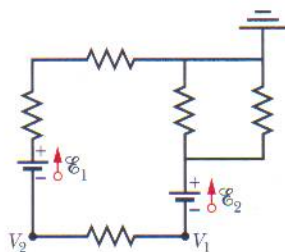



FIG. 27-44 Problema 33.

••**34** A Fig. 27-45 mostra uma parte de um circuito. As resistências são $R_1 = 2{,}0$ Ω, $R_2 = 4{,}0$ Ω e $R_3 = 6{,}0$ Ω, e a corrente indicada é $i = 6{,}0$ A. A diferença de potencial entre os pontos A e B que ligam o conjunto ao resto do circuito é $V_A - V_B = 78$ V. (a) O elemento representado como "?" está absorvendo energia do circuito ou cedendo energia ao circuito? (b) Qual é a potência absorvida ou fornecida pelo elemento desconhecido?

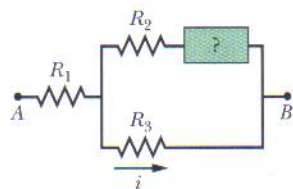



FIG. 27-45 Problema 34.

••**35** Na Fig. 27-46 $R_1 = 2{,}00$ Ω, $R_2 = 5{,}00$ Ω e a fonte é ideal. Qual é o valor de R_3 que maximiza a potência dissipada na resistência 3?

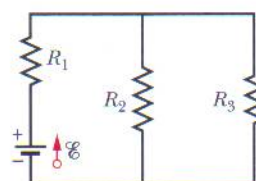



FIG. 27-46 Problemas 35, 99, 106 e 107.

••**36** As duas fontes da Fig. 27-47*a* são ideais. A força eletromotriz $\mathscr{E}_1$ da fonte 1 tem um valor fixo, mas a força eletromotriz $\mathscr{E}_2$ da fonte 2 pode assumir qualquer valor entre 1,0 V e 10 V. Os gráficos da Fig. 27-47*b* mostram as correntes nas duas fontes em função de $\mathscr{E}_2$. A escala vertical é definida por $i_s = 0{,}20$ A. Não se sabe de antemão que curva corresponde à fonte 1 e que curva corresponde à fonte 2, mas, para as duas curvas, a corrente é considerada negativa quando o sentido da corrente é do terminal positivo para o terminal negativo da bateria. Determine (a) o valor de $\mathscr{E}_1$; (b) o valor de R_1; (c) o valor de R_2.

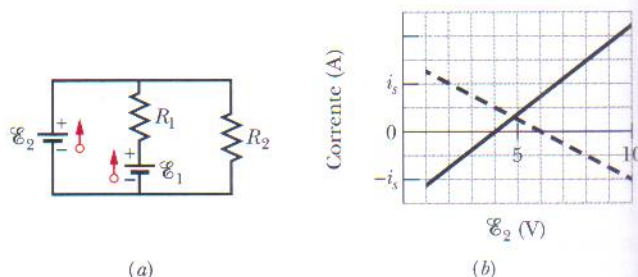



FIG. 27-47 Problema 36.

••**37** Na Fig. 27-48 as resistências são $R_1 = 1{,}0$ Ω e $R_2 = 2{,}0$ Ω, e as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 2{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 4{,}0$ V e $\mathscr{E}_3 = 4{,}0$ V. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da corrente na fonte 1; (c) o valor absoluto e (d) o sentido da corrente na fonte 2; (e) o valor absoluto e (f) o sentido da corrente na fonte 3; (g) a diferença de potencial $V_a - V_b$.

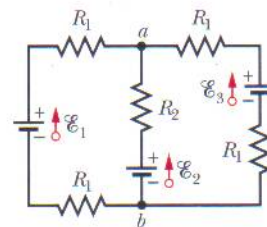



FIG. 27-48 Problema 37.

••**38** Na Fig. 27-49, $\mathscr{E}_1 = 6{,}00$ V, $\mathscr{E}_2 = 12{,}0$ V, $R_1 = 100$ Ω, $R_2 = 200$ Ω e $R_3 = 300$ Ω. Um ponto do circuito está ligado à terra ($V = 0$). Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da corrente na resistência 1; (c) o valor absoluto e (d) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da corrente na resistência 2; (e) o valor absoluto e (f) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da corrente na resistência 3. (g) Determine o potencial elétrico do ponto A.

FIG. 27-49 Problema 38.

••**39** Na Fig. 27-50 $\mathscr{E} = 12{,}0$ V, $R_1 = 2000$ Ω, $R_2 = 3000$ Ω e $R_3 = 4000$ Ω. Determine as diferenças de potencial (a) $V_A - V_B$; (b) $V_B - V_C$; (c) $V_C - V_D$; (d) $V_A - V_C$.

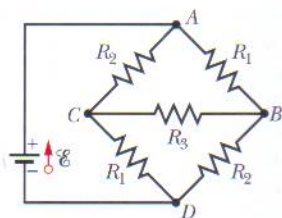



FIG. 27-50 Problema 39.

••40 Na Fig. 27-51 $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50{,}0\ \Omega$, $R_4 = 75{,}0\ \Omega$ e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 6{,}00$ V. (a) Determine a resistência equivalente. Determine a corrente (b) na resistência 1; (c) na resistência 2; (d) na resistência 3; (e) na resistência 4.

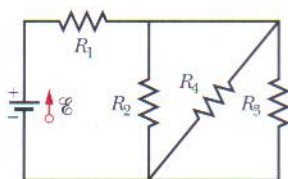



FIG. 27-51 Problemas 40 e 48.

••41 Na Fig. 27-52, duas fontes de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V e resistência interna $r = 0{,}300\ \Omega$ são ligadas em paralelo com uma resistência R. (a) Para que valor de R a potência dissipada no resistor é máxima? (b) Qual é o valor dessa potência máxima?

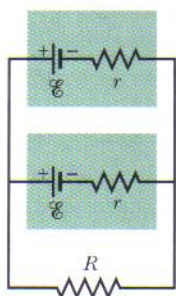



FIG. 27-52 Problemas 41 e 42.

••42 Duas fontes iguais de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V e resistência interna $r = 0{,}200\ \Omega$ podem ser ligadas a uma resistência R em paralelo (Fig. 27-52) ou em série (Fig. 27-53). Se $R = 2{,}00r$, qual é a corrente na resistência R (a) no caso da ligação em paralelo? (b) no caso da ligação em série? (c) Em que tipo de ligação a corrente na resistência R é maior? Se $R = r/2{,}00$, qual é a corrente na resistência R (d) no caso da ligação em paralelo; (e) no caso da ligação em série? (f) Em que tipo de ligação a corrente na resistência R é maior?

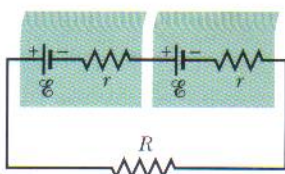



FIG. 27-53 Problema 42.

••43 Na Fig. 27-43, $\mathscr{E}_1 = 3{,}00$ V, $\mathscr{E}_2 = 1{,}00$ V, $R_1 = 4{,}00\ \Omega$, $R_2 = 2{,}00\ \Omega$, $R_3 = 5{,}00\ \Omega$ e as duas fontes são ideais. Determine a potência dissipada (a) em R_1; (b) em R_2; (c) em R_3. Determine a potência (d) da fonte 1; (e) da fonte 2.

••44 Na Fig. 27-54a, o resistor 3 é um resistor variável e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 12$ V. A Fig. 27-54b mostra a corrente i na fonte em função de R_3. A escala horizontal é definida por $R_{3s} = 20\ \Omega$. A curva tem uma assíntota de 2,0 mA para $R_3 \to \infty$. Determine (a) a resistência R_1; (b) a resistência R_2.

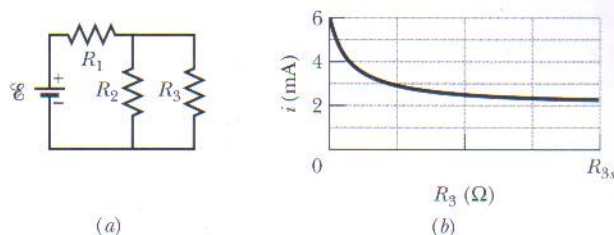



FIG. 27-54 Problema 44.

••45 O leitor dispõe de um suprimento de resistores de 10 Ω, capazes de dissipar apenas 1,0 W sem serem inutilizados. Qual é o número mínimo desses resistores que é preciso combinar em série ou em paralelo para obter uma resistência de 10 Ω capaz de dissipar 5,0 W?

••46 Na Fig. 27-55 um conjunto de n resistores em paralelo é ligado em série a um resistor e a uma fonte ideal. Todos os resistores têm a mesma resistência. Se um outro resistor de mesmo valor fosse ligado em paralelo com o conjunto, a corrente na fonte variaria de 1,25%. Qual é o valor de n?

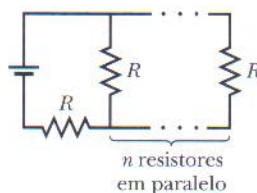



FIG. 27-55 Problema 46.

•••47 Um fio de cobre de raio $a = 0{,}250$ mm tem uma capa de alumínio de raio externo $b = 0{,}380$ mm. A corrente no fio composto é $i = 2{,}00$ A. Usando a Tabela 26-1, calcule a corrente (a) no cobre e (b) no alumínio. (c) Se uma diferença de potencial $V = 12{,}0$ V entre as extremidades mantém a corrente, qual é o comprimento do fio composto?

•••48 Na Fig. 27-51, $R_1 = 7{,}00\ \Omega$, $R_2 = 12{,}0\ \Omega$, $R_3 = 4{,}00\ \Omega$ e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 24{,}0$ V. Determine para que valor de R_4 a potência fornecida pela fonte aos resistores é igual (a) a 60,0 W; (b) ao maior valor possível $P_{máx}$; (c) ao menor valor possível $P_{mín}$. Determine (d) $P_{máx}$; (e) $P_{mín}$.

seção 27-8 O Amperímetro e o Voltímetro

••49 Na Fig. 27-14, suponha que $\mathscr{E} = 3{,}0$ V, $r = 100\ \Omega$, $R_1 = 250\ \Omega$ e $R_2 = 300\ \Omega$. Se a resistência do voltímetro R_V é 5,0 kΩ, que erro percentual o voltímetro introduz na medida da diferença de potencial entre os terminais de R_1? Ignore a presença do amperímetro.

••50 Um ohmímetro simples é construído ligando uma pilha de lanterna de 1,50 V em série com uma resistência R e um amperí-

metro capaz de medir correntes entre 0 e 1,00 mA, como mostra a Fig. 27-56. A resistência R é ajustada de tal forma que quando os fios de prova são encostados um no outro o ponteiro mostra o valor de 1,00 mA, que corresponde à deflexão máxima. Determine o valor da resistência externa que, quando colocada em contato com os fios de prova, provoca uma deflexão do ponteiro do amperímetro de (a) 10,0%; (b) 50,0%; (c) 90,0% da deflexão máxima. (d) Se o amperímetro tem uma resistência de 20,0 Ω e a resistência interna da fonte é desprezível, qual é o valor de R?

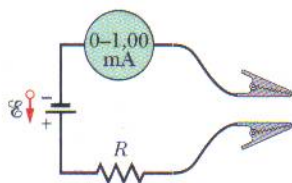



FIG. 27-56 Problema 50.

••51 (a) Na Fig. 27-57, determine a leitura do amperímetro para $\mathscr{E} = 5{,}0$ V (fonte ideal), $R_1 = 2{,}0\ \Omega$, $R_2 = 4{,}0\ \Omega$ e $R_3 = 6{,}0\ \Omega$. (b) Mostre que se a fonte for colocada na posição do amperímetro e vice-versa, a leitura do amperímetro será a mesma.

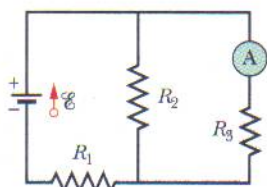



FIG. 27-57 Problema 51.

••52 Quando os faróis de um automóvel são acesos um amperímetro em série com os faróis indica 10,0 A e um voltímetro em paralelo com os faróis indica 12,0 V (Fig. 27-58). Quando o motor de arranque é acionado a leitura do amperímetro cai para 8,00 A e a luz dos faróis fica mais fraca. Se a resistência interna da bateria é 0,0500 Ω e a do amperímetro é desprezível, determine (a) a força eletromotriz da bateria; (b) a corrente no motor de arranque quando os faróis estão acesos.

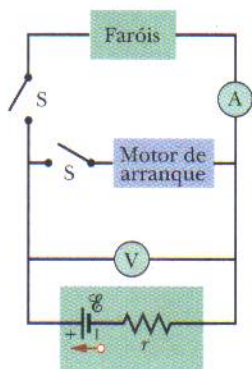



FIG. 27-58 Problema 52.

••53 Na Fig. 27-59 um voltímetro de resistência $R_V = 300\ \Omega$ e um amperímetro de resistência $R_A = 3{,}00\ \Omega$ estão sendo usados para medir uma resistência R em um circuito que também contém uma resistência $R_0 = 100\ \Omega$ e uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V. A resistência R é dada por $R = V/i$, onde V é a diferença de potencial entre os terminais de R e i é a leitura do amperímetro. A leitura do voltímetro é V', que é a soma de V com a diferença de potencial entre os terminais do amperímetro. Assim, a razão entre as leituras dos dois medidores não é R, e sim a resistência *aparente* $R' = V'/i$. Se $R = 85{,}0\ \Omega$, determine (a) a leitura do amperímetro; (b) a leitura do voltímetro; (c) o valor de R'. (d) Se R_A diminui, a diferença entre R' e R aumenta, diminui ou permanece a mesma?

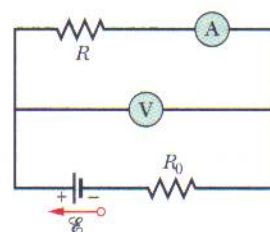



FIG. 27-59 Problema 53.

••54 Na Fig. 27-60 $R_1 = 2{,}00R$, a resistência do amperímetro é desprezível e a fonte é ideal. A corrente no amperímetro corresponde a que múltiplo de $\mathscr{E}/R$?

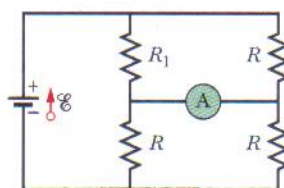



FIG. 27-60 Problema 54.

••55 Na Fig. 27-61 o valor de R_s pode ser ajustado através de um contato deslizante até que os potenciais dos pontos a e b sejam iguais. (Um teste para verificar se essa condição foi satisfeita é ligar temporariamente um amperímetro sensível entre os pontos a e b; se os potenciais dos dois pontos forem iguais, a indicação do amperímetro será zero.) Mostre que quando essa condição é satisfeita $R_x = R_s R_2/R_1$. Uma resistência desconhecida (R_x) pode ser medida em termos de uma resistência de referência (R_s) usando esse circuito, conhecido como ponte de Wheatstone.

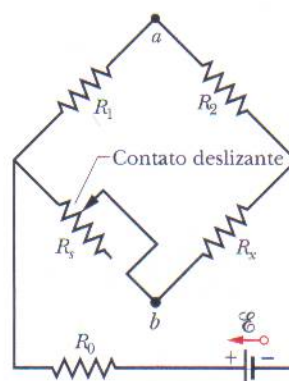



FIG. 27-61 Problemas 55 e 111.

••56 Na Fig. 27-62 um voltímetro de resistência $R_V = 300\ \Omega$ e um amperímetro de resistência $R_A = 3{,}00\ \Omega$ estão sendo usados para medir uma resistência R em um circuito que também contém uma resistência $R_0 = 100\ \Omega$ e uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V. A resistência R é dada por $R = V/i$, onde V é a leitura do voltímetro e i é a corrente na resistência R. Entretanto, a leitura do amperímetro não é i, e sim i', que é a soma de i com a corrente no voltímetro. Assim, a razão entre as leituras dos dois medidores não é R, e sim a resistência *aparente* $R' = V/i'$. Se $R = 85{,}0\ \Omega$, determine (a) a leitura do amperímetro; (b) a leitura do voltímetro; (c) o valor de R'. (d) Se R_V aumenta, a diferença entre R' e R aumenta, diminui ou permanece a mesma?

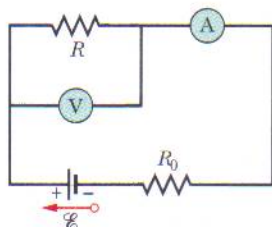



FIG. 27-62 Problema 56.

seção 27-9 Circuitos *RC*

•57 Que múltiplo da constante de tempo τ é o tempo necessário para que um capacitor inicialmente descarregado em um circuito *RC* série seja carregado com 99,0% da carga final?

•58 Um capacitor com uma carga inicial q_0 é descarregado através de um resistor. Que múltiplo da constante de tempo τ é o tempo necessário para que o capacitor descarregue (a) um terço da carga inicial; (b) dois terços da carga inicial?

•59 Um resistor de 15,0 kΩ e um capacitor são ligados em série, e uma diferença de potencial de 12,0 V é aplicada bruscamente ao conjunto. A diferença de potencial entre os terminais do capacitor aumenta para 5,00 V em 1,30 μs. (a) Calcule a constante de tempo do circuito. (b) Determine a capacitância C do capacitor.

•60 Em um circuito *RC* série, $\mathscr{E} = 12{,}0$ V, $R = 1{,}40$ MΩ e $C = 1{,}80\ \mu$F. (a) Calcule a constante de tempo. (b) Determine a carga máxima que o capacitor pode receber ao ser carregado. (c) Quanto tempo é necessário para que a carga do capacitor atinja o valor de 16,0 μC?

•61 A chave S da Fig. 27-63 é fechada no instante $t = 0$, fazendo com que um capacitor inicialmente descarregado de capacitância $C = 15{,}0\ \mu$F comece a se carregar através de um resistor de resistência $R = 20{,}0\ \Omega$. Em que instante a diferença de potencial entre os terminais do capacitor é igual à diferença de potencial entre os terminais do resistor?

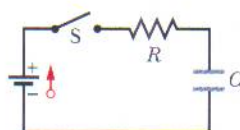



FIG. 27-63 Problemas 61 e 76.

••62 Um capacitor com uma diferença de potencial inicial de 100 V começa a ser descarregado através de um resistor quando uma chave é fechada no instante $t = 0$. No instante $t = 10{,}0$ s a diferença de potencial no capacitor é 1,00 V. (a) Qual é a constante de tempo do circuito? (b) Qual é a diferença de potencial no capacitor no instante $t = 17{,}0$ s?

••63 A diferença de potencial entre as placas de um capacitor de 2,0 μF com fuga (o que significa que há uma passagem de carga de uma placa para a outra) diminui para um quarto do valor inicial em 2,0 s. Qual é a resistência equivalente entre as placas do capacitor?

••64 Um capacitor de 1,0 μF com uma energia inicial armazenada de 0,50 J é descarregado através de um resistor de 1,0 MΩ. (a) Qual é a carga inicial do capacitor? (b) Qual é a corrente no resistor quando a descarga começa? Escreva expressões que permitam calcular, em função do tempo t, (c) a diferença de potencial V_C no capacitor, (d) a diferença de potencial V_R no resistor e (e) a potência P_R dissipada pelo resistor.

••65 No circuito da Fig. 27-64, $\mathscr{E} = 1{,}2$ kV, $C = 6{,}5\ \mu$F e $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}73$ MΩ. Com o capacitor C totalmente descarregado, a chave S é fechada bruscamente no instante $t = 0$. Determine, para o instante $t = 0$, (a) a corrente i_1 no resistor 1; (b) a corrente i_2 no resistor 2; (c) a corrente i_3 no resistor 3. Determine, para $t \to \infty$ (ou seja, após várias constantes de tempo), (d) i_1, (e) i_2, (f) i_3. Determine a diferença de potencial V_2 no resistor 2 (g) em $t = 0$ e (h) para $t \to \infty$. (i) Faça um esboço do gráfico de V_2 em função de t no intervalo entre esses dois instantes extremos.

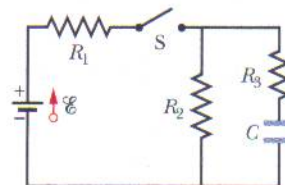



FIG. 27-64 Problema 65.

••66 A Fig. 27-65 mostra o circuito de uma lâmpada piscante como as que são usadas nas obras de estrada. Uma lâmpada fluorescente L (de capacitância desprezível) é ligada em paralelo com o capacitor C de um circuito *RC*. Existe uma corrente na lâmpada apenas quando a diferença de potencial aplicada à lâmpada atinge a tensão de ruptura V_L; nesse instante, o capacitor se descarrega totalmente através da lâmpada, e a lâmpada fica acesa por alguns momentos. Para uma lâmpada com uma tensão de ruptura $V_L = 72{,}0$ V, ligada a uma bateria ideal de 95,0 V e a um capacitor de 0,150 μF, qual deve ser o valor da resistência R para que a lâmpada pisque duas vezes por segundo?

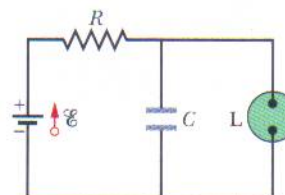



FIG. 27-65 Problema 66.

••67 Na Fig. 27-66 $R_1 = 10{,}0$ kΩ, $R_2 = 15{,}0$ kΩ, $C = 0{,}400\ \mu$F e a bateria ideal tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 20{,}0$ V. Primeiro, a chave é mantida por um longo tempo na posição fechada, até que seja atingido o regime estacionário. Em seguida a chave é aberta no instante $t = 0$. Qual é a corrente no resistor 2 no instante $t = 4{,}00$ ms?

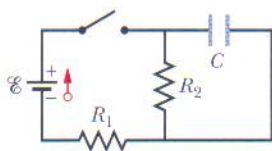



FIG. 27-66 Problemas 67 e 97.

•••68 A Fig. 27-67 mostra dois circuitos com um capacitor carregado que pode ser descarregado através de um resistor quando uma chave é fechada. Na Fig. 27-67*a*, $R_1 = 20{,}0\ \Omega$ e $C_1 = 5{,}00\ \mu$F. Na Fig. 27-67*b*, $R_2 = 10{,}0\ \Omega$ e $C_2 = 8{,}00\ \mu$F. A razão entre as cargas iniciais dos dois capacitores é $q_{02}/q_{01} = 1{,}50$. No instante $t = 0$, as duas chaves são fechadas. Em que instante t os dois capacitores possuem a mesma carga?

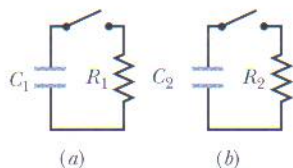



FIG. 27-67 Problema 68.

•••69 Um resistor de 3,00 MΩ e um capacitor de 1,00 μF são ligados em série com uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$ = 4,00 V. Depois de transcorrido 1,00 s, determine (a) a taxa de aumento da carga do capacitor; (b) a taxa de armazenamento de energia no capacitor; (c) a taxa de dissipação de energia no capacitor; (d) a taxa de fornecimento de energia pela fonte.

Problemas Adicionais

70 Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da corrente i na Fig. 27-68, onde todas as resistências são de 4,0 Ω e todas as fontes são ideais e têm uma força eletromotriz de 10 V. (*Sugestão:* Este problema pode ser resolvido de cabeça.)

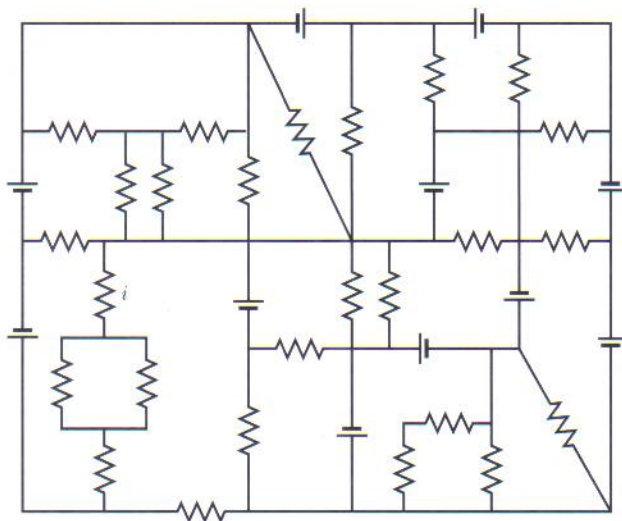



FIG. 27-68 Problema 70.

71 Suponha que enquanto você está sentado em uma cadeira a separação de cargas entre a sua roupa e a cadeira faz com que seu corpo fique a um potencial de 200 V, com uma capacitância de 150 pF entre você e a cadeira. Quando você se levanta o aumento da distância entre seu corpo e a cadeira faz a capacitância diminuir para 10 pF. (a) Qual é o novo valor do potencial do seu corpo? Esse potencial diminui com o tempo, pois a carga tende a se escoar através dos seus sapatos (você é um capacitor que está se descarregando através de uma resistência). Suponha que a resistência efetiva para essa descarga é de 300 GΩ. Se você tocar um componente enquanto o seu potencial é maior que 100 V o componente poderá ficar inutilizado. (b) Quanto tempo você deve esperar para que o potencial do seu corpo chegue ao nível seguro de 100 V?

Se você usar uma pulseira condutora em contato com a terra seu potencial não aumentará tanto quando você se levantar; além disso, a descarga será mais rápida, pois a resistência da ligação à terra será menor que a dos sapatos. (c) Suponha que no momento em que você se levanta o potencial do seu corpo é de 1400 V e que a capacitância entre o seu corpo e a cadeira é de 10 pF. Qual deve ser a resistência entre a pulseira e a terra para que o seu corpo chegue ao potencial de 100 V em 0,30 s, ou seja, em um tempo menor que o que você levaria para tocar, digamos, em um computador?

72 A Fig. 27-69 mostra o circuito do indicador de combustível usado nos automóveis. O indicador (instalado no painel) tem uma resistência de 10 Ω. No tanque de gasolina existe uma bóia ligada a um resistor variável cuja resistência varia linearmente com o volume de combustível. A resistência é de 140 Ω quando o tanque está cheio e 20 Ω quando o tanque está vazio. Determine a corrente no circuito (a) quando o tanque está vazio; (b) quando o tanque está pela metade; (c) quando o tanque está vazio. Considere a bateria como uma fonte ideal.

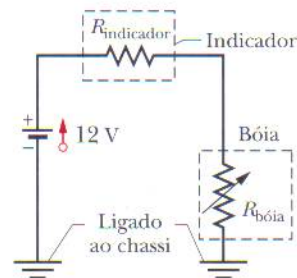



FIG. 27-69 Problema 72.

73 O controlador de um jogo de fliperama é formado por um resistor variável em paralelo com um capacitor de 0,220 μF. O capacitor é carregado com 5,00 V e descarregado através do resistor. O tempo para que a diferença de potencial entre as placas do capacitor diminua para 0,800 V é medido por um relógio que faz parte do jogo. Se a faixa útil de tempos de descarga vai de 10,0 μs a 6,00 ms, qual deve ser (a) o menor valor e (b) o maior valor da resistência do resistor?

74 (a) Na Fig. 27-4*a*, mostre que a potência dissipada em R é máxima para $R = r$. (b) Mostre que essa potência máxima é $P = \mathscr{E}^2/4r$.

75 Os fios A e B, ambos com 40,0 m de comprimento e 2,60 mm de diâmetro, são ligados em série. Uma diferença de potencial de 60,0 V é aplicada às extremidades do fio composto. As resistências são $R_A = 0{,}127\ \Omega$ e $R_B = 0{,}729\ \Omega$. Para o fio A, determine (a)

o módulo J da densidade de corrente e (b) a diferença de potencial V. (c) De que material é feito o fio A (veja a Tabela 26-1)? Para o fio B, determine (d) J e (e) V. (f) De que material é feito o fio B?

76 A Fig. 27-63 mostra uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12$ V, um resistor de resistência $R = 4{,}0\ \Omega$ e um capacitor descarregado de capacitância $C = 4{,}0\ \mu$F. Se a chave S é fechada, qual é a corrente no resistor no instante em que a carga do capacitor é $8{,}0\ \mu$C?

77 O motor de arranque de um automóvel está girando muito devagar, e o mecânico não sabe se o problema está no motor, no cabo ou na bateria. De acordo com o manual, a resistência interna da bateria de 12 V não deveria ser maior que $0{,}020\ \Omega$, a resistência do motor não deveria ultrapassar $0{,}200\ \Omega$ e a resistência do cabo não deveria ser maior que $0{,}040\ \Omega$. O mecânico liga o motor e mede 11,4 V entre os terminais da bateria, 3,0 V entre as extremidades do cabo e uma corrente de 50 A. Qual é o componente defeituoso?

78 A Fig. 27-70 mostra uma parte de um circuito através da qual está passando uma corrente $I = 6{,}00$ A. As resistências são $R_1 = R_2 = 2{,}00R_3 = 2{,}00R_4 = 4{,}00\ \Omega$. Qual é a corrente i_1 no resistor 1?

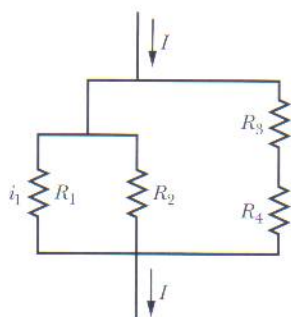



FIG. 27-70 Problema 78.

79 Na Fig. 27-71, $R_1 = 20{,}0\ \Omega$, $R_2 = 10{,}0\ \Omega$ e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 120$ V. Determine a corrente no ponto a (a) com apenas a chave S_1 fechada; (b) com apenas as chaves S_1 e S_2 fechadas; (c) com as três chaves fechadas.

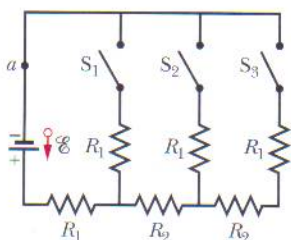



FIG. 27-71 Problema 79.

80 Na Fig. 27-72, as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 20{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 10{,}0$ V, $\mathscr{E}_3 = 5{,}00$ V e $\mathscr{E}_4 = 5{,}00$ V; todas as resistências são de $2{,}00\ \Omega$. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da corrente i; (c) o valor absoluto e (d) o sentido da corrente i_2. (Os quatro itens podem ser respondidos de cabeça.) (e) Qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 4? (f) A fonte 4 fornece ou absorve energia?

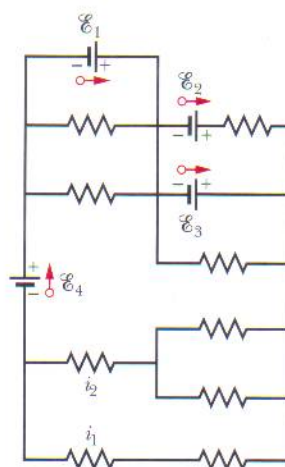



FIG. 27-72 Problema 80.

81 Na Fig. 27-73 $R = 10\ \Omega$. Qual é a resistência equivalente entre os pontos A e B? (*Sugestão:* Imagine que os pontos A e B estão ligados a uma fonte.)

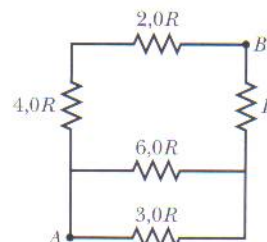



FIG. 27-73 Problema 81.

82 Na Fig. 27-74 a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 30{,}0$ V e as resistências são $R_1 = R_2 = 14\ \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 6{,}0\ \Omega$, $R_6 = 2{,}0\ \Omega$ e $R_7 = 1{,}5\ \Omega$. Determine (a) i_2; (b) i_4; (c) i_1; (d) i_3; (e) i_5.

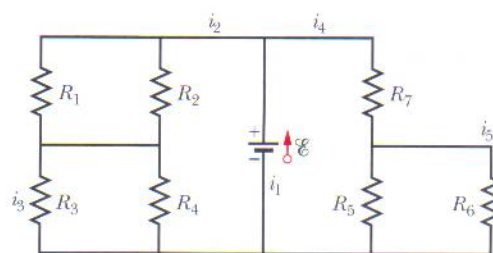



FIG. 27-74 Problema 82.

83 Na Fig. 27-75 as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 12{,}0$ V e $\mathscr{E}_2 = 4{,}00$ V e as resistências são todas de $4{,}00\ \Omega$. Determine (a) o valor absoluto de i_1; (b) o sentido (para cima ou para baixo) de i_1; (c) o valor absoluto de i_2; (d) o sentido de i_2. (e) A fonte 1 fornece ou absorve energia? (f) Qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 1? (g) a fonte 2 fornece ou absorve energia? (h) qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 2?

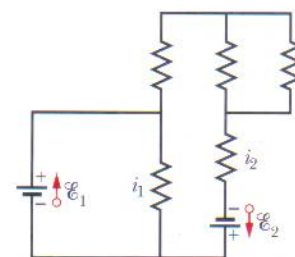



FIG. 27-75 Problema 83.

84 Na Fig. 27-76 as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 20{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 10{,}0$ V e $\mathscr{E}_3 = 5{,}00$ V, e as resistências são todas de 2,00 Ω. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para a direita ou para a esquerda) da corrente i_1. (c) A fonte 1 fornece ou absorve energia? (d) Qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 1? (e) A fonte 2 fornece ou absorve energia? (f) Qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 2? (g) A fonte 3 fornece ou absorve energia? (h) Qual é a potência fornecida ou absorvida pela fonte 3?

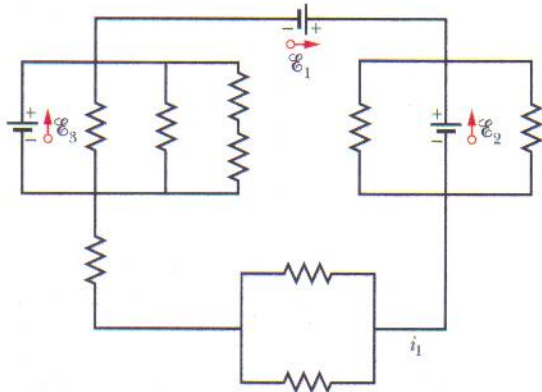



FIG. 27-76 Problema 84.

85 Para fabricar um resistor cuja resistência varie muito pouco com a temperatura pode-se utilizar uma combinação em série de um resistor de silício com um resistor de ferro. Se a resistência total desejada é 1000 Ω e a temperatura de referência é 20°C, determine a resistência (a) do resistor de silício; (b) do resistor de ferro. (*Sugestão:* Consulte a Tabela 26-1.)

86 Na Fig. 27-77 uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 12{,}0$ V é ligada a um conjunto de resistores $R_1 = 6{,}00$ Ω, $R_2 = 12{,}0$ Ω, $R_3 = 4{,}00$ Ω, $R_4 = 3{,}00$ Ω e $R_5 = 5{,}00$ Ω. Qual é a diferença de potencial entre os terminais da resistência 5?

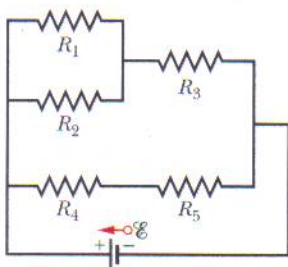



FIG. 27-77 Problema 86.

87 Pretende-se dissipar uma potência de 10 W em um resistor de 0,10 Ω ligando o resistor a uma fonte cuja força eletromotriz é 1,5 V. (a) Qual deve ser a diferença de potencial aplicada ao resistor? (b) Qual deve ser a resistência interna da fonte?

88 A Fig. 27-78 mostra três resistores de 20,0 Ω. Determine a resistência equivalente (a) entre os pontos A e B; (b) entre os pontos A e C; (c) entre os pontos B e C. (*Sugestão:* Imagine que uma fonte é ligada entre os pontos indicados.)

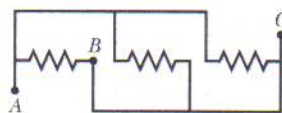



FIG. 27-78 Problema 88.

89 O circuito da Fig. 27-79 mostra um capacitor, duas fontes ideais, dois resistores e uma chave S. Inicialmente, a chave S permaneceu aberta por um longo tempo. Se a chave é fechada e permanece nessa posição por um longo tempo, qual é a variação da carga do capacitor? Suponha que $C = 10\ \mu$F, $\mathscr{E}_1 = 1{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 3{,}0$ V, $R_1 = 0{,}20$ Ω e $R_2 = 0{,}40$ Ω.

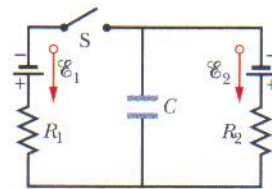



FIG. 27-79 Problema 89.

90 Na Fig. 27-8*a*, calcule a diferença de potencial entre a e c considerando o percurso que envolve R, r_1 e $\mathscr{E}$.

91 Na Fig. 27-5*a*, determine a diferença de potencial em R_2 para $\mathscr{E} = 12$ V, $R_1 = 3{,}0$ Ω, $R_2 = 4{,}0$ Ω e $R_3 = 5{,}0$ Ω.

92 Na Fig. 27-14, suponha que $\mathscr{E} = 5{,}0$ V, $r = 2{,}0$ Ω, $R_1 = 5{,}0$ Ω e $R_2 = 4{,}0$ Ω. Se a resistência do amperímetro R_A é 0,10 Ω, que erro percentual essa resistência introduz na medida da corrente? Ignore a presença do voltímetro.

93 Uma linha de transmissão de 120 V é protegida por um fusível de 15 A. Qual é o número máximo de lâmpadas de 500 W que podem ser ligadas em paralelo nessa linha sem queimar o fusível?

94 Na Fig. 27-80, $R_1 = 5{,}00$ Ω, $R_2 = 10{,}0$ Ω, $R_3 = 15{,}0$ Ω, $C_1 = 5{,}00\ \mu$F, $C_2 = 10{,}0\ \mu$F e a fonte ideal tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 20{,}0$ V. Supondo que o circuito se encontra no regime estacionário, qual é a energia total armazenada nos dois capacitores?

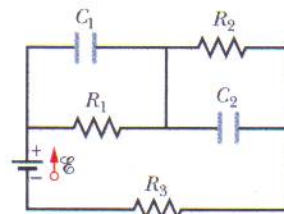



FIG. 27-80 Problema 94.

95 Um capacitor C inicialmente descarregado é carregado totalmente por uma fonte de força eletromotriz constante $\mathscr{E}$ ligada em série com um resistor R. (a) Mostre que a energia final armazenada no capacitor é igual à metade da energia fornecida pela fonte. (b) Integrando o produto i^2R no intervalo de carregamento, mostre que a energia térmica dissipada pelo resistor também é igual à metade da energia fornecida pela fonte.

96 Dois resistores, R_1 e R_2, podem ser ligados em paralelo ou em série entre os terminais de uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E}$. Estamos interessados em que a potência dissipada pela combinação dos resistores em paralelo seja cinco vezes maior que a potência dissipada pela combinação dos resistores em série. Se $R_1 = 100$ Ω, determine (a) o menor e (b) o maior dos dois valores de R_2 que satisfazem a essa condição.

97 Na Fig. 27-66 a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 30$ V, as resistências são $R_1 = 20$ kΩ e $R_2 = 10$ kΩ e o capacitor está descarregado. Quando a chave é fechada no instante $t = 0$, de-

termine a corrente (a) na resistência 1 e (b) na resistência 2. (c) Depois de transcorrido um longo tempo, qual é a corrente na resistência 2?

98 Na Fig. 27-43 $R_1 = 10,0\ \Omega$, $R_2 = 20,0\ \Omega$ e as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 20,0$ V e $\mathscr{E}_2 = 50,0$ V. Qual deve ser o valor de R_3 para que a corrente na fonte 1 seja zero?

99 Na Fig. 27-46 $R_1 = R_2 = 10,0\ \Omega$ e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 12,0$ V. (a) Determine o valor de R_3 que maximiza a potência fornecida pela fonte; (b) determine o valor dessa potência.

100 Cada uma das seis fontes reais da Fig. 27-81 possui uma força eletromotriz de 20 V e uma resistência de 4,0 Ω. (a) Qual é a corrente na resistência (externa) $R = 4,0\ \Omega$? (b) Qual é diferença de potencial entre os terminais de uma das fontes? (c) Qual é a potência fornecida por uma das fontes? (d) Qual é a potência dissipada na resistência interna de uma das fontes?

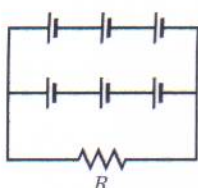



FIG. 27-81 Problema 100.

101 N fontes iguais de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência interna r podem ser ligadas em série (Fig. 27-82*a*) ou em paralelo (Fig. 27-82*b*), e o conjunto ligado a uma resistência R. Mostre que a corrente na resistência R é mesma nos dois arranjos se $R = r$.

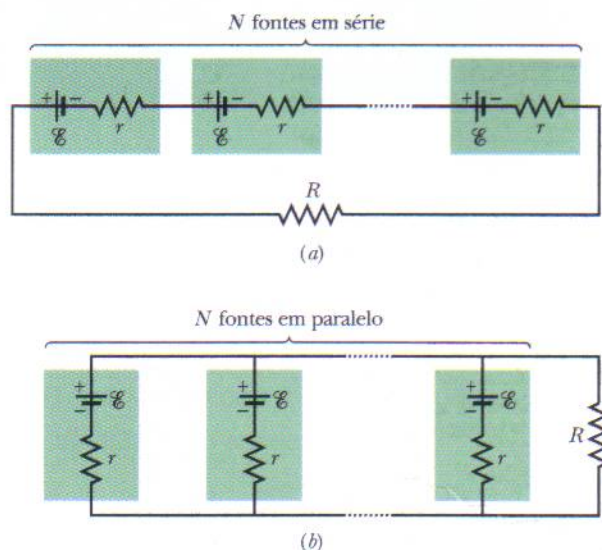



FIG. 27-82 Problema 101.

102 A tabela a seguir mostra a diferença de potencial V_T entre os terminais de uma fonte para vários valores da corrente i fornecida pela fonte. (a) Escreva uma equação que represente a relação entre V_T e i. Entre com os números da tabela em uma calculadora científica e execute uma regressão linear para determinar a reta de V_T em função de i que melhor se ajusta aos pontos dados. Use os resultados da regressão para determinar (b) a força eletromotriz da fonte; (c) a resistência interna da fonte.

i (A):	50,0	75,0	100	125	150	175	200
V_T (V):	10,7	9,00	7,70	6,00	4,80	3,00	1,70

103 Na Fig. 27-83 $\mathscr{E}_1 = 6,00$ V, $\mathscr{E}_2 = 12,0$ V, $R_1 = 200\ \Omega$ e $R_2 = 100\ \Omega$. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da corrente na resistência 1, (c) o valor absoluto e (d) o sentido da corrente na resistência 2; (e) o valor absoluto e (f) o sentido da corrente na fonte 2.

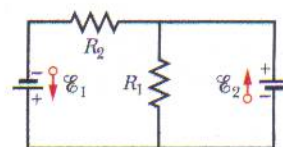



FIG. 27-83 Problema 103.

104 Uma lâmpada de 120 V com dois filamentos pode operar em três níveis de potência: 100, 200 e 300 W. Um dos filamentos queima. Depois disso, a lâmpada funciona com a mesma luminosidade (dissipa a mesma potência) que antes quando o interruptor está na posição de menor luminosidade ou na posição de maior luminosidade, mas não acende quando o interruptor está na posição intermediária. (a) De que forma estão ligados os filamentos nas três posições do interruptor? (b) Qual é a resistência do filamento de menor resistência? (c) Qual é a resistência do filamento de maior resistência?

105 Na Fig. 27-84, $R_1 = R_2 = 2,0\ \Omega$, $R_3 = 4,0\ \Omega$, $R_4 = 3,0\ \Omega$, $R_5 = 1,0\ \Omega$, $R_6 = R_7 = R_8 = 8,0\ \Omega$, e as forças eletromotrizes das fontes ideais são $\mathscr{E}_1 = 16$ V e $\mathscr{E}_2 = 8,0$ V. Determine (a) o valor absoluto e (b) a direção (para cima ou para baixo) da corrente i_1 e (c) o valor absoluto e (d) a direção da corrente i_2. Determine a potência fornecida ou absorvida (e) pela bateria 1 e (f) pela bateria 2. (g) A bateria 1 está fornecendo ou absorvendo energia? (h) A bateria 2 está fornecendo ou absorvendo energia?

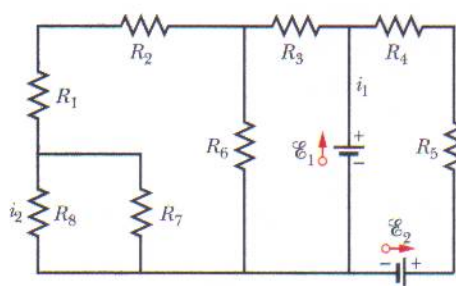



FIG. 27-84 Problema 105.

106 Na Fig. 27-46, $\mathscr{E} = 6,00$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$ e $R_3 = 600\ \Omega$. Determine (a) a resistência equivalente dos três resistores; (b) a diferença de potencial na resistência 1; (c) a corrente na resistência 3.

107 Na Fig. 27-46, a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 12,0$ V e todas as resistências são de 4,00 Ω. Determine (a) a corrente na resistência 3; (b) a potência fornecida pela fonte.

108 Um capacitor de capacitância C_0, depois de permanecer ligado a uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}_0$ por um longo tempo, começa a ser descarregado através de uma resistor de 200 000 Ω

no instante $t = 0$. A diferença de potencial entre os terminais do capacitor é medida para vários instantes de tempo; os resultados são mostrados na tabela a seguir. (a) Escreva uma equação para a diferença de potencial entre os terminais do capacitor em função do tempo. Entre com os dados em uma calculadora científica e execute uma regressão linear de ln V_C em função de t. A partir dos resultados obtidos, determine (b) a força eletromotriz $\mathscr{E}_0$ da bateria e (c) a constante de tempo τ do circuito. (d) Finalmente, determine o valor da capacitância C_0.

V_C (V):	9,9	7,2	5,7	4,4	3,4	2,7	2,0
t (s):	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0	1,2	1,4

109 Uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}$ é usada para alimentar uma linha de transmissão de resistência R. Determine a razão entre a potência dissipada na linha para $\mathscr{E}$ = 110.000 V e a potência dissipada para $\mathscr{E}$ = 110 V, supondo que a potência fornecida pela fonte seja a mesma nos dois casos.

110 Uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}$ = 2,00 V e resistência interna r = 0,500 Ω é usada para alimentar um motor. O motor está levantando uma massa de 2,00 N a uma velocidade constante v = 0,500 m/s. Duas combinações da corrente i no circuito fonte-motor com a diferença de potencial V entre os terminais do motor são compatíveis com essa situação. Das duas respostas possíveis, (a) qual é a que envolve o maior valor de i e (b) qual é o valor correspondente de V? (c) Qual é a que envolve o menor valor de i e (d) qual é o valor correspondente de V?

111 (a) Se os pontos a e b da Fig. 27-61 são ligados a um fio de resistência r, mostre que a corrente no fio é dada por

$$i = \frac{\mathscr{E}(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_sR_x},$$

onde $\mathscr{E}$ é a força eletromotriz da fonte ideal e $R = R_1 = R_2$. Suponha que $R_0 = 0$. (b) A expressão do item (a) está de acordo com o resultado do Problema 55?

Campos Magnéticos 28

Tom Walker/Getty Images, Inc.

Um espetáculo muito bonito, que às vezes pode ser observado nas noites sem lua em médias e altas latitudes, é a aurora, uma fantasmagórica "cortina" de luz que surge no céu. A aurora não é um fenômeno localizado; pode ter 200 km de altura e 4000 km de comprimento, estendendo-se como um arco em volta da Terra. Entretanto, tem apenas cerca de 100 m de espessura.

O que produz a aurora e por que ela é tão fina?

A resposta está neste capítulo.

FIG. 28-1 O eletroímã da foto é usado para transportar sucata em uma fundição. *(Digital Vision/Getty Images)*

28-1 O QUE É FÍSICA?

Como vimos em capítulos anteriores, um objetivo importante da física é estudar o modo como um *campo elétrico* produz uma *força elétrica* em um corpo eletricamente carregado. Um objetivo análogo é estudar o modo como um *campo magnético* produz uma *força magnética* em um corpo eletricamente carregado (em movimento) ou em um corpo com propriedades magnéticas especiais, como um ímã permanente, por exemplo. O leitor provavelmente já prendeu um bilhete na porta da geladeira usando um pequeno ímã; o ímã interage com a porta da geladeira através de um campo magnético.

As aplicações dos campos magnéticos e das forças magnéticas são incontáveis, e mudam a cada ano. Vamos citar apenas alguns exemplos. Durante várias décadas a indústria do entretenimento usou fitas magnéticas para gravar sons e imagens. Embora hoje em dia as fitas de áudio e vídeo tenham caído em desuso, a indústria ainda precisa dos ímãs que controlam os CD players e os DVD *players*; os alto-falantes dos aparelhos de rádio e televisão, dos computadores e dos telefones celulares também utilizam ímãs. Um carro moderno vem equipado com dezenas de ímãs, que são usados no sistema de ignição, no motor de arranque e também para acionar componentes como vidros elétricos, limpadores de pára-brisas e tetos solares. Muitas campainhas de porta e trancas automáticas também trabalham com ímãs. Na verdade, vivemos cercados por ímãs.

O estudo dos campos magnéticos é tarefa da física; as aplicações dos campos magnéticos ficam por conta da engenharia. Tanto a física como a engenharia começam com a mesma pergunta: "O que produz um campo magnético?"

28-2 | O que Produz um Campo Magnético?

Já que o campo elétrico $\vec{E}$ é produzido por cargas elétricas, seria natural que o campo magnético $\vec{B}$ fosse produzido por cargas magnéticas. Entretanto, embora a existência de cargas magnéticas (conhecidas como *monopolos magnéticos*) seja prevista em algumas teorias, essas cargas até hoje não foram observadas experimentalmente. Como são produzidos, então, os campos magnéticos? Os campos magnéticos podem ser produzidos de duas formas.

A primeira forma é usar partículas eletricamente carregadas em movimento, como uma corrente elétrica em um fio, para fabricar um **eletroímã**. A corrente produz um campo magnético que pode ser usado, por exemplo, para controlar o disco rígido de um computador ou para transportar sucata de um lugar para outro (Fig. 28-1). O campo magnético produzido por correntes elétricas será discutido no Capítulo 29.

A outra forma de produzir campos magnéticos é usar partículas elementares, como os elétrons, que possuem um campo magnético *intrínseco*. O campo magnético é uma propriedade básica de muitas partículas elementares, do mesmo modo como a massa e a carga elétrica (quando existe) são propriedades básicas. Como será discutido no Capítulo 32, em certos materiais os campos magnéticos dos elétrons se combinam para produzir um campo magnético nas vizinhanças do material. Esta combinação é o motivo pelo qual um **ímã permanente**, o tipo usado para pendurar bilhetes na porta das geladeiras, possui um campo magnético permanente. Em outros materiais os campos magnéticos dos elétrons se cancelam e o campo magnético em torno do material é nulo. Esse cancelamento é a razão pela qual não possuímos um campo magnético permanente em torno do nosso corpo, o que é bom, pois não seria nada agradável ser atraído por portas de geladeira.

Nosso primeiro trabalho neste capítulo será definir o campo magnético $\vec{B}$. Para isso, vamos usar o fato experimental de que quando uma partícula com carga elétrica se move na presença de um campo magnético uma força magnética $\vec{F}_B$ age sobre a partícula.

28-3 | A Definição de $\vec{B}$

Determinamos o campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto colocando uma partícula de prova com uma carga q nesse ponto e medindo a força elétrica $\vec{F}_E$ que age sobre a partícula. Em seguida, definimos o campo $\vec{E}$ através da relação

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}. \tag{28-1}$$

Se dispuséssemos de um monopolo magnético, poderíamos definir $\vec{B}$ de forma análoga. Entretanto, como os monopolos magnéticos até hoje não foram encontrados devemos definir $\vec{B}$ de outro modo, ou seja, em termos da força magnética $\vec{F}_B$ exercida sobre uma partícula de prova carregada eletricamente e em movimento.

Em princípio, fazemos isso medindo a força $\vec{F}_B$ que age sobre a partícula quando ela passa pelo ponto no qual $\vec{B}$ está sendo medido com várias velocidades e direções. Depois de executar vários experimentos desse tipo constatamos que quando a velocidade $\vec{v}$ da partícula tem uma certa direção, a força $\vec{F}_B$ é zero. Para todas as outras direções de $\vec{v}$ o módulo de $\vec{F}_B$ é proporcional a v sen ϕ, onde ϕ é o ângulo entre a direção em que a força é zero e a direção de $\vec{v}$. Além disso, a direção de $\vec{F}_B$ é sempre perpendicular à direção de $\vec{v}$. (Esses resultados sugerem que um produto vetorial está envolvido.)

Podemos em seguida definir um **campo magnético** $\vec{B}$ como uma grandeza vetorial cuja direção coincide com aquela para a qual a força é zero. Depois de medir $\vec{F}_B$ para $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$, definimos o módulo de $\vec{B}$ em termos do módulo da força:

$$B = \frac{F_B}{|q|v},$$

onde q é a carga da partícula.

Podemos expressar esses resultados através da seguinte equação vetorial:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}; \tag{28-2}$$

ou seja, a força $\vec{F}_B$ que age sobre a partícula é igual à carga q multiplicada pelo produto vetorial da velocidade $\vec{v}$ pelo campo $\vec{B}$ (medidos no mesmo referencial). Usando a Eq. 3-27 para o produto vetorial, podemos escrever o módulo de $\vec{F}_B$ na forma

$$F_B = |q|vB \text{ sen } \phi, \tag{28-3}$$

onde ϕ é o ângulo entre as direções da velocidade $\vec{v}$ e do campo magnético $\vec{B}$.

Determinação da Força Magnética

De acordo com a Eq. 28-3, o módulo da força $\vec{F}_B$ que age sobre uma partícula na presença de um campo magnético é proporcional à carga q e à velocidade v da partícula. Assim, a força é zero se a carga é zero ou se a partícula está parada. A Eq. 28-3 também mostra que a força é zero se $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são paralelos ($\phi = 0°$) ou antiparalelos ($\phi = 180°$), e é máxima quando $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares.

A Eq. 28-2 também fornece a orientação de $\vec{F}_B$. Como foi visto na Seção 3-8, o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$ da Eq. 28-2 é um vetor perpendicular aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$. De acordo com a regra da mão direita (Fig. 28-2*a*), o polegar da mão direita aponta na direção de $\vec{v} \times \vec{B}$ quando os outros dedos apontam de $\vec{v}$ para $\vec{B}$. De acordo com a Eq. 28-2, se a carga q é positiva a força $\vec{F}_B$ tem o mesmo sinal que $\vec{v} \times \vec{B}$; assim, para q positiva $\vec{F}_B$ aponta no mesmo sentido que o polegar (Fig. 28-2*b*). Se q é negativa, a força $\vec{F}_B$ e o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$ têm sinais contrários e, portanto, apontam em sentidos opostos. Assim, para q negativa $\vec{F}_B$ aponta no sentido oposto ao do polegar (Fig. 28-2*c*).

Seja qual for o sinal da carga,

(*a*)

(*b*)

(*c*)

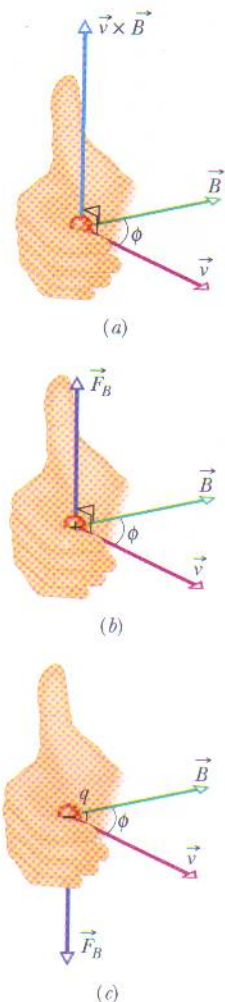



FIG. 28-2 (*a*) Na regra da mão direita, o polegar da mão direita aponta na direção de $\vec{v} \times \vec{B}$ quando os outros dedos apontam de $\vec{v}$ para $\vec{B}$. (*b*) Se a carga q é positiva, a força $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ tem o mesmo sentido que $\vec{v} \times \vec{B}$. (*c*) Se q é negativa, a força $\vec{F}_B$ tem o sentido oposto ao de $\vec{v} \times \vec{B}$.

A força $\vec{F}_B$ que age sobre uma partícula carregada que se move com velocidade $\vec{v}$ na presença de um campo magnético $\vec{B}$ é *sempre* perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$.

Assim, a componente de $\vec{F}_B$ na direção de $\vec{v}$ é *sempre* nula. Isso significa que $\vec{F}_B$ não pode mudar a velocidade escalar v da partícula (e, portanto, também não pode mudar a energia cinética da partícula). A força $\vec{F}_B$ pode mudar apenas a direção de $\vec{v}$ (ou seja, a trajetória da partícula); este é o único tipo de aceleração que $\vec{F}_B$ pode imprimir à partícula.

Para compreender melhor o significado da Eq. 28-2, considere a Fig. 28-3, que mostra alguns rastros deixados por partículas carregadas em uma *câmara de bolhas*. A câmara, que contém hidrogênio líquido, está submetida a um forte campo magnético dirigido para fora do plano do papel. Um raio gama, que não deixa rastro porque é eletricamente neutro, interage com um átomo de hidrogênio e se transforma em um elétron (trajetória espiral e^-) e um pósitron (trajetória espiral e^+), ao mesmo tempo em que arranca um elétron do átomo de hidrogênio (trajetória quase retilínea e^-). As curvaturas das trajetórias das três partículas estão de acordo com a Eq. 28-2 e a Fig. 28-2.

De acordo com as Eqs. 28-2 e 28-3, a unidade de $\vec{B}$ no SI é o newton por coulomb-metro por segundo. Por conveniência, essa unidade é chamada de **tesla** (T):

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{newton}}{(\text{coulomb})(\text{metro/segundo})}.$$

Lembrando que um coulomb por segundo equivale a um ampère, temos:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{newton}}{(\text{coulomb/segundo})(\text{metro})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (28\text{-}4)$$

Uma unidade antiga de $\vec{B}$, que não pertence ao SI mas ainda é usada na prática, é o *gauss* (G). A relação entre o gauss e o tesla é a seguinte:

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}. \quad (28\text{-}5)$$

A Tabela 28-1 mostra os campos magnéticos observados em algumas situações. Observe que o campo magnético na superfície da Terra é da ordem de 10^{-4} T (100 μT ou 1 G).

FIG. 28-3 Rastros de dois elétrons (e^-) e um pósitron (e^+) em uma câmara de bolhas submetida a um campo magnético dirigido para fora do plano do papel. *(Lawrence Berkeley Laboratory/Photo Researchers)*

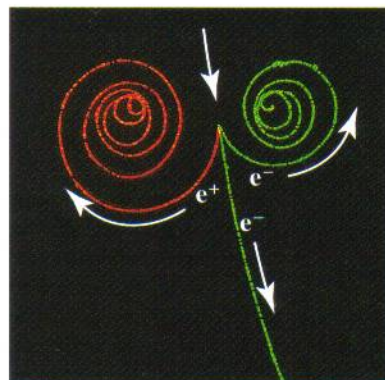
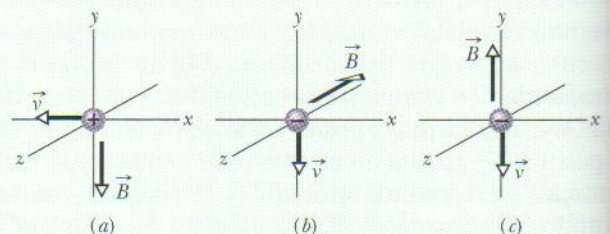



TABELA 28-1

Alguns Campos Magnéticos

Na superfície de uma estrela de nêutrons	10^8 T
Perto de um grande eletroímã	1,5 T
Perto de um ímã pequeno	10^{-2} T
Na superfície da Terra	10^{-4} T
No espaço sideral	10^{-10} T
Em uma sala magneticamente blindada	10^{-14} T

TESTE 1 A figura mostra três situações nas quais uma partícula carregada de velocidade $\vec{v}$ é submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Qual é a direção da força magnética $\vec{F}_B$ a que a partícula é submetida em cada situação?

Linhas de Campo Magnético

Como no caso do campo elétrico, podemos representar o campo magnético através de linhas de campo. As regras são as mesmas: (1) a direção da tangente a uma linha de campo magnético em qualquer ponto fornece a direção de $\vec{B}$ nesse ponto; (2) o espaçamento das linhas representa o módulo de $\vec{B}$; quanto mais intenso o campo, mais próximas estão as linhas, e vice-versa.

A Fig. 28-4*a* mostra as linhas de campo magnético nas proximidades de um *ímã em forma de barra*. Todas as linhas passam pelo interior do ímã e formam curvas fechadas (mesmo as que não parecem formar curvas fechadas na figura). O campo magnético externo é mais intenso perto das extremidades do ímã, o que se reflete em um menor espaçamento das linhas. Assim, o campo magnético do ímã em forma de barra da Fig. 28-4*b* recolhe muito mais limalha de ferro nas extremidades.

As linhas de campo entram no ímã por uma das extremidades e saem pela outra. A extremidade pela qual as linhas saem é chamada de *pólo norte* do ímã; a outra extremidade, pela qual as linhas entram, recebe o nome de *pólo sul*. Como um ímã tem dois pólos, dizemos que possui um **dipolo magnético**. Os ímãs que usamos para prender bilhetes nas geladeiras são ímãs em forma de barra. A Fig. 28-5 mostra outros dois tipos comuns de ímãs: o *ímã em forma de ferradura* e o *ímã em forma de* C (no segundo tipo, o campo magnético entre os pólos é aproximadamente uniforme). Seja qual for a forma dos ímãs, quando colocamos dois ímãs próximos um do outro sempre observamos o seguinte:

Pólos magnéticos de nomes diferentes se atraem e pólos do mesmo nome se repelem.

A Terra possui um campo magnético que é produzido no interior do planeta por um mecanismo até hoje pouco conhecido. Na superfície terrestre podemos observar esse campo com o auxílio de uma bússola, constituída por um ímã fino em forma de barra montado em um eixo de baixo atrito. Este ímã em forma de barra, ou agulha, aponta aproximadamente na direção norte-sul porque o pólo norte do ímã é atraído para um ponto situado nas proximidades do pólo geográfico norte. Isso significa que o pólo *sul* do campo magnético da Terra deve estar situado nas proximidades do pólo geográfico norte. Assim, o correto seria chamarmos o pólo magnético mais próximo do pólo geográfico norte de pólo magnético sul. Entretanto, por causa da proximidade com o pólo geográfico norte esse pólo costuma ser chamado de *pólo geomagnético norte*.

Medidas mais precisas revelam que no hemisfério norte as linhas do campo magnético da Terra apontam para baixo e na direção do pólo geomagnético norte, enquanto no hemisfério sul apontam para cima e para longe do *pólo geomagnético sul*, situado nas proximidades do pólo geográfico sul.

(*a*)

(*b*)

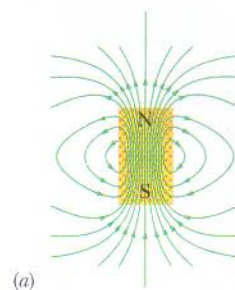



FIG. 28-4 (*a*) Linhas de campo magnético nas proximidades de um ímã em forma de barra. (*b*) Um "ímã de vaca", ímã em forma de barra introduzido no rúmen das vacas para evitar que pedaços de ferro ingeridos acidentalmente cheguem ao intestino do animal. A limalha de ferro revela as linhas de campo magnético. *(Cortesia do Dr. Richard Cannon, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau)*

(*a*) (*b*)

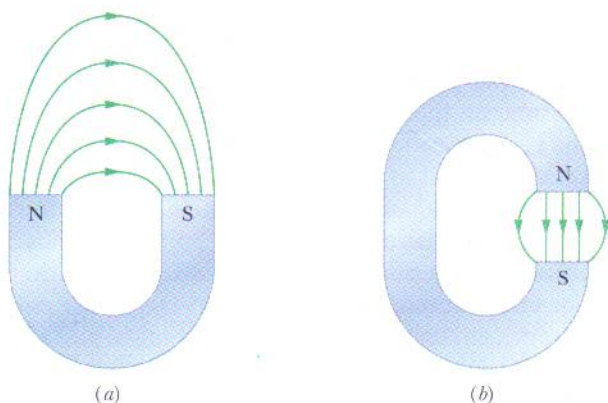



FIG. 28-5 (*a*) Ímã em forma de ferradura e (*b*) ímã em forma de C. (Apenas algumas linhas de campo externas foram desenhadas.)

Exemplo 28-1

Um campo magnético uniforme $\vec{B}$, de módulo 1,2 mT, está orientado verticalmente para cima no interior de uma câmara de laboratório. Um próton com uma energia cinética de 5,3 MeV entra na câmara movendo-se horizontalmente de sul para norte. Qual é a força experimentada pelo próton ao entrar na câmara? A massa do próton é $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. (Despreze o campo magnético da Terra.)

IDÉIAS-CHAVE Como o próton possui carga elétrica e se move na presença de um campo magnético, está sujeito a uma força magnética $\vec{F}_B$. Como a direção inicial da velocidade do próton não coincide com a direção das linhas de campo magnético, $\vec{F}_B$ é diferente de zero.

Módulo: Para determinar o módulo de $\vec{F}_B$, podemos usar a Eq. 28-3 ($F_B = |q|vB \operatorname{sen} \phi$), contanto que a velocidade v do próton seja conhecida. Podemos calcular v a partir da energia cinética dada, já que $K = \frac{1}{2}mv^2$. Explicitando v, obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5{,}3\ \text{MeV})(1{,}60 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$
$$= 3{,}2 \times 10^7\ \text{m/s}.$$

De acordo com a Eq. 28-3, temos:

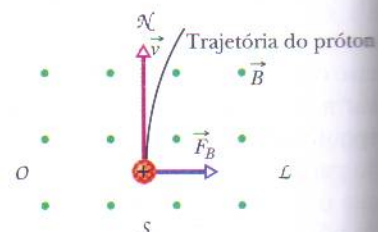
$$\begin{aligned} F_B &= |q|vB \operatorname{sen}\phi \\ &= (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3{,}2 \times 10^7\ \text{m/s}) \\ &\quad \times (1{,}2 \times 10^{-3}\ \text{T})(\operatorname{sen} 90°) \\ &= 6{,}1 \times 10^{-15}\ \text{N}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta pode parecer uma força pequena, mas como age sobre uma partícula de massa muito pequena produz uma grande aceleração:

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{6{,}1 \times 10^{-15}\ \text{N}}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 3{,}7 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2.$$

Orientação: Para determinar a orientação de $\vec{F}_B$, usamos o fato de que é dada pelo produto vetorial $q\vec{v} \times \vec{B}$. Como a carga q é positiva, $\vec{F}_B$ tem o sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$, que pode ser determinado usando a regra da mão direita para produtos vetoriais (como na Fig. 28-2*b*). Sabemos que o sentido de $\vec{v}$ é do sul para o norte e que o sentido de $\vec{B}$ é de baixo para cima. De acordo com a regra da mão direita, a força $\vec{F}_B$ é de oeste para leste, como mostra a Fig. 28-6. (Os pontos da figura indicam que as linhas de campo magnético saem do plano do papel. Se o campo magnético entrasse no plano do papel, os pontos seriam substituídos por cruzes.)

Se a carga da partícula fosse negativa a força magnética teria o sentido oposto, ou seja, de leste para oeste. Este resultado pode ser obtido substituindo q por $-q$ na Eq. 28-2.

FIG. 28-6 Vista de topo de um próton que se move em uma câmara do sul para o norte com velocidade $\vec{v}$. O campo magnético aponta verticalmente para cima, como mostram os pontos (que representam pontas de setas). O próton é desviado para leste.

28-4 | Campos Cruzados: A Descoberta do Elétron

Tanto um campo elétrico $\vec{E}$ com um campo magnético $\vec{B}$ podem exercer uma força sobre uma partícula com carga elétrica. Quando os dois campos são mutuamente perpendiculares dizemos que se trata de *campos cruzados*. Vamos agora discutir o que acontece quando uma partícula com carga elétrica, como o elétron, por exemplo, se move em uma região na qual existem campos cruzados. Vamos basear nossa discussão no experimento que levou à descoberta do elétron, realizado por J.J. Thomson em 1897 na Universidade de Cambridge.

A Fig. 28-7 mostra uma versão moderna, simplificada, do equipamento experimental de Thomson, o *tubo de raios catódicos* (semelhante ao tubo de imagem dos aparelhos de televisão). Partículas carregadas (que hoje chamamos de elétrons) são emitidas por um filamento aquecido em uma das extremidades de um tubo evacuado e aceleradas por uma diferença de potencial V. Depois de passarem por uma fenda no anteparo A, formam um feixe estreito. Em seguida, passam por uma região onde existem campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ cruzados e atingem uma tela fluorescente T, onde produzem um ponto luminoso (nos aparelhos de televisão, o ponto é parte da imagem). As forças a que o elétron é submetido na região dos campos cruzados podem desviá-lo do centro da tela. Controlando o módulo e a orientação dos campos Thomson

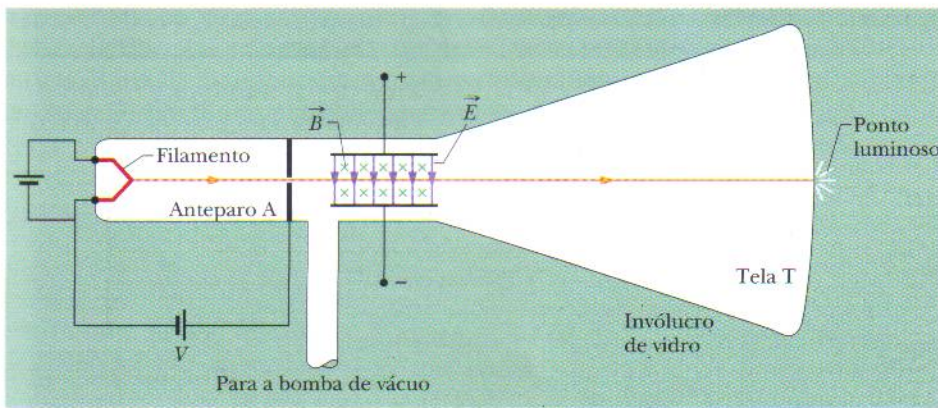



FIG. 28-7 Uma versão moderna do equipamento usado por J. J. Thomson para medir a razão entre a massa e a carga do elétron. Um campo elétrico $\vec{E}$ é estabelecido ligando uma bateria aos terminais das placas defletoras. O campo magnético $\vec{B}$ é criado fazendo passar uma corrente por um conjunto de bobinas (que não aparece na figura). O sentido do campo magnético é para dentro do papel, como mostram as cruzes (que representam as extremidades traseiras de setas).

era capaz de controlar a posição do ponto luminoso na tela. Como vimos, a força a que é submetida uma partícula de carga negativa na presença de um campo elétrico tem o sentido contrário ao do campo. Assim, para o arranjo da Fig. 28-7 os elétrons são desviados para cima pelo campo elétrico $\vec{E}$ e para baixo pelo campo magnético $\vec{B}$; em outras palavras, as duas forças estão *em oposição*. O procedimento adotado por Thomson equivale aos passos que se seguem.

1. Faça $E = 0$ e $B = 0$ e registre a posição na tela T do ponto luminoso causado pelo feixe sem nenhum desvio.
2. Aplique o campo $\vec{E}$ e registre a nova posição do ponto na tela.
3. Mantendo o campo $\vec{E}$, aplique o campo $\vec{B}$ e ajuste seu valor para que o ponto volte à posição inicial. (Como as forças estão em oposição, podem se cancelar.)

A deflexão de uma partícula carregada que se move na presença de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ criado por duas placas (2.º passo) foi discutida no Exemplo 22-4. A deflexão da partícula no momento em que deixa a região entre as placas é dada por

$$y = \frac{|q|EL^2}{2mv^2}, \tag{28-6}$$

onde v é a velocidade da partícula, m é a massa, q é a carga e L é o comprimento das placas. Podemos aplicar a mesma equação ao feixe de elétrons da Fig. 28-7, medindo a posição do ponto luminoso na tela T e refazendo a trajetória das partículas para calcular a deflexão y no final da região entre as placas. (Como o sentido da deflexão depende do sinal da carga das partículas, Thomson foi capaz de provar que as partículas responsáveis pelo ponto luminoso na tela tinham carga negativa.)

De acordo com as Eqs. 28-1 e 28-3, quando os dois campos da Fig. 28-7 são ajustados para que a força elétrica e a força magnética se cancelem mutuamente (3.º passo),

$$|q|E = |q|vB \operatorname{sen}(90°) = |q|vB$$

ou

$$v = \frac{E}{B}. \tag{28-7}$$

Assim, os campos cruzados permitem medir a velocidade das partículas. Substituindo a Eq. 28-7 na Eq. 28-6 e reagrupando os termos, temos:

$$\frac{m}{|q|} = \frac{B^2L^2}{2yE}, \tag{28-8}$$

onde todas as grandezas do lado direito são conhecidas. Assim, os campos cruzados permitem medir a razão $m/|q|$ das partículas que estão sendo investigadas.*

---

*O resultado obtido por Thomson foi $m/|q| \approx 1{,}3\ 3\ 10^{-11}$ kg/C; o valor aceito atualmente é $0{,}57 \times 10^{-11}$ kg/C. (N.T.)

Thomson afirmou que essas partículas estavam presentes em todas as formas de matéria e eram mais de 1000 vezes mais leves que o átomo mais leve conhecido (o átomo de hidrogênio). (Mais tarde verificou-se que a razão exata é 1836,15.) A medição de $m/|q|$, combinada com as duas afirmações de Thomson, é considerada como "a descoberta do elétron".

TESTE 2 A figura mostra quatro direções do vetor velocidade $\vec{v}$ de uma partícula positivamente carregada que se move na presença de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ (dirigido para fora do plano do papel e representado por um ponto no interior de um círculo) e de um campo magnético uniforme $\vec{B}$. (a) Coloque as direções 1, 2 e 3 em ordem de acordo com o módulo da força total que age sobre a partícula, começando pelo maior valor. (b) Das quatro direções, qual é a única em que a força total pode ser zero?

FIG. 28-8 Uma fita de cobre percorrida por uma corrente i é submetida a um campo magnético $\vec{B}$. (a) Situação logo depois que o campo magnético é aplicado, mostrando a trajetória curva de um elétron. (b) Situação após o equilíbrio ser atingido, o que acontece rapidamente. Observe que cargas negativas se acumulam do lado direito da fita, deixando cargas positivas não compensadas do lado direito. Assim, o potencial é maior do lado esquerdo. (c) Para o mesmo sentido da corrente, se os portadores de carga fossem positivos tenderiam a se acumular no lado direito, que ficaria com um potencial maior.

28-5 | Campos Cruzados: O Efeito Hall

Como vimos, um feixe de elétrons no vácuo pode ser desviado por um campo magnético. Será que os elétrons que se movem no interior de um fio de cobre também podem ser desviados por um campo magnético? Em 1879, Edwin H. Hall, na época um aluno de doutorado de 24 anos da Johns Hopkins University, mostrou que sim. Esse efeito, que mais tarde veio a ser conhecido como **efeito Hall**, permite verificar se os portadores de carga em um condutor têm carga positiva ou negativa. Além disso, permite medir o número de portadores por unidade de volume do condutor.

A Fig. 28-8a mostra uma fita de cobre de largura d percorrida por uma corrente i cujo sentido convencional é de cima para baixo na figura. Os portadores de corrente são elétrons que, como sabemos, se movem (com velocidade de deriva v_d) no sentido oposto, de baixo para cima. No instante mostrado na Fig. 28-8a um campo magnético externo $\vec{B}$, que aponta para dentro do papel, acaba de ser ligado. De acordo com a Fig. 28-2, uma força magnética $\vec{F}_B$ age sobre os elétrons, desviando-os para o lado direito da fita.

Com o passar do tempo os elétrons se movem para a direita, acumulando-se na borda direita da fita e deixando cargas positivas não compensadas em posições fixas da borda esquerda. A separação de cargas positivas e negativas produz um campo elétrico $\vec{E}$ no interior da fita que aponta para a direita na Fig. 28-8b. O campo exerce uma força $\vec{F}_E$ sobre os elétrons, desviando-os para a esquerda.

Os elétrons continuam a se acumular na borda direita da fita, até que a força exercida pelo campo elétrico sobre os elétrons equilibre exatamente a força exercida pelo campo magnético. Quando isso acontece, como mostra a Fig. 28-8b, as forças $\vec{F}_E$ e $\vec{F}_B$ têm módulos iguais e sentidos opostos. Os elétrons passam a se mover em linha reta em direção ao alto da página com velocidade $\vec{v}_d$, e o campo elétrico $\vec{E}$ pára de aumentar.

De acordo com a Eq. 24-42, ao campo elétrico entre as bordas da fita está associada uma *diferença de potencial de Hall* dada por

$$V = Ed. \tag{28-9}$$

Ligando um voltímetro às bordas da fita podemos medir essa diferença de potencial e descobrir em qual das bordas o potencial é maior. Para a situação da Fig. 28-28b, observaríamos que o potencial é maior na borda da esquerda, como é de se esperar no caso de portadores de carga negativos.

Vamos supor que os portadores de carga responsáveis pela corrente i tivessem carga positiva (Fig. 28-8c). Nesse caso, os portadores estariam se movendo de cima para baixo, seriam desviados para a borda da direita pela força $\vec{F}_B$ e o potencial seria

maior na borda *da direita*, o que não estaria de acordo com a leitura do voltímetro. A leitura obtida indica, portanto, que os portadores de carga têm carga negativa.

Vamos passar para a parte quantitativa. De acordo com as Eqs. 28-1 e 28-3, quando as forças elétrica e magnética estão em equilíbrio (Fig. 28-8*b*) temos:

$$eE = ev_d B. \tag{28-10}$$

De acordo com a Eq. 26-7, a velocidade de deriva v_d é dada por

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{i}{neA}, \tag{28-11}$$

onde J (= i/A) é a densidade de corrente na fita, A é a área da seção reta da fita e n é a *concentração* de portadores de carga (número de portadores por unidade de volume).

Combinando as Eqs. 28-9, 28-10 e 28-11, obtemos

$$n = \frac{Bi}{Vle}, \tag{28-12}$$

onde l (= A/d) é a espessura da fita. Esta equação permite calcular o valor de n a partir de grandezas conhecidas.

Também é possível usar o efeito Hall para medir diretamente a velocidade de deriva v_d dos portadores de carga, que, como vimos, é da ordem de centímetros por hora. Nesse experimento engenhoso a fita é deslocada, na presença de um campo magnético, no sentido oposto ao da velocidade de deriva dos portadores, e a velocidade de deslocamento da fita é ajustada para que a diferença de potencial de Hall seja zero. Para que o efeito Hall não seja observado é preciso que a velocidade dos portadores *em relação ao laboratório* seja zero; isso significa, portanto, que nessas condições a velocidade dos portadores de carga tem o mesmo módulo que a velocidade da fita e o sentido oposto.

Exemplo 28-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 28-9 mostra um cubo de metal de lado d = 1,5 cm que se move no sentido positivo do eixo y com uma velocidade constante $\vec{v}$ de módulo 4,0 m/s. Na região existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 0,050 T no sentido positivo do eixo z.

(a) Em que face do cubo o potencial é menor e em que face é maior por causa da influência do campo magnético?

FIG. 28-9 Um cubo de metal de lado d que se move com velocidade constante $\vec{v}$ na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$.

IDÉIAS-CHAVE Como o cubo está se movendo na presença de um campo magnético $\vec{B}$, uma força magnética $\vec{F}_B$ age sobre todas as partículas carregadas que compõem o cubo, entre elas os elétrons de condução.

Raciocínio: Como o cubo está se movendo, os elétrons participam desse movimento. Como os elétrons têm carga q e estão se movendo com velocidade $\vec{v}$ na presença de um campo magnético, a força magnética $\vec{F}_B$ que age sobre os elétrons é dada pela Eq. 28-2. Como q é negativa, o sentido de $\vec{F}_B$ é o oposto ao do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$, que aponta no sentido positivo do eixo x na Fig. 28-9. Assim, $\vec{F}_B$ aponta no sentido negativo do eixo x, em direção à face esquerda do cubo (que não pode ser vista na Fig. 28-9).

A maioria dos elétrons está presa aos átomos do cubo. Entretanto, como o cubo é feito de metal contém elétrons de condução que estão livres para se mover. Alguns desses elétrons de condução são desviados pela força $\vec{F}_B$ na direção da face esquerda do cubo, o que torna esta face negativamente carregada e deixa a face da direita positivamente carregada. A separação de cargas produz um campo elétrico $\vec{E}$ dirigido da face direita, positivamente carregada, para a face esquerda, negativamente carregada. Assim, o potencial da face esquerda é menor e o potencial da face direita é maior.

(b) Qual é a diferença de potencial entre as faces de maior e menor potencial elétrico?

IDÉIAS-CHAVE

1. O campo elétrico $\vec{E}$ criado pela separação de cargas faz com que cada elétron seja submetido a uma força elétrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Como q é negativa, essa força tem o sentido oposto ao de $\vec{E}$. Assim, $\vec{F}_E$ aponta para a direita e $\vec{F}_B$ aponta para a esquerda.
2. Quando o cubo penetra na região em que existe campo magnético e as cargas começam a se separar o módulo de $\vec{E}$ começa a aumentar a partir de zero. Assim, o módulo de $\vec{F}_E$ também começa a aumentar a partir de zero, e é inicialmente menor que $\vec{F}_B$. Neste estágio inicial o movimento dos elétrons é dominado por $\vec{F}_B$, que acumula elétrons na face esquerda do cubo, aumentando a separação de cargas.
3. Com o aumento da separação de cargas, porém, chega um instante em que a força $\vec{F}_E$ se torna igual em módulo à força $\vec{F}_B$. Nesse instante a força total exercida sobre os elétrons é zero e os elétrons deixam de se acumular na face esquerda do cubo. Assim, o módulo de $\vec{F}_E$ pára de aumentar e o sistema entra em equilíbrio.

Cálculos: Estamos interessados em calcular a diferença de potencial V entre a face esquerda e a face direita do cubo depois de atingido o equilíbrio (que acontece quase instantaneamente). Podemos obter o valor de V usando a Eq. 28-9 ($V = Ed$), mas para isso precisamos conhecer o módulo E do campo elétrico na condição de equilíbrio. Para obter o valor de E usamos a equação de equilíbrio de forças ($F_E = F_B$).

Para calcular F_E usamos a relação $F_E = |q|E$, obtida a partir da Eq. 28-1; para calcular F_B, usamos relação $F_B = |q|vB \operatorname{sen} \phi$ (Eq. 28-3). De acordo com a Fig. 28-9, o ângulo ϕ entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ é 90°; assim, fazendo sen $\phi = 1$ e $F_E = F_B$, obtemos:

$$|q|E = |q|vB \operatorname{sen} 90° = |q|vB.$$

Isso nos dá $E = vB$ e, portanto, $V = Ed$ se torna

$$V = vBd. \tag{28-13}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$V = (4{,}0 \text{ m/s})(0{,}050 \text{ T})(0{,}015 \text{ m})$$
$$= 0{,}0030 \text{ V} = 3{,}0 \text{ mV}. \qquad \text{(Resposta)}$$

28-6 | Uma Partícula Carregada em Movimento Circular

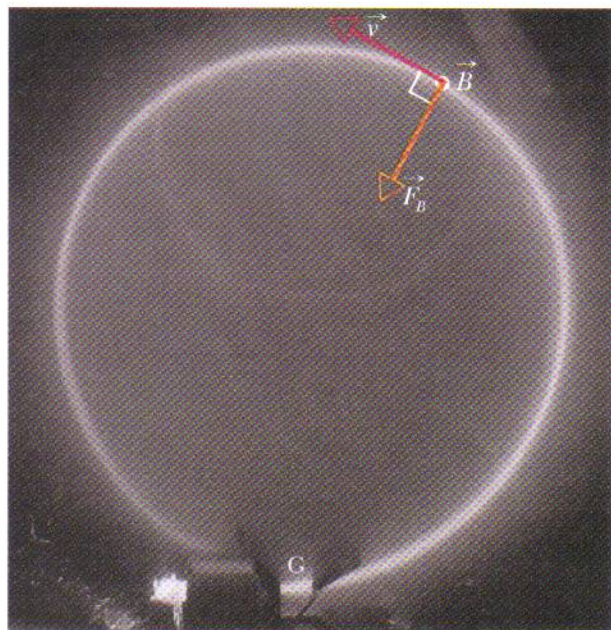



FIG. 28-10 Elétrons circulando em uma câmara que contém uma pequena quantidade de gás (a trajetória dos elétrons é o anel claro). Na câmara existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido para fora do plano do papel. Note que a força magnética $\vec{F}_B$ é radial; para que o movimento seja circular é *preciso* que $\vec{F}_B$ aponte para o centro da trajetória. Use a regra da mão direita para produtos vetoriais para confirmar que $\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ tem a direção apropriada. (Não se esqueça do sinal de q.) *(Cortesia de John Le P. Webb, Sussex University, Inglaterra)*

Se uma partícula se move ao longo de uma circunferência com velocidade constante podemos ter certeza de que a força que age sobre a partícula tem módulo constante e aponta para o centro da circunferência, mantendo-se perpendicular à velocidade da partícula. Pense em uma pedra amarrada a uma corda que gira em círculos em uma superfície horizontal sem atrito, ou em um satélite que gira em torno da Terra em uma órbita circular. No primeiro caso, a tensão da corda é responsável pela força e pela aceleração centrípeta; no segundo, a força e a aceleração são causadas pela atração gravitacional.

A Fig. 28-10 mostra outro exemplo: um feixe de elétrons é lançado em uma câmara por um *canhão de elétrons* G. Os elétrons se movem no plano do papel com velocidade v, em uma região na qual existe um campo magnético $\vec{B}$ dirigido para fora do plano do papel. Em conseqüência, uma força magnética $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ age continuamente sobre os elétrons. Como $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, a força faz com que os elétrons descrevam uma trajetória circular. A trajetória é visível na fotografia porque alguns dos elétrons colidem com átomos do gás presente na câmara, fazendo-os emitir luz.

Estamos interessados em determinar os parâmetros que caracterizam o movimento circular desses elétrons ou de qualquer outra partícula de carga $|q|$ e massa m que se mova com velocidade v perpendicularmente a um campo magnético uniforme $\vec{B}$. De acordo com a Eq. 28-3, o módulo da força que age sobre a partícula é $|q|vB$. De acordo com a segunda lei de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) aplicada ao movimento circular (Eq. 6-18),

$$F = m\frac{v^2}{r}, \tag{28-14}$$

temos

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r}. \quad (28\text{-}15)$$

Explicitando r, vemos que o raio da trajetória circular é dado por

$$r = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{(raio).} \quad (28\text{-}16)$$

O período T (tempo necessário para completar uma revolução) é igual à circunferência dividida pela velocidade:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B} \quad \text{(período).} \quad (28\text{-}17)$$

A freqüência f (número de revoluções por minuto) é dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m} \quad \text{(freqüência).} \quad (28\text{-}18)$$

A freqüência angular do movimento é, portanto,

$$\omega = 2\pi f = \frac{|q|B}{m} \quad \text{(freqüência angular).} \quad (28\text{-}19)$$

As grandezas T, f e ω não dependem da velocidade da partícula (contanto que a velocidade seja muito menor que a velocidade da luz). Partículas velozes se movem em círculos grandes e partículas lentas se movem em círculos pequenos, mas todas as partículas com a mesma razão entre carga e massa $|q|/m$ levam o mesmo tempo T (o período) para completar uma revolução. Usando a Eq. 28-2 é fácil mostrar que, olhando na direção de $\vec{B}$, o sentido de rotação para uma partícula positiva é o sentido anti-horário e o sentido de rotação para uma partícula negativa é o sentido horário.

Trajetórias Helicoidais

Se a velocidade de uma partícula carregada tem uma componente paralela ao campo magnético (uniforme), a partícula descreve uma trajetória helicoidal cujo eixo é a direção do campo. A Fig. 28-11*a*, por exemplo, mostra o vetor velocidade $\vec{v}$ de uma dessas partículas separado em duas componentes, uma paralela a $\vec{B}$ e outra perpendicular a $\vec{B}$:

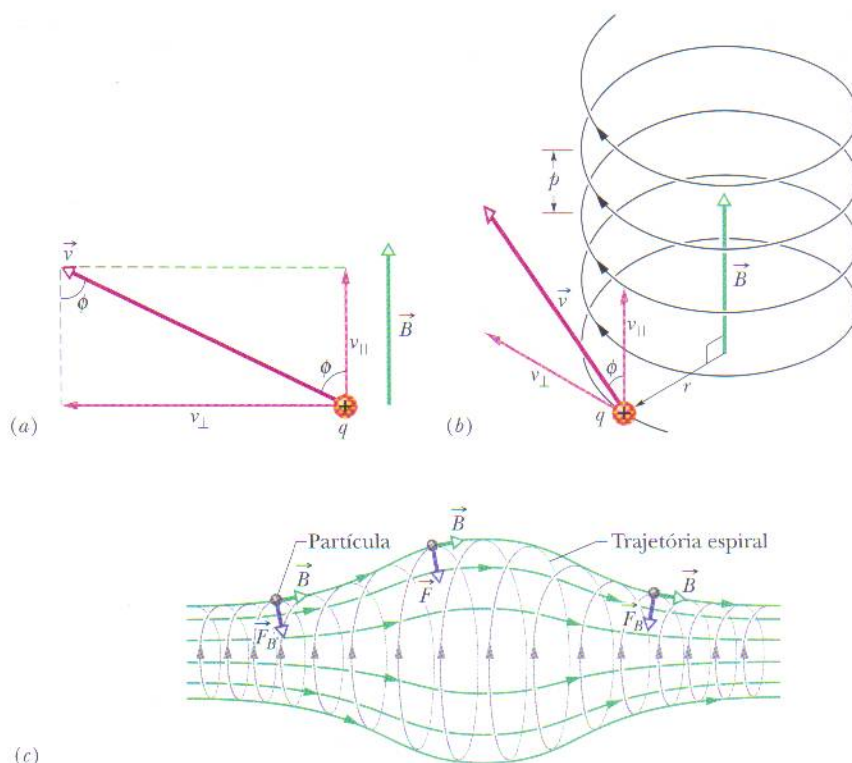
$$v_\parallel = v\cos\phi \quad \text{e} \quad v_\perp = v\,\text{sen}\quad\phi. \quad (28\text{-}20)$$

É a componente paralela que determina o *passo p* da hélice, ou seja, a distância entre espiras sucessivas (Fig. 28-11*b*). O raio da hélice e a grandeza que toma o lugar de v na Eq. 28-16 são determinados pela componente perpendicular.

A Fig. 28-11*c* mostra uma partícula carregada que se move em espiral na presença de um campo magnético não-uniforme. O espaçamento menor das linhas de campo nas extremidades mostra que o campo magnético é mais intenso nessas regiões. Se o campo em uma das extremidades for suficientemente intenso, a partícula será "refletida" de volta para o centro da região. Quando a partícula é refletida nas duas extremidades dizemos que está aprisionada em uma *garrafa magnética*.

Elétrons e prótons são aprisionados dessa forma pelo campo magnético terrestre, formando os *cinturões de radiação de Van Allen*, situados muito acima da atmosfera da Terra, entre os pólos geomagnéticos norte e sul. As partículas percorrem em apenas alguns segundos a distância entre os pólos antes de serem refletidas na direção oposta.

Quando uma erupção solar injeta elétrons e prótons adicionais nos cinturões de radiação um campo elétrico é produzido na região onde os elétrons normalmente são refletidos. Esse campo elimina a reflexão e permite que os elétrons penetrem na atmosfera, colidindo com átomos e moléculas do ar e fazendo-os emitir luz. É esta luz que constitui a aurora, uma cortina luminosa observada a uma altitude da ordem

FIG. 28-11 (*a*) Uma partícula carregada se move na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$, com a velocidade $\vec{v}$ da partícula fazendo um ângulo ϕ com a direção do campo. (*b*) A partícula descreve uma trajetória helicoidal de raio r e passo p. (*c*) Uma partícula carregada se move em espiral na presença de um campo magnético não-uniforme. (A partícula pode ser aprisionada, passando a descrever um movimento de vaivém entre as regiões em que o campo é mais intenso.) Observe que nas duas extremidades a componente horizontal da força magnética aponta para o centro da região.

de 100 km. Os átomos de oxigênio emitem luz verde e as moléculas de nitrogênio emitem luz cor-de-rosa, mas muitas vezes a luz é tão fraca que parece branca.

As auroras formam arcos acima da Terra e podem ocorrer em uma região conhecida como *oval de auroras* (Figs. 28-12 e 28-13). As auroras são extensas mas apresentam uma espessura muito pequena, da ordem de 100 m (no sentido norte-sul),

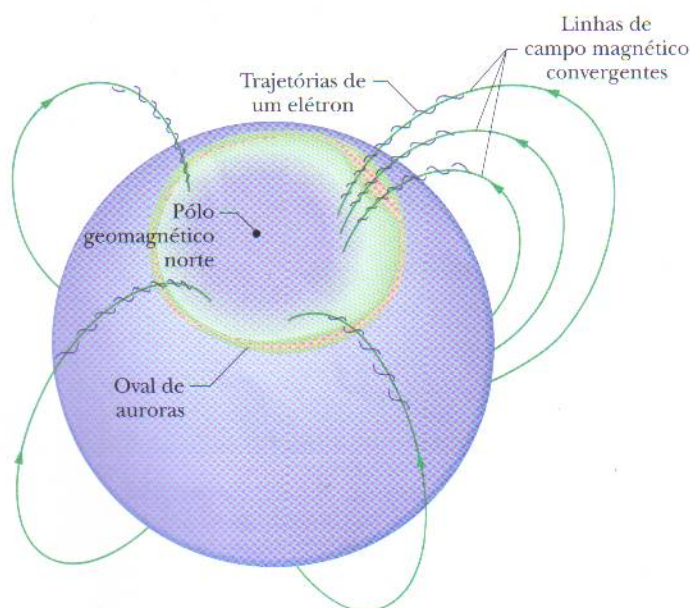



FIG. 28-12 Oval de auroras nas vizinhanças do pólo geomagnético norte da Terra (situado no nordeste da Groenlândia). As linhas de campo magnético convergem para o pólo. Os elétrons que se aproximam da Terra são "capturados" e descrevem trajetórias em espiral ao longo das linhas de campo, penetrando na atmosfera terrestre em altas latitudes e produzindo auroras dentro do oval.

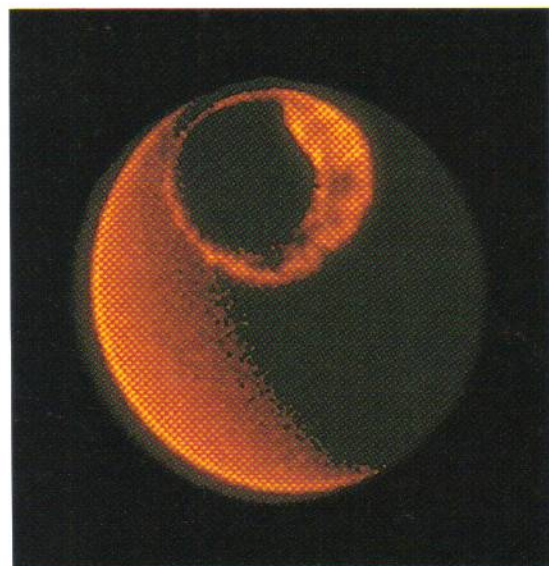
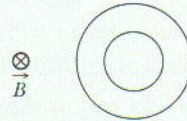



FIG. 28-13 Imagem em cores falsas de uma aurora no interior do oval de auroras norte, registrado pelo satélite *Dynamic Explorer* usando a luz ultravioleta emitida por átomos de oxigênio excitados. A parte da Terra iluminada pelo Sol é o crescente do lado esquerdo. *(Cortesia do Dr. L. A. Frank, University of Iowa)*

porque as trajetórias dos elétrons responsáveis pela luz acompanham as linhas de campo magnético, que convergem ao se aproximarem dos pólos (Fig. 28-12).

TESTE 3 A figura mostra as trajetórias circulares de duas partículas que se movem com a mesma velocidade na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido para dentro do papel. Uma partícula é um próton e a outra é um elétron (que possui uma massa muito menor). (a) Qual das partículas descreve a circunferência menor? (b) Essa partícula se move no sentido horário ou no sentido anti-horário?

Exemplo 28-3

A Fig. 28-14 ilustra o princípio de funcionamento de um *espectrômetro de massa*, que pode ser usado para medir a massa de íons. Um íon de massa m (a ser medida) e carga q é produzido na fonte S e acelerado pelo campo elétrico associado a uma diferença de potencial V. O íon entra em uma câmara de separação na qual existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular à sua trajetória. O campo faz com que o íon descreva uma trajetória semicircular antes de atingir um detector situado na superfície inferior da câmara. Suponha que B = 80.000 mT, V = 1000,0 V e os íons de carga $q = +1{,}6022 \times 10^{-19}$ C atinjam o detector em um ponto situado a uma distância x = 1,6254 m do ponto de entrada na câmara. Qual é a massa m dos íons em unidades de massa atômica? (Eq. 1-7: 1 u = $1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg).

IDÉIAS-CHAVE (1) Como o campo magnético uniforme faz com que o íon descreva uma trajetória circular, podemos relacionar a massa m do íon ao raio r da trajetória através

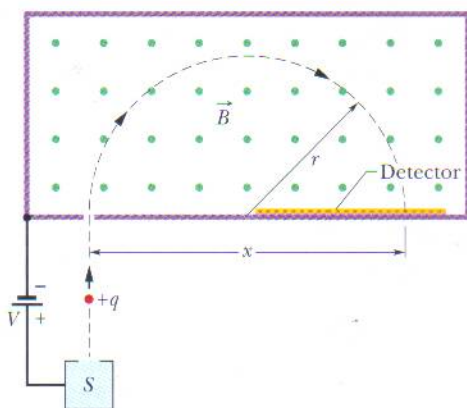



FIG. 28-14 Princípio de funcionamento de um espectrômetro de massa. Um íon positivo, depois de ser gerado por uma fonte S e acelerado por uma diferença de potencial V, penetra em uma câmara onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ e descreve uma semicircunferência de raio r antes de atingir um detector a uma distância x do ponto em que entrou na câmara.

da Eq. 28-16 ($r = mv/qB$). De acordo com a Fig. 28-14, $r = x/2$ e conhecemos o módulo B do campo magnético. Entretanto, não conhecemos a velocidade v dos íons depois que são acelerados pela diferença de potencial V. (2) Para determinar a relação entre v e V usamos o fato de que a energia mecânica ($E_{mec} = K + U$) é conservada durante a aceleração.

Cálculo da velocidade: Quando o íon deixa a fonte a energia cinética é aproximadamente zero; quando entra na câmara, a energia cinética aumentou para $\frac{1}{2}mv^2$. Além disso, durante a aceleração o íon positivo sofre uma variação de potencial elétrico de $-V$. Como o íon possui uma carga positiva q, a variação de energia potencial é $-qV$. De acordo com a lei de conservação da energia mecânica,

$$\Delta K + \Delta U = 0,$$

e, portanto,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - qV = 0$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}. \qquad (28\text{-}21)$$

Cálculo da massa: Substituindo v pelo seu valor na Eq. 28-16, obtemos:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}.$$

Assim,

$$x = 2r = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}.$$

Explicitando m e substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\begin{aligned} m &= \frac{B^2qx^2}{8V} \\ &= \frac{(0{,}080000\text{ T})^2(1{,}6022 \times 10^{-19}\text{ C})(1{,}6254\text{ m})^2}{8(1000{,}0\text{ V})} \\ &= 3{,}3863 \times 10^{-25}\text{ kg} = 203{,}93\text{ u}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Exemplo 28-4

Um elétron com uma energia cinética de 22,5 eV penetra em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ de módulo $4{,}55 \times 10^{-4}$ T. O ângulo entre a direção de $\vec{B}$ e a direção da velocidade $\vec{v}$ do elétron é 65,5°. Qual é o passo da trajetória helicoidal do elétron?

IDÉIAS-CHAVE (1) O passo p é a distância que o elétron percorre paralelamente ao campo magnético $\vec{B}$ durante um período T de revolução. (2) O período T é dado pela Eq. 28-17, independentemente do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$ (contanto que o ângulo não seja zero, porque nesse caso a trajetória do elétron não será circular).

Cálculos: De acordo com as Eqs. 28-20 e 28-17, temos:

$$p = v_{\parallel}T = (v \cos \phi)\,\frac{2\pi m}{|q|B}. \qquad (28\text{-}22)$$

Podemos calcular a velocidade v do elétron a partir da energia cinética como fizemos para o próton do Exemplo 28-1; o resultado é $v = 2{,}81 \times 10^6$ m/s. Substituindo este valor e outros valores conhecidos na Eq. 28-22, obtemos:

$$p = (2{,}81 \times 10^6 \text{ m/s})(\cos 65{,}5°) \times \frac{2\pi(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C})(4{,}55 \times 10^{-4} \text{ T})}$$

$$= 9{,}16 \text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

28-7 | Cíclotrons e Síncrotrons

Feixes de partículas de alta energia, como elétrons e prótons, têm sido imensamente úteis para os estudos de átomos e núcleos que cujo objetivo é conhecer a estrutura fundamental da matéria. Esses feixes foram fundamentais para a descoberta de que os núcleos atômicos são formados por prótons e nêutrons e que os prótons e nêutrons são formados por quarks e glúons. Para trabalhar com os feixes, porém, é preciso produzi-los e controlá-los, o que não é fácil. Como os elétrons e prótons possuem carga elétrica, em princípio podemos acelerá-los até que atinjam altas energias submetendo-os a grandes diferenças de potencial. No caso dos elétrons, cuja massa é muito pequena, é possível acelerá-los dessa forma em uma distância razoável. No caso dos prótons (e de outras partículas carregadas), porém, como a massa é muito maior, a distância necessária para a aceleração pode se tornar proibitiva.

Uma solução engenhosa para o problema consiste em acelerar os prótons e outras partículas pesadas com uma diferença de potencial moderada (fazendo com que adquiram uma energia cinética moderada) e usar um campo magnético para fazer com que passem várias vezes por essa mesma diferença de potencial. Quando o processo é repetido milhares de vezes as partículas adquirem uma energia extremamente elevada.

Vamos agora discutir dois tipos de *aceleradores de partículas* que utilizam um campo magnético para conduzir as partículas repetidas vezes para uma região de aceleração, onde ganham mais e mais energia até finalmente emergirem como um feixe de alta energia.

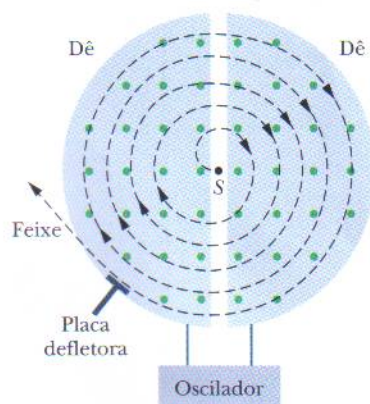



FIG. 28-15 Diagrama esquemático de um cíclotron, mostrando a fonte de partículas S e os dês. Um campo magnético uniforme é aplicado para fora do plano do papel. As partículas descrevem uma trajetória espiral, ganhando energia cada vez que atravessam o espaço entre os dês.

O Cíclotron

A Fig. 28-15 mostra uma vista de topo da região de um cíclotron na qual circulam partículas (prótons, por exemplo). As paredes das duas câmaras em forma de D (abertas na face plana) são feitas de cobre. Os *dês*, como são chamados, estão ligados a um oscilador que alterna o potencial elétrico de tal forma que o campo elétrico na região entre os dês aponta ora em um sentido, ora no sentido oposto. Ao mesmo tempo, é aplicado um campo magnético de alta intensidade para fora do plano da página. O módulo B desse campo depende da corrente no eletroímã responsável pela produção do campo.

Suponha que um próton, injetado pela fonte S situada no centro do cíclotron na Fig. 28-15, esteja inicialmente se movendo em direção ao dê da esquerda, negativamente carregado. O próton é atraído pelo dê e entra nele. Depois de entrar, fica isolado do campo elétrico pelas paredes de cobre do dê; em outras palavras, o campo elétrico não penetra nas câmaras. O campo magnético, porém, não está sujeito aos

efeitos das paredes de cobre (um metal não-magnético) e, portanto, age sobre o próton, fazendo com que descreva uma trajetória semicircular cujo raio, que depende da velocidade, é dado pela Eq. 28-16 ($r = mv/|q|B$).

Suponha que no instante em que o próton chega ao espaço central, proveniente do dê da esquerda, a diferença de potencial entre os dois dês seja invertida. Nesse caso, o próton é *novamente* atraído por um dê negativamente carregado e é *novamente* acelerado. O processo continua, com o movimento do próton sempre em fase com as oscilações do potencial, até que uma trajetória em espiral leve a partícula até a borda do sistema, onde uma placa defletora a faz passar por um orifício e deixar um dos dês.

O funcionamento do cíclotron se baseia no fato de que a freqüência f com a qual a partícula circula sob o efeito do campo magnético (e que *não depende* da velocidade) pode ser igual à freqüência f_{osc} do oscilador elétrico, ou seja,

$$f = f_{osc} \quad \text{(condição de ressonância)}. \tag{28-23}$$

De acordo com esta *condição de ressonância*, para que a energia da partícula aumente é preciso que a freqüência f_{osc} do oscilador elétrico seja igual à freqüência com a qual a partícula circula sob o efeito com campo magnético.

Combinando as Eqs. 28-18 ($f = |q|B/2\pi m$) com a Eq. 28-23, podemos escrever a condição de ressonância na forma

$$|q|B = 2\pi m f_{osc}. \tag{28-24}$$

No caso do próton, q e m são valores fixos. Na prática, o oscilador é projetado para trabalhar em uma certa freqüência fixa f_{osc}. Para "sintonizar" o cíclotron o valor de B é ajustado até que a Eq. 28-24 seja satisfeita, o que faz com que muitos prótons circulem no aparelho e saiam pelo orifício como um feixe de partículas de alta energia.

Outras partículas carregadas podem ser aceleradas por um cíclotron para formar feixes de alta energia. Os *dêuterons* (partículas formadas por um próton e um nêutron), por exemplo, podem ser acelerados, pois possuem a mesma carga que os prótons. Partículas neutras, como o nêutron, não podem ser aceleradas por um cíclotron, mas é possível produzir um feixe de nêutrons de alta energia fazendo um feixe de dêuterons colidir com um alvo de berílio. Este é o sistema usado nos hospitais para tratar o câncer com nêutrons rápidos. O feixe de dêuterons que emerge de um cíclotron instalado no hospital incide em um alvo de berílio colocado nas proximidades do tumor canceroso. Quando os dêuterons colidem com núcleos de berílio nêutrons são arrancados dos núcleos de berílio e penetram no tumor, onde danificam o DNA das células cancerosas, provocando sua morte (Fig. 28-16). Tudo isso pode ser feito no próprio hospital porque os dêuterons são acelerados até altas energias enquanto circulam em um cíclotron, em vez de percorrerem uma trajetória retilínea extremamente longa.

FIG. 28-16 Como é invisível, o feixe de nêutrons que emerge do acelerador à direita é alinhado com o auxílio de raios laser que iluminam a paciente. *(Fermilab/Science Photo Library/Photo Researchers)*

O Síncrotron

O cíclotron convencional não funciona bem no caso de prótons com uma energia maior que 50 MeV porque a hipótese fundamental do projeto, a de que a freqüência de revolução de uma partícula carregada que circula na presença de um campo magnético não depende da velocidade, é válida apenas para velocidades muito menores que a velocidade da luz. Para velocidades acima de 10% da velocidade da luz devem ser usadas as equações da teoria da relatividade. De acordo com essa teoria, quanto maior a velocidade da partícula, maior a massa e menor a freqüência de revolução. Assim, as partículas se atrasam em relação à freqüência do oscilador, que tem um valor fixo f_{osc}, e a energia da partícula passa a aumentar cada vez menos a cada revolução, tendendo para um valor constante.

Existe outro problema. Para um próton de 500 GeV em um campo magnético de 1,5 T o raio da trajetória é 1,1 km. No caso de um cíclotron convencional, o campo magnético teria que ser aplicado em toda a região limitada por esta trajetória, o

que exigiria um ímã de tamanho descomunal, com peças polares da ordem de 4×10^6 m².

O *síncrotron* foi criado para resolver esses dois problemas. Em vez de possuírem valores fixos como no cíclotron convencional, o campo magnético B e a freqüência do oscilador f_{osc} variam com o tempo enquanto as partículas estão sendo aceleradas. Quando isso é realizado de forma correta, (1) a freqüência de revolução das partículas permanece em fase com a freqüência do oscilador; (2) as partículas descrevem uma trajetória circular em vez de espiral. Assim, o campo magnético precisa cobrir uma área bem menor, correspondente a essa trajetória. Entretanto, no caso de partículas de alta energia o raio da trajetória não pode deixar de ser grande. O síncrotron do Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab), em Illinois, tem uma circunferência de 6,3 km e pode produzir prótons com uma energia da ordem de 1 TeV ($= 10^{12}$ eV).

Exemplo 28-5

A freqüência do oscilador de um cíclotron é 12 MHz e o raio dos dês é $R = 53$ cm.

(a) Qual é o módulo do campo magnético necessário para acelerar dêuterons nesse cíclotron? A massa do dêuteron é $m = 3{,}34 \times 10^{-27}$ kg.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 28-24 ($|q|B = 2\pi m f_{osc}$), para uma dada freqüência do oscilador f_{osc} o módulo do campo magnético B necessário para acelerar qualquer partícula em um cíclotron depende apenas da razão $m/|q|$ entre a massa e o valor absoluto da carga da partícula.

Cálculo: No caso de dêuterons e para uma freqüência do oscilador $f_{osc} = 12$ MHz, temos:

$$B = \frac{2\pi m f_{osc}}{|q|} = \frac{(2\pi)(3{,}34 \times 10^{-27}\,\text{kg})(12 \times 10^6\,\text{s}^{-1})}{1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C}}$$
$$= 1{,}57\,\text{T} \approx 1{,}6\,\text{T}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que para acelerar prótons B teria que ser dividido por 2, caso a freqüência do oscilador permanecesse a mesma.

(b) Qual é a energia cinética dos dêuterons acelerados pelo cíclotron?

IDÉIAS-CHAVE (1) A energia cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) de um dêuteron ao sair do cíclotron é igual à energia cinética que o dêuteron possuía quando estava descrevendo uma trajetória com um raio igual ao raio R do cíclotron. (2) Podemos calcular a velocidade v do dêuteron nessa trajetória usando a Eq. 28-16 ($r = mv/|q|B$).

Cálculos: Explicitando v nessa equação, fazendo $r = R$ e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$v = \frac{R|q|B}{m} = \frac{(0{,}53\,\text{m})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(1{,}57\,\text{T})}{3{,}34 \times 10^{-27}\,\text{kg}}$$
$$= 3{,}99 \times 10^7\,\text{m/s}.$$

Essa velocidade corresponde a uma energia cinética

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(3{,}34 \times 10^{-27}\,\text{kg})(3{,}99 \times 10^7\,\text{m/s})^2$$
$$= 2{,}7 \times 10^{-12}\,\text{J}, \qquad \text{(Resposta)}$$

ou cerca de 17 MeV.

28-8 | Força Magnética em um Fio Percorrido por Corrente

Já vimos (quando discutimos o efeito Hall) que um campo magnético exerce uma força lateral sobre os elétrons que se movem em um fio. Essa força, naturalmente, é transmitida para o fio, já que os elétrons não podem deixá-lo.

Na Fig. 28-17*a* um fio vertical, que não conduz corrente e está preso nas duas extremidades, é colocado no espaço entre os pólos de um ímã. O campo magnético do ímã é dirigido para fora do papel. Na Fig. 28-17*b* uma corrente dirigida para cima passa a circular no fio, que se encurva para a direita. Na Fig. 28-17*c* o sentido da corrente é invertido, e o fio se encurva para a esquerda.

A Fig. 28-18 mostra o que acontece no interior do fio da Fig. 28-17*b*. Um dos elétrons se move para baixo com a velocidade de deriva v_d. De acordo com a Eq.

28-3, neste caso com $\phi = 90°$, uma força $\vec{F}_B$ de módulo ev_dB age sobre o elétron. De acordo com a Eq. 28-2, a força aponta para a direita. Esperamos, portanto, que o fio como um todo experimente uma força para a direita, como mostra a Fig. 28-17*b*.

Se na Fig. 28-18 invertermos o sentido do campo magnético *ou* o sentido da corrente, a força exercida sobre o fio mudará de sentido e passará a apontar para a esquerda. Observe também que não importa se consideramos cargas negativas se movendo para baixo (o que na realidade acontece) ou cargas positivas se movendo para cima; nos dois casos o sentido da força é o mesmo. Podemos imaginar, portanto, para efeito dos cálculos, que a corrente é constituída por cargas positivas.

Considere um trecho do fio de comprimento L na Fig. 28-18. Após um intervalo de tempo $t = L/v_d$ todos os elétrons de condução desse trecho passam pelo plano xx. Assim, nesse intervalo de tempo uma carga dada por

$$q = it = i\frac{L}{v_d}$$

passa pelo plano xx. Substituindo na Eq. 28-3, temos:

$$F_B = qv_dB\,\text{sen}\,\phi = \frac{iL}{v_d}v_dB\,\text{sen}\,90°$$

ou

$$F_B = iLB. \tag{28-25}$$

Esta equação permite calcular a força magnética que age sobre um trecho de fio retilíneo de comprimento L percorrido por uma corrente i e submetido a um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao fio.

Se o campo magnético *não é* perpendicular ao fio, como na Fig. 28-19, a força magnética é dada por uma generalização da Fig. 28-25:

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B} \quad \text{(força sobre uma corrente).} \tag{28-26}$$

onde $\vec{L}$ é um *vetor comprimento* de módulo L, com a direção do trecho de fio e o sentido (convencional) da corrente. O módulo da força F_B é dado por

$$F_B = iLB\,\text{sen}\,\phi, \tag{28-27}$$

onde ϕ é o ângulo entre as direções de $\vec{L}$ e $\vec{B}$. A direção de $\vec{F}_B$ é a do produto vetorial $\vec{L} \times \vec{B}$ porque tomamos a corrente i como sendo uma grandeza positiva. De acordo com a Eq. 28-26, $\vec{F}_B$ é sempre perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{L}$ e $\vec{B}$, como mostra a Fig. 28-19.

A Eq. 28-26 é equivalente à Eq. 28-2 no sentido de que qualquer das duas pode ser usada como equação de definição de $\vec{B}$. Na prática definimos $\vec{B}$ através da Eq. 28-26 porque é muito mais fácil medir a força magnética que age sobre um fio percorrido por uma corrente do que a força que age sobre uma partícula em movimento.

Se o fio não é retilíneo ou o campo não é uniforme podemos dividir mentalmente o fio em pequenos segmentos retilíneos e aplicar a Eq. 28-26 a cada segmento. Nesse caso, a força que age sobre o fio como um todo é a soma vetorial das forças que agem sobre os segmentos em que foi dividido. No caso de segmentos infinitesimais, podemos escrever

$$d\vec{F}_B = i\,d\vec{L} \times \vec{B}, \tag{28-28}$$

e calcular a força total que age sobre um dado fio integrando a Eq. 28-28 para todo o fio.

Ao aplicar a Eq. 28-28 pode ser útil ter em mente que não existem segmentos isolados de comprimento dL percorridos por corrente; deve sempre haver um meio de introduzir corrente em uma das extremidades do segmento e retirá-la na outra extremidade.

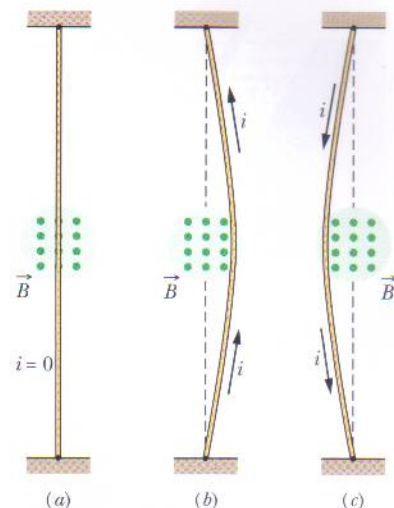



FIG. 28-17 Um fio flexível passa entre os pólos de um ímã (apenas o pólo mais distante aparece no desenho). (*a*) Quando não há corrente o fio não se encurva para nenhum lado. (*b*) Quando há uma corrente para cima o fio se encurva para a direita. (*c*) Quando há uma corrente para baixo o fio se encurva para a esquerda. As ligações necessárias para completar o circuito não aparecem no desenho.

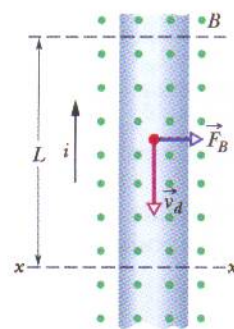



FIG. 28-18 Vista ampliada do fio da Fig. 28-17*b*. O sentido da corrente é para cima, o que significa que a velocidade de deriva dos elétrons aponta para baixo. Um campo magnético que aponta para fora do plano do papel faz com que os elétrons e o fio sejam submetidos a uma força para a direita.

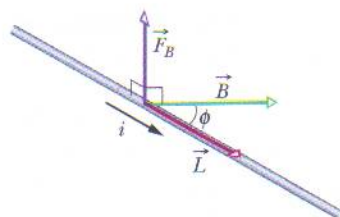
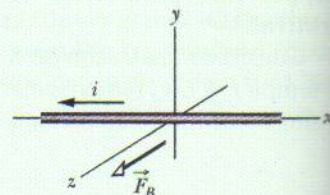



FIG. 28-19 Um fio percorrido por uma corrente i faz um ângulo ϕ com um campo magnético $\vec{B}$. O fio tem um comprimento L e um vetor comprimento $\vec{L}$ (na direção da corrente). Uma força magnética $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$ age sobre o fio.

TESTE 4 A figura mostra um fio, percorrido por uma corrente i e submetido a um campo magnético $\vec{B}$, e também a força magnética $\vec{F}_B$ que age sobre o fio. Qual deve ser a orientação do campo para que a força seja máxima?

Exemplo 28-6

Um fio horizontal retilíneo, feito de cobre, é percorrido por uma corrente $i = 28$ A. Determine o módulo e a orientação do menor campo magnético $\vec{B}$ capaz de manter o fio suspenso, ou seja, equilibrar a força gravitacional. A massa específica linear (massa por unidade de comprimento) do fio é 46,6 g/m.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como o fio está sendo percorrido por uma corrente, sofre uma força magnética $\vec{F}_B$ quando é submetido a um campo magnético $\vec{B}$. Para equilibrar a força gravitacional $\vec{F}_g$, que aponta para baixo, precisamos de uma força magnética que aponte para cima (Fig. 28-20). (2) A orientação de $\vec{F}_B$ está relacionada às orientações de $\vec{B}$ e do vetor comprimento do fio $\vec{L}$ pela Eq. 28-26 ($\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$).

Cálculos: Como $\vec{L}$ é horizontal (e a corrente é tomada como sendo positiva), a Eq. 28-26 e a regra da mão direita para produtos vetoriais mostram que $\vec{B}$ deve ser horizontal e apontar para a direita (como na Fig. 28-20) para que a força $\vec{F}_B$ seja para cima.

O módulo de $\vec{F}_B$ é $F_B = iLB \operatorname{sen} \phi$ (Eq. 28-27). Como queremos que $\vec{F}_B$ equilibre $\vec{F}_g$, devemos ter

$$iLB \operatorname{sen}\phi = mg, \tag{28-29}$$

onde mg é o módulo de $\vec{F}_g$ e m é a massa do fio. Também queremos calcular o menor valor de B para o qual $\vec{F}_B$ equilibra $\vec{F}_g$. Assim, precisamos maximizar sen ϕ na Eq. 28-29. Para isso, fazemos $\phi = 90°$, o que significa que $\vec{B}$ deve ser perpendicular ao fio. Nesse caso, sen $\phi = 1$ e a Eq. 28-29 nos dá

$$B = \frac{mg}{iL \operatorname{sen}\phi} = \frac{(m/L)g}{i}. \tag{28-30}$$

Escrevemos o resultado desta forma porque conhecemos m/L, a massa específica linear do fio. Substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$B = \frac{(46{,}6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{28\ \text{A}}$$

$$= 1{,}6 \times 10^{-2}\ \text{T}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este campo é aproximadamente 160 vezes maior que o campo magnético da Terra.

FIG. 28-20 Um fio (mostrado em seção reta) percorrido por uma corrente elétrica para fora do papel.

28-9 | Torque em uma Espira Percorrida por Corrente

Boa parte do trabalho do mundo é realizada por motores elétricos. As forças responsáveis por esse trabalho são as forças magnéticas que estudamos na seção anterior, ou seja, as forças que um campo magnético exerce sobre fios percorridos por correntes elétricas.

A Fig. 28-21 mostra um motor simples, constituído por uma espira percorrida por uma corrente e submetida a um campo magnético $\vec{B}$. As forças magnéticas $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ produzem um torque na espira que tende a fazê-la girar em torno do eixo central.

Embora muitos detalhes essenciais tenham sido omitidos, a figura mostra como o efeito de um campo magnético sobre uma espira percorrida por corrente produz um movimento de rotação. Vamos analisar esse efeito.

FIG. 28-21 Os elementos de um motor elétrico. Uma espira retangular de fio, percorrida por uma corrente e livre para girar em torno de um eixo, é submetida a um campo magnético. Forças magnéticas produzem um torque que faz girar a espira. Um comutador (que não aparece na figura) inverte o sentido da corrente a cada meia revolução para que o torque tenha sempre o mesmo sentido.

A Fig. 28-22*a* mostra uma espira retangular de lados a e b percorrida por uma corrente i e submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Colocamos a espira no campo de tal forma que os lados mais compridos, 1 e 3, estão sempre perpendiculares à direção do campo (que é para dentro do papel), mas o mesmo não acontece com os lados mais curtos, 2 e 4. Fios para introduzir e remover a corrente da espira são necessários, mas não aparecem na figura.

Para definir a orientação da espira em relação ao campo magnético usamos um vetor normal $\vec{n}$ que é perpendicular ao plano da espira. A Fig. 28-22*b* ilustra o uso da regra da mão direita para determinar a direção de $\vec{n}$. Quando os dedos da mão direita apontam na direção da corrente em um lado qualquer da espira, o polegar estendido aponta na direção do vetor normal $\vec{n}$.

Na Fig. 28-22*c*, o vetor normal da espira é mostrado fazendo um ângulo qualquer θ com a orientação do campo magnético $\vec{B}$. Estamos interessados em calcular a força total e o torque total que agem sobre a espira nessa orientação.

A força total que age sobre a espira é a soma vetorial das forças que agem sobre os quatro lados. No caso do lado 2 o vetor $\vec{L}$ na Eq. 28-26 aponta na direção da corrente e tem módulo b. O ângulo entre $\vec{L}$ e $\vec{B}$ para o lado 2 (veja a Fig. 28-22*c*) é $90° - \theta$. Assim, o módulo da força que age sobre esse lado é

$$F_2 = ibB \operatorname{sen}(90° - \theta) = ibB \cos \theta. \tag{28-31}$$

É fácil mostrar que a força $\vec{F}_4$ que age sobre o lado 4 tem o mesmo módulo que $\vec{F}_2$ e o sentido oposto. Assim, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ se cancelam. A força total associada aos lados 2 e 4 é zero; além disso, como as duas forças estão aplicadas ao longo de uma reta que coincide com o eixo de rotação da espira, o torque total produzido por essas forças também é zero.

A situação é diferente para os lados 1 e 3. Como nesse caso $\vec{L}$ é sempre perpendicular a $\vec{B}$, o módulo das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ é iaB, independentemente do valor de θ. Como as duas forças têm sentidos opostos não tendem a mover a espira para cima ou para baixo. Entretanto, como mostra a Fig. 28-22*c*, as duas forças *não estão* aplicadas ao longo da mesma reta e, portanto, o torque associado a essas forças *não é zero*. O torque tende a fazer a espira girar em um sentido tal que o vetor normal $\vec{n}$ se alinhe com a direção do campo magnético $\vec{B}$. Esse torque tem um braço de alavanca $(b/2)$ sen θ em relação ao eixo da espira. O módulo τ' do torque produzido pelas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ é portanto (veja a Fig. 28-22*c*):

$$\tau' = \left(iaB\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + \left(iaB\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = iabB\operatorname{sen}\theta. \tag{28-32}$$

FIG. 28-22 Uma espira retangular de lados a e b percorrida por uma corrente i e submetida a um campo magnético uniforme. Um torque τ tende a alinhar o vetor normal $\vec{n}$ com a direção do campo. (*a*) Vista da espira olhando na direção do campo magnético. (*b*) Vista da espira em perspectiva, mostrando como a regra da mão direita fornece a direção de $\vec{n}$, que é perpendicular ao plano da espira. (*c*) Vista lateral da espira, mostrando o lado 2. A espira tende a girar da forma indicada.

Suponha que a espira única seja substituída por uma *bobina* de N espiras. Suponha ainda que as espiras sejam enroladas tão juntas que se possa supor que todas têm aproximadamente as mesmas dimensões e estão no mesmo plano. Nesse caso, as espiras formam uma *bobina plana*, e um torque τ' com o módulo dado pela Eq. 28-32 age sobre cada uma delas. O módulo do torque total que age sobre a bobina é, portanto,

$$\tau = N\tau' = NiabB \operatorname{sen} \theta = (NiA)B \operatorname{sen} \theta, \qquad (28\text{-}33)$$

onde A (= ab) é a área limitada pela bobina. O produto entre parênteses (NiA) foi separado porque envolve as propriedades da bobina: o número de espiras, a corrente e a área. A Eq. 28-33 é válida qualquer que seja a forma geométrica da bobina plana, mas o campo magnético deve ser uniforme.

Em vez de acompanhar o movimento da bobina é mais simples tomar como referência o vetor $\vec{n}$, que é perpendicular ao plano da bobina. De acordo com a Eq. 28-33, uma bobina plana percorrida por corrente e submetida a um campo magnético uniforme tende a girar até que $\vec{n}$ fique alinhado com o campo. Nos motores, a corrente da bobina é invertida quando $\vec{n}$ está prestes a se alinhar com a direção do campo, de modo que um torque continua a fazer girar a bobina. Essa inversão automática da corrente é executada por um comutador situado entre a bobina e os contatos estacionários que a alimentam com corrente.

Exemplo 28-7

Os voltímetros e amperímetros analógicos funcionam medindo o torque exercido por um campo magnético sobre uma bobina percorrida por corrente. A leitura é feita através do movimento de um ponteiro ao longo de uma escala. A Fig. 28-23 mostra a estrutura de um *galvanômetro*, o dispositivo em que se baseiam tanto os amperímetros como os voltímetros analógicos. Suponha que a bobina tem 2,1 cm de altura e 1,2 cm de largura, possui 250 espiras e está montada de tal forma que pode girar em torno de um eixo (perpendicular ao papel) na presença de um campo *radial* uniforme de módulo $B = 0{,}23$ T. Para qualquer orientação da bobina o campo magnético que a atravessa é perpendicular ao vetor normal da bobina (e, portanto, paralelo ao plano da bobina). Uma mola M produz um contratorque que equilibra o torque magnético, de modo que uma corrente constante i na bobina resulta em uma deflexão angular constante ϕ. Quanto maior a corrente, maior a deflexão e, portanto, maior o torque que a mola precisa produzir. Se uma corrente de 100 μA produz uma deflexão angular de 28°, qual deve ser a constante de torção κ da mola, definida na Eq. 15-22 ($\tau = -\kappa\phi$)?

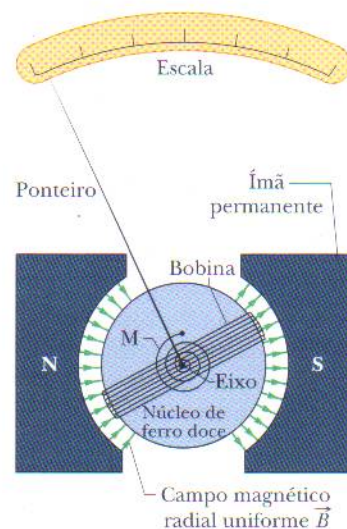



FIG. 28-23 Os elementos de um galvanômetro. Dependendo do circuito externo o instrumento pode funcionar como um voltímetro ou como um amperímetro.

IDÉIA-CHAVE No caso de uma corrente constante, o torque magnético (Eq. 28-33) é equilibrado pelo torque da mola. Assim, os módulos dos dois torques devem ser iguais.

Cálculos: Este equilíbrio pode ser expresso através da equação

$$NiAB \operatorname{sen} \theta = \kappa\phi, \qquad (28\text{-}34)$$

onde ϕ é a deflexão angular da bobina e do ponteiro e A (= $2{,}52 \times 10^{-4}$ m^2) é a área limitada pela bobina. Como o campo magnético que atravessa a bobina é sempre perpendicular ao vetor normal à bobina, $\theta = 90°$ para qualquer orientação do ponteiro. Explicitando κ na Eq. 28-34, obtemos:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{NiAB \operatorname{sen}\theta}{\phi} \\ &= (250)(100 \times 10^{-6}\ \text{A})(2{,}52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &\quad \times \frac{(0{,}23\ \text{T})(\operatorname{sen} 90°)}{28°} \\ &= 5{,}2 \times 10^{-8}\ \text{N}\cdot\text{m/grau}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Muitos amperímetros e voltímetros modernos são do tipo digital e não utilizam uma bobina móvel.

28-10 | O Momento Magnético Dipolar

Como vimos, uma bobina percorrida por corrente sofre um torque ao ser submetida a um campo magnético. Sob esse aspecto a bobina se comporta exatamente como um ímã em forma de barra. Assim, como no caso de um ímã em forma de barra dizemos que uma bobina percorrida por corrente possui um *dipolo magnético*. Além disso, para descrever o torque exercido sobre a bobina por um campo magnético podemos associar um **momento magnético dipolar** $\vec{\mu}$ à bobina. A direção de $\vec{\mu}$ é a do vetor normal $\vec{n}$ e, portanto, é dada pela mesma regra da mão direita da Fig. 28-22: quando os dedos da mão direita apontam na direção da corrente na bobina o polegar estendido aponta na direção de $\vec{\mu}$. O módulo de $\vec{\mu}$ é dado por

$$\mu = NiA \qquad \text{(momento magnético)}, \tag{28-35}$$

onde N é o número de espiras da bobina, i é a corrente na bobina e A é a área limitada pelas espiras da bobina. A partir desta equação, com i em ampères e A em metros quadrados, vemos que a unidade de $\vec{\mu}$ no SI é o ampère-metro quadrado ($A \cdot m^2$).

Usando a definição de $\vec{\mu}$, a equação para o torque exercido por um campo magnético sobre uma bobina (Eq. 28-33) pode ser escrita na forma

$$\tau = \mu B \operatorname{sen} \theta, \tag{28-36}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$.

Em forma vetorial, essa equação se torna

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \tag{28-37}$$

que se parece muito com a equação para o torque exercido por um campo *elétrico* sobre um dipolo *elétrico* (Eq. 22-34):

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Nos dois casos o torque exercido pelo campo é igual ao produto vetorial do momento dipolar pelo campo.

Na presença de um campo magnético, um dipolo magnético possui uma **energia potencial magnética** que depende da orientação do momento dipolar em relação ao campo. No caso de dipolos elétricos, temos (Eq. 22-38):

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Analogamente, podemos escrever, para o caso magnético,

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{28-38}$$

A energia de um dipolo magnético tem o menor valor possível ($= -\mu B \cos 0 = -\mu B$) quando o momento dipolar $\vec{\mu}$ está alinhado com o campo magnético (Fig. 28-24). A energia tem o maior valor possível ($= -\mu B \cos 180° = +\mu B$) quando o momento dipolar e o campo magnético apontam em sentidos opostos. Analisando a Eq. 28-38, com U em joules e $\vec{B}$ em teslas, vemos que a unidade de $\vec{\mu}$ pode ser o joule por tesla (J/T) em vez do ampère-metro quadrado sugerido pela Eq. 28-35.

Quando um dipolo magnético submetido a um torque (produzido por um "agente externo") gira de uma orientação inicial θ_i para uma orientação final θ_f o torque aplicado realiza um trabalho W_a sobre o dipolo. *Se o dipolo permanece em repouso* antes e depois da mudança de orientação, o trabalho W_a é dado por

$$W_a = U_f - U_i, \tag{28-39}$$

onde U_f e U_i são dadas pela Eq. 28-38.

Até agora, o único tipo de dipolo magnético que mencionamos foi o produzido por uma espira percorrida por corrente. Entretanto, um ímã em forma de barra e

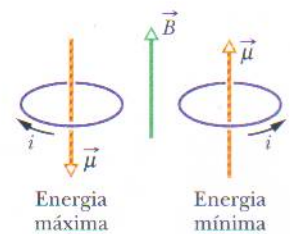



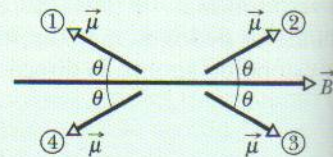
FIG. 28-24 Orientações de maior e menor energia de um dipolo magnético (no caso, uma bobina percorrida por corrente) na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$. O sentido da corrente i determina o sentido do momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ através da regra da mão direita mostrada para $\vec{n}$ na Fig. 28-22*b*.

TABELA 28-2

Alguns Momentos Dipolares Magnéticos

Ímã pequeno	5 J/T
Terra	$8{,}0 \times 10^{22}$ J/T
Próton	$1{,}4 \times 10^{-26}$ J/T
Elétron	$9{,}3 \times 10^{-24}$ J/T

uma esfera carregada girando em torno do próprio eixo também produzem dipolos magnéticos. A própria Terra produz um dipolo magnético (aproximado). Finalmente, a maioria das partículas subatômicas, como o elétron, o próton e o nêutron, possui um momento dipolar magnético. Como vamos ver no Capítulo 32, todas essas entidades podem ser imaginadas como espiras percorridas por corrente. A Tabela 28-2 mostra os momentos magnéticos de alguns objetos.

TESTE 5 A figura mostra quatro orientações de um momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ em relação a um campo magnético $\vec{B}$, definidas através de um ângulo θ. Coloque as orientações em ordem de acordo (a) com o módulo do torque exercido sobre o dipolo; (b) com a energia potencial do dipolo, começando pelo maior valor.

Exemplo 28-8

A Fig. 28-25 mostra uma bobina circular de 250 espiras, com uma área A de $2{,}52 \times 10^{-4}$ m², percorrida por uma corrente de 100 μA. A bobina está em repouso em um campo magnético uniforme de módulo $B = 0{,}85$ T, com seu momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ inicialmente alinhado com $\vec{B}$.

(a) Qual é o sentido da corrente na bobina da Fig. 28-25?

Regra da mão direita: Envolva a bobina com a mão direita, com o polegar estendido na direção de $\vec{\mu}$. Os dedos da mão vão apontar no da corrente. Assim, nos fios do lado mais próximo da bobina (aqueles que são visíveis na Fig. 28-25) o sentido da corrente é de cima para baixo.

(b) Que trabalho o torque aplicado por um agente externo teria que realizar sobre a bobina para fazê-la girar de 90° em relação à orientação inicial, isto é, para tornar $\vec{\mu}$ perpendicular a $\vec{B}$ com a bobina novamente em repouso?

IDÉIA-CHAVE O trabalho W_a realizado pelo torque aplicado é igual à variação da energia potencial da bobina devido à mudança da orientação.

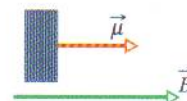



FIG. 28-25 Vista lateral de uma bobina circular percorrida por uma corrente e orientada de tal forma que o momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ está alinhado com o campo magnético $\vec{B}$.

Cálculos: De acordo com a Eq. 28-39 ($W_a = U_f - U_i$), temos:

$$\begin{aligned} W_a &= U(90°) - U(0°) \\ &= -\mu B\cos 90° - (-\mu B\cos 0°) = 0 + \mu B \\ &= \mu B. \end{aligned}$$

Usando a Eq. 28-35 ($\mu = NiA$), obtemos:

$$\begin{aligned} W_a &= (NiA)B \\ &= (250)(100 \times 10^{-6}\text{ A})(2{,}52 \times 10^{-4}\text{ m}^2)(0{,}85\text{ T}) \\ &= 5{,}355 \times 10^{-6}\text{ J} \approx 5{,}4\,\mu\text{J}. \end{aligned}$$ (Resposta)

REVISÃO E RESUMO

Campo Magnético $\vec{B}$ O **campo magnético** $\vec{B}$ é definido em termos da força $\vec{F}_B$ que age sobre uma partícula de prova de carga q que está se movendo com velocidade $\vec{v}$ na presença do campo:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (28\text{-}2)$$

A unidade de $\vec{B}$ no SI é o **tesla** (T): 1 T = 1 N/(A · m) = 10^4 gauss.

O Efeito Hall Quando uma fita condutora de espessura l, percorrida por uma corrente i, é submetida a um campo magnético $\vec{B}$, alguns portadores de carga (de carga e) se acumulam em um dos lados da fita, criando uma diferença de potencial V entre os lados da fita. As polaridades dos lados indicam o sinal dos portadores de carga; a concentração n dos portadores pode ser calculada através da equação

$$n = \frac{Bi}{Vle}. \quad (28\text{-}12)$$

Uma Partícula Carregada em Movimento Circular Uma partícula carregada de massa m e carga de valor absoluto $|q|$, que está se movendo com velocidade $\vec{v}$ perpendicularmente a um campo magnético uniforme $\vec{B}$, descreve uma trajetória circular. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento, temos:

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r}, \quad (28\text{-}15)$$

e, portanto, o raio r da circunferência é dado por

$$r = \frac{mv}{|q|B}. \qquad (28\text{-}16)$$

A freqüência de revolução f, a freqüência angular ω e o período do movimento T são dados por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \qquad (28\text{-}19, 28\text{-}18, 28\text{-}17)$$

Força Magnética em um Fio Percorrido por Corrente Um fio retilíneo percorrido por uma corrente i e submetido a um campo magnético uniforme experimenta uma força lateral

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}. \qquad (28\text{-}26)$$

A força que age sobre um elemento de corrente $i\,dL$ na presença de um campo magnético B é dada por

$$d\vec{F}_B = i\,d\vec{L} \times \vec{B}. \qquad (28\text{-}28)$$

O sentido do vetor comprimento $\vec{L}$ ou $d\vec{L}$ é o da corrente i.

Torque em uma Espira Percorrida por Corrente Uma bobina (de área A e N espiras, percorrida por uma corrente i) na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$ experimenta um torque $\vec{\tau}$ dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \qquad (28\text{-}37)$$

onde $\vec{\mu}$ é o **momento magnético dipolar** da bobina, de módulo $\mu = NiA$, cuja direção é dada pela regra da mão direita.

Energia Potencial de um Dipolo Magnético A **energia potencial magnética** de um dipolo magnético na presença de um campo magnético é dada por

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \qquad (28\text{-}38)$$

Se um agente externo faz um dipolo magnético girar de uma orientação inicial θ_i para uma orientação final θ_f, e se o dipolo permanece estacionário antes e depois da mudança de orientação, o trabalho W_a realizado pelo campo magnético sobre o dipolo é dado por

$$W_a = \Delta U = U_f - U_i. \qquad (28\text{-}39)$$

PERGUNTAS

1 Na Seção 28-4 discutimos o movimento de uma partícula carregada na presença de campos cruzados, com as forças $\vec{F}_E$ e $\vec{F}_B$ em oposição. Vimos que a partícula se move em linha reta (ou seja, as duas forças se equilibram) se a velocidade é dada pela Eq. 28-7 ($v = E/B$). Qual das duas forças é maior se a velocidade da partícula é (a) $v < E/B$ e (b) $v > E/B$?

2 A Fig. 28-26 mostra um fio percorrido por corrente na presença de um campo magnético uniforme. Também mostra quatro orientações possíveis para o campo. (a) Coloque as direções na ordem do módulo da diferença de potencial elétrico entre os lados do fio, começando pela maior. (b) Para que orientação do campo magnético o lado de cima do fio está a um potencial mais alto que o lado de baixo?

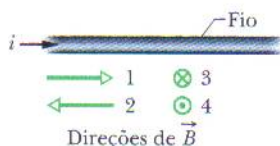



FIG. 28-26 Pergunta 2.

3 A Fig. 28-27 mostra três situações nas quais uma partícula positivamente carregada se move com velocidade $\vec{v}$ na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$ e experimenta uma força magnética $\vec{F}_B$. Em cada situação, determine se as orientações dos vetores são fisicamente razoáveis.

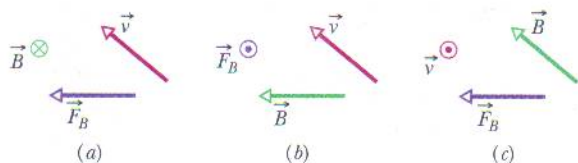



FIG. 28-27 Pergunta 3.

4 A Fig. 28-28 mostra campos elétricos e magnéticos uniformes cruzados $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e, em um certo instante, os vetores velocidade das 10 partículas carregadas que aparecem na Tabela 28-3. (Os vetores não estão desenhados em escala.) As velocidades dadas na tabela são menores ou maiores que E/B (veja a Pergunta 1). Que partículas se movem para fora do papel, em direção ao leitor, após o instante mostrado na Fig. 28-28?

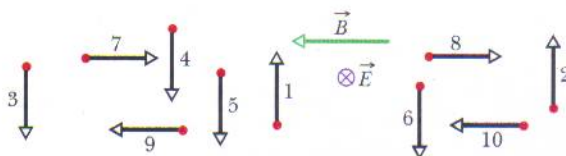



FIG. 28-28 Pergunta 4.

TABELA 28-3

Pergunta 4

Partícula	Carga	Velocidade	Partícula	Carga	Velocidade
1	+	Menor	6	–	Maior
2	+	Maior	7	+	Menor
3	+	Menor	8	+	Maior
4	+	Maior	9	–	Menor
5	–	Menor	10	–	Maior

5 A Fig. 28-29 mostra um paralelepípedo metálico que se move com uma certa velocidade v na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$. As dimensões do sólido são múltiplos de d, como mostra a figura. Existem seis possibilidades para a orientação da velocidade: o sentido positivo ou o sentido negativo dos eixos x, y e z. (a) Coloque as seis possibilidades na ordem da diferença de potencial a que o sólido é submetido, começando pelo maior va-

lor. (b) Para que orientação a face dianteira é submetida ao menor potencial?

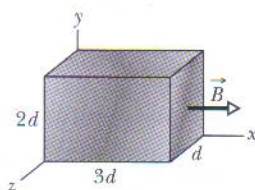



FIG. 28-29 Pergunta 5.

6 A Fig. 28-30 mostra a trajetória de uma partícula que passa por seis regiões de campo magnético uniforme, descrevendo trajetórias que são semicircunferências ou quartos de circunferência. Depois de sair da última região a partícula passa entre duas placas paralelas eletricamente carregadas e é desviada na direção da placa de maior potencial. Qual é a orientação do campo magnético em cada uma das seis regiões?

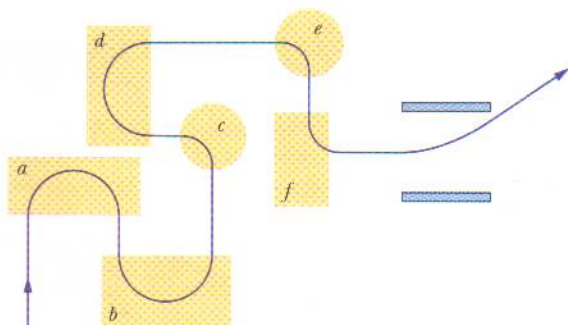



FIG. 28-30 Pergunta 6.

7 Na Fig. 28-31 uma partícula carregada entra com velocidade escalar v_0 em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$, descreve uma semicircunferência em um intervalo de tempo T_0 e deixa a região. (a) A carga da partícula é positiva ou negativa? (b) A velocidade final da partícula é maior, menor ou igual a v_0? (c) Se a velocidade inicial fosse $0{,}5v_0$, a partícula passaria um tempo maior, menor ou igual a T_0 na região onde existe campo magnético? (d) Na situação do item (c) a trajetória seria uma semicircunferência, um arco maior que uma semicircunferência ou um arco menor que uma semicircunferência?

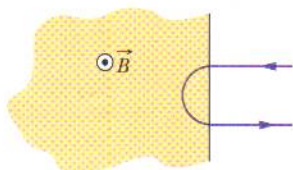



FIG. 28-31 Pergunta 7.

8 *Rotatória de partículas.* A Fig. 28-32 mostra 11 trajetórias em uma região onde existe um campo magnético uniforme. Uma trajetória é retilínea e as outras são semicircunferências. A Tabela 28-4 mostra as massas, cargas e velocidades das 11 partículas. Associe as trajetórias das figuras às partículas da tabela.

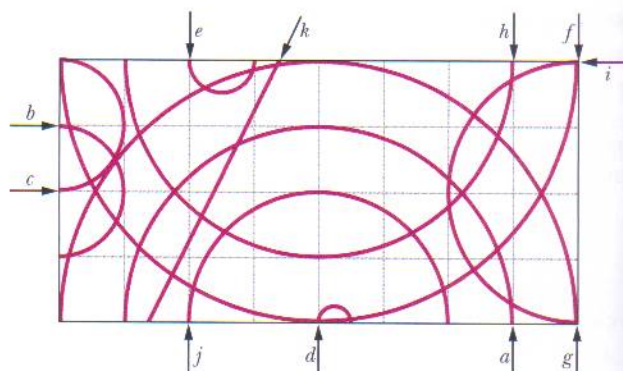



FIG. 28-32 Pergunta 8.

TABELA 28-4

Pergunta 8

Partícula	Massa	Carga	Velocidade
1	$2m$	q	v
2	m	$2q$	v
3	$m/2$	q	$2v$
4	$3m$	$3q$	$3v$
5	$2m$	q	$2v$
6	m	$-q$	$2v$
7	m	$-4q$	v
8	m	$-q$	v
9	$2m$	$-2q$	$3v$
10	m	$-2q$	$8v$
11	$3m$	0	$3v$

9 A Fig. 28-33 mostra a trajetória de um elétron que passa por duas regiões onde existem campos magnéticos uniformes de módulos B_1 e B_2. A trajetória nas duas regiões é uma semicircunferência. (a) Qual dos dois campos é mais intenso? (b) Qual é a orientação de cada campo? (c) O tempo que o elétron passa na região de campo $\vec{B}_1$ é maior, menor ou igual ao tempo que passa na região de campo $\vec{B}_2$?

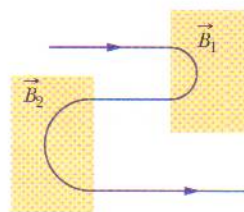



FIG. 28-33 Pergunta 9.

10 A Fig. 28-34 mostra a trajetória de um elétron em uma região na qual o campo magnético é uniforme. A trajetória é constituída por dois trechos retilíneos, entre duas placas uniformemente carregadas, e duas semicircunferências. Que placa possui um maior potencial elétrico (a) das duas de cima e (b) das duas de baixo? (c) Qual é a orientação do campo magnético?

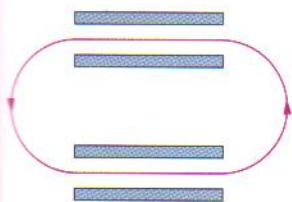



FIG. 28-34 Pergunta 10.

11 (a) No Teste 5, se um agente externo faz o momento dipolar $\vec{\mu}$ girar da orientação 2 para a orientação 1, o trabalho realizado pelo agente externo sobre o dipolo é positivo, negativo ou nulo? (b) Coloque na ordem o trabalho realizado pelo agente externo sobre o dipolo para essas três rotações, começando pelo maior: $2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3$.

PROBLEMAS

• - ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 28-3 A Definição de $\vec{B}$

•1 Um elétron com uma velocidade

$$\vec{v} = (2{,}0 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i} + (3{,}0 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{j}$$

está se movendo em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = (0{,}030 \text{ T})\hat{i} - (0{,}15 \text{ T})\hat{j}$. (a) Determine a força que age sobre o elétron. (b) Repita o cálculo para um próton com a mesma velocidade.

•2 Uma partícula alfa se move com uma velocidade $\vec{v}$ de módulo 550 m/s em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ de módulo 0,045 T. (Uma partícula alfa possui uma carga de $+3{,}2 \times 10^{-19}$ C e uma massa de $6{,}6 \times 10^{-27}$ kg.) O ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$ é 52°. Determine (a) o módulo da força $\vec{F}_B$ que o campo magnético exerce sobre a partícula; (b) a aceleração da partícula causada por $\vec{F}_B$. (c) A velocidade da partícula aumenta, diminui ou permanece constante?

•3 Um próton cuja trajetória faz um ângulo de 23° com a direção de um campo magnético de 2,60 mT experimenta uma força magnética de $6{,}50 \times 10^{-17}$ N. Calcule (a) a velocidade do próton; (b) a energia cinética do próton em elétrons-volts.

•4 Uma partícula com uma massa de 10 g e uma carga de 80 μC se move em uma região onde existe um campo magnético uniforme e a aceleração da gravidade é $-9{,}8\hat{j}$ m/s². A velocidade da partícula é constante e igual a $20\hat{i}$ km/s, perpendicular ao campo magnético. Qual é o campo magnético?

••5 Um elétron se move em uma região onde existe um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = B_x\hat{i} + (3{,}0B_x)\hat{j}$. Em um certo instante o elétron tem uma velocidade $\vec{v} = (2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j})$ m/s e a força magnética que age sobre a partícula é $(6{,}4 \times 10^{-19}$ N$)\hat{k}$. Determine B_x.

••6 Um próton está se movendo em uma região onde existe um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = (10\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k})$ mT. No instante t_1 o próton possui uma velocidade dada por $\vec{v} = v_x\hat{i}\ v_y\hat{j} + (2{,}0 \text{ km/s})\hat{k}$ e a força magnética que age sobre o próton é $\vec{F}_B = (4{,}0 \times 10^{-17} \text{ N})\hat{i} + (2{,}0 \times 10^{-17} \text{ N})\hat{j}$. Nesse instante, quais são os valores (a) de v_x; (b) de v_y?

seção 28-4 Campos Cruzados: A Descoberta do Elétron

•7 Na Fig. 28-35 um elétron acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial $V_1 = 1{,}00$ kV entra no espaço entre duas placas paralelas, separadas por uma distância $d = 20{,}0$ mm, entre as quais existe uma diferença de potencial $V_2 = 100$ V. A placa inferior está a um potencial menor. Despreze o efeito de borda e suponha que o vetor velocidade do elétron é perpendicular ao vetor campo elétrico na região entre as placas. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético uniforme para o qual a trajetória do elétron na região entre as placas é retilínea?

FIG. 28-35 Problema 7.

•8 Um campo elétrico de 1,50 kV/m e um campo magnético perpendicular de 0,400 T agem sobre um elétron em movimento sem acelerá-lo. Qual é a velocidade do elétron?

•9 Um elétron possui uma velocidade inicial de $(12{,}0\hat{j} + 15{,}0\hat{k})$ km/s e uma aceleração constante de $(2{,}00 \times 10^{12} \text{ m/s}^2)\hat{i}$ em uma região na qual existem um campo elétrico e um campo magnético, ambos uniformes. Se $\vec{B} = (400\ \mu\text{T})\hat{i}$, determine o campo elétrico $\vec{E}$.

••10 Um próton está se movendo em uma região onde existem um campo magnético e um campo elétrico, ambos uniformes. O campo magnético é $\vec{B} = -2{,}50\hat{i}$ mT. Em um certo instante, a velocidade do próton é $\vec{v} = 2000\hat{j}$ m/s. Nesse instante, em termos dos vetores unitários, qual é a força que age sobre o próton se o campo magnético é (a) $4{,}00\hat{k}$ V/m; (b) $-4{,}00\hat{k}$ V/m; (c) $4{,}00\hat{i}$ V/m?

••11 Uma fonte de íons está produzindo íons de ^{6}Li, que possuem carga $+e$ e massa $9{,}99 \times 10^{-27}$ kg. Os íons são acelerados por uma diferença de potencial de 10 kV e passam horizontalmente em uma região onde existe um campo magnético uniforme vertical de módulo $B = 1{,}2$ T. Calcule a intensidade do menor campo elétrico que, aplicado na mesma região, permite que os íons de ^{6}Li atravessem a região sem sofrer nenhum desvio.

•••12 No instante t_1, um elétron que está se movendo no sentido positivo do eixo x penetra em uma região onde existem um campo elétrico $\vec{E}$ e um campo magnético $\vec{B}$, com $\vec{E}$ paralelo ao eixo y. A Fig. 28-36 mostra a componente y da força total $F_{tot,y}$ exercida pelos dois campos sobre o elétron em função da velocidade v do elétron no instante t_1. A escala do eixo horizontal é definida por $v_s = 100{,}0$ m/s. As componentes x e z da força total são zero no instante t_1. Supondo que $B_x = 0$, determine (a) o módulo E do campo elétrico; (b) o campo magnético $\vec{B}$ em termos dos vetores unitários.

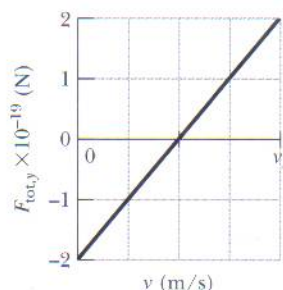



FIG. 28-36 Problema 12.

seção 28-5 Campos Cruzados: O Efeito Hall

•13 Uma fita de cobre com 150 μm de espessura e 4,5 mm de largura é submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 0,65 T, com $\vec{B}$ perpendicular à fita. Quando uma corrente i = 23 A atravessa a fita, uma diferença de potencial V aparece entre suas bordas. Calcule V. (A concentração de portadores de carga no cobre é $8{,}47 \times 10^{28}$ elétrons/m^3.)

•14 Uma fita metálica com 6,50 cm de comprimento, 0,850 cm de largura e 0,760 mm de espessura está se movendo com velocidade constante $\vec{v}$ em uma região onde existe um campo magnético uniforme B = 1,20 mT perpendicular à fita, como na Fig. 28-37. A diferença de potencial entre os pontos x e y da fita é 3,90 μV. Determine a velocidade escalar v.

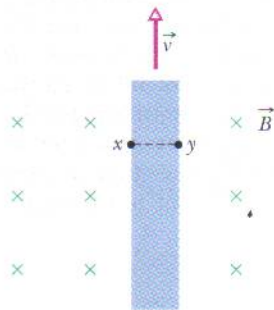



FIG. 28-37 Problema 14.

••15 Na Fig. 28-38 um paralelepípedo metálico de dimensões d_x = 5,00 m, d_y = 3,00 m e d_z = 2,00 m está se movendo com velocidade constante $\vec{v} = (20{,}0\text{ m/s})\hat{\mathrm{i}}$ em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = (30{,}0\text{ mT})\hat{\mathrm{j}}$. Determine (a) o campo elétrico no interior do objeto, em termos dos vetores unitários; (b) a diferença de potencial entre as extremidades do objeto.

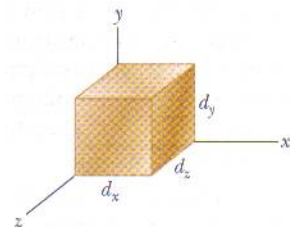



FIG. 28-38 Problemas 15 e 16.

•••16 A Fig. 28-38 mostra um paralelepípedo metálico com as faces paralelas aos eixos coordenados. O objeto está imerso em um campo magnético uniforme de módulo 0,020 T. Uma das arestas do objeto, que *não está* desenhado em escala, mede 25 cm. O objeto é deslocado a uma velocidade de 3,0 m/s, paralelamente aos eixos x, y e z, e a diferença de potencial V que aparece entre as faces do objeto é medida. Quando o objeto se desloca paralelamente ao eixo y, V = 12 mV; quando o objeto se desloca paralelamente ao eixo z, V = 18 mV; quando o objeto se desloca paralelamente ao eixo x, V = 0. Determine as dimensões (a) d_x; (b) d_y e (c) d_z do objeto.

seção 28-6 Uma Partícula Carregada em Movimento Circular

•17 Um elétron de energia cinética 1,20 keV descreve uma trajetória circular em um plano perpendicular a um campo magnético uniforme. O raio da órbita é 25,0 cm. Determine (a) a velocidade escalar do elétron; (b) o módulo do campo magnético; (c) a freqüência de revolução; (d) o período do movimento.

•18 Um elétron é acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial de 350 V. Em seguida o elétron entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo 200 mT com uma velocidade perpendicular ao campo. Calcule (a) a velocidade escalar do elétron; (b) o raio da trajetória do elétron na região onde existe campo magnético.

•19 Qual é o valor do campo magnético uniforme, aplicado perpendicularmente a um feixe de elétrons que se movem com uma velocidade de $1{,}30 \times 10^6$ m/s, que faz com que a trajetória dos elétrons seja um arco de circunferência com 0,350 m de raio?

•20 Em um experimento de física nuclear, um próton com uma energia cinética de 1,0 MeV descreve uma trajetória circular em um campo magnético uniforme. Qual deve ser a energia (a) de uma partícula alfa ($q = +2e, m$ = 4,0 u) e (b) de um dêuteron ($q = +e$, m = 2,0 u) para que a trajetória da partícula seja igual à do próton?

•21 (a) Determine a freqüência de revolução de um elétron com uma energia de 100 eV em um campo magnético uniforme de módulo 35,0 μT. (b) Calcule o raio da trajetória do elétron se sua velocidade é perpendicular ao campo magnético.

•22 Um elétron é acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial V e em seguida entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme, que o faz descrever um movimento circular uniforme. A Fig. 24-39 mostra o raio r da trajetória circular do elétron em função de $V^{1/2}$. A escala do eixo vertical é definida por r_s = 3,00 mm, e a escala do eixo horizontal é definida por $V_s^{1/2}$ = 40,0 V$^{1/2}$. Qual é o módulo do campo magnético?

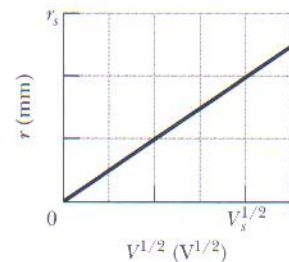



FIG. 28-39 Problema 22.

•23 Uma certa partícula penetra em uma região onde existe um campo magnético uniforme, com o vetor velocidade da partícula perpendicular à direção do campo. A Fig. 28-40 mostra o período T do movimento da partícula em função do *recíproco* do módulo B do campo. A escala do eixo vertical é definida por T_s = 40,0 ns, e a escala do eixo horizontal é definida por B_s^{-1} = 5,0 T^{-1}. Qual é a razão m/q entre a massa da partícula e o valor absoluto da carga?

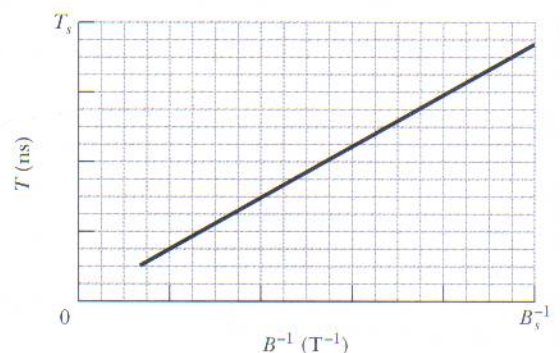



FIG. 28-40 Problema 23.

•**24** Na Fig. 28-41 uma partícula descreve uma trajetória circular em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo $B = 4{,}00$ mT. A partícula é um próton ou um elétron (a identidade da partícula faz parte do problema) e está sujeita uma força magnética de módulo $3{,}20 \times 10^{-15}$ N. Determine (a) a velocidade escalar da partícula; (b) o raio da trajetória; (c) o período do movimento.

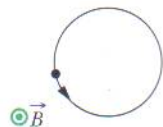



FIG. 28-41 Problema 24.

•**25** Uma partícula alfa ($q = +2e$, $m = 4{,}00$ u) descreve uma trajetória circular de 4,50 cm de raio em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo $B = 1{,}20$ T. Determine (a) a velocidade escalar da partícula; (b) o período de revolução; (c) a energia cinética; (d) a diferença de potencial necessária para que a partícula atinja a energia do item (c).

••**26** Uma partícula descreve um movimento circular uniforme com 26,1 μm de raio em um campo magnético uniforme. O módulo da força magnética experimentada pela partícula é $1{,}60 \times 10^{-17}$ N. Qual é a energia cinética da partícula?

••**27** Um elétron descreve uma trajetória helicoidal em um campo magnético uniforme de módulo 0,300 T. O passo da hélice é 6,00 μm, e o módulo da força magnética experimentada pelo elétron é $2{,}00 \times 10^{-15}$ N. Qual é a velocidade do elétron?

••**28** Na Fig. 28-42 uma partícula carregada penetra em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$, descreve uma semicircunferência e deixa a região. A partícula, que pode ser um próton ou um elétron (a identidade da partícula faz parte do problema), passa 130 ns na região. (a) Qual é o módulo de $\vec{B}$? (b) Se a partícula é enviada de volta para a região onde existe campo magnético com uma energia duas vezes maior, quanto tempo passa nessa região?

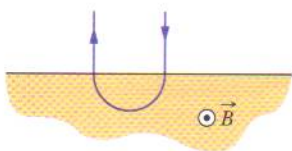



FIG. 28-42 Problema 28.

••**29** Um pósitron com uma energia cinética de 2,00 keV penetra em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 0,100 T. O vetor velocidade da partícula faz um ângulo de 89,0° com $\vec{B}$. Determine (a) o período do movimento; (b) o passo p; (c) o raio r da trajetória helicoidal.

••**30** Um elétron descreve uma trajetória helicoidal na presença de um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = (20\hat{i} - 50\hat{j} - 30\hat{k})$ mT. No instante $t = 0$ a velocidade do elétron é dada por $\vec{v} = (20\hat{i} - 30\hat{j} + 50\hat{k})$ m/s. (a) Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$? A velocidade do elétron varia com o tempo. (b) A velocidade escalar varia com o tempo? (c) O ângulo ϕ varia com o tempo? (d) Qual é o raio da trajetória?

••**31** Um certo espectrômetro de massa comercial (veja o Exemplo 28-3) é usado para separar íons de urânio de massa $3{,}92 \times 10^{-25}$ kg e carga $3{,}20 \times 10^{-19}$ C de íons semelhantes. Os íons são submetidos a uma diferença de potencial de 100 kV e depois a um campo magnético uniforme que os faz descrever um arco de circunferência com 1,00 m de raio. Depois de sofrer um desvio de 180° e passar por uma fenda com 1,00 mm de largura e 1,00 cm de altura, são recolhidos em um reservatório. (a) Qual é o módulo do campo magnético (perpendicular) do separador? Se o aparelho é usado para separar 100 mg de material por hora, calcule (b) a corrente dos íons selecionados pelo aparelho e (c) a energia térmica produzida no reservatório em 1,00 h.

••**32** Na Fig. 28-43 um elétron com uma energia cinética inicial de 4,0 keV penetra na região 1 no instante $t = 0$. Nessa região existe um campo magnético uniforme dirigido para dentro do papel, de módulo 0,010 T. O elétron descreve uma semicircunferência e deixa a região 1, dirigindo-se para a região 2, situada a 25,0 cm de distância da região 1. Existe uma diferença de potencial $\Delta V = 2000$ V entre as duas regiões, com uma polaridade tal que a velocidade do elétron aumenta no percurso entre a região 1 e a região 2. Na região 2 existe um campo magnético uniforme dirigido para fora do papel, de módulo 0,020 T. O elétron descreve uma semicircunferência e deixa a região 2. Determine o instante t em que isso acontece.

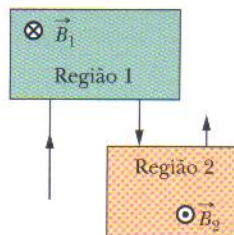



FIG. 28-43 Problema 32.

••**33** Uma certa partícula subatômica decai em um elétron e um pósitron. Suponha que no instante do decaimento a partícula está em repouso em um campo magnético uniforme $\vec{B}$, de módulo 3,53 mT, e que as trajetórias do elétron e do pósitron resultantes do decaimento estão em um plano perpendicular a $\vec{B}$. Quanto tempo após o decaimento o elétron e o pósitron se chocam?

••**34** Uma fonte injeta um elétron de velocidade $v = 1{,}5 \times 10^7$ m/s em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo $B = 1{,}0 \times 10^{-3}$ T. A velocidade do elétron faz um ângulo $\theta = 10°$ com a direção do campo magnético. Determine a distância d entre o ponto de injeção e o ponto em que o elétron cruza novamente a linha de campo que passa pelo ponto de injeção.

seção 28-7 Cíclotrons e Síncrotrons

••**35** Estime a distância total percorrida por um dêuteron no cíclotron do Exemplo 28-5 durante o processo de aceleração. Suponha que a diferença de potencial entre os dês é 80 kV.

••**36** Em um certo cíclotron, um próton descreve uma circunferência de 0,500 m de raio. O módulo do campo magnético é 1,20 T. (a) Qual é a freqüência do oscilador? (b) Qual é energia cinética do próton em elétrons-volts?

••**37** Um próton circula em um cíclotron depois de partir aproximadamente do repouso no centro do aparelho. No momento em que passa pelo espaço entre os dês a diferença de potencial entre os dês é 200 V. (a) Qual é o aumento da energia cinética cada vez que o próton passa no espaço entre os dês? (b) Qual é a energia cinética do próton depois de passar 100 vezes pelo espaço entre os dês? Seja r_{100} o raio da trajetória circular do próton no

momento em que completa as 100 passagens e entra em um dê, e seja r_{101} o raio após a passagem seguinte. (c) Qual é o aumento percentual do raio de r_{100} para r_{101}, ou seja, qual é o valor de

$$\text{aumento percentual} = \frac{r_{101} - r_{100}}{r_{100}} 100\%?$$

••38 Um cíclotron no qual o raio dos dês é 53,0 cm é operado a uma freqüência de 12,0 MHz para acelerar prótons. (a) Qual deve ser o módulo B do campo magnético para que haja ressonância? (b) Para este valor do campo, qual é a energia cinética dos prótons que saem do cíclotron? Suponha que o campo seja mudado para 1,57 T. (c) Qual deve ser a nova freqüência do oscilador para que haja ressonância? (d) Para este valor da freqüência, qual é a energia cinética dos prótons que saem do cíclotron?

seção 28-8 Força Magnética em um Fio Percorrido por Corrente

•39 Um fio com 13,0 g de massa e $L = 62,0$ cm de comprimento está suspenso por um par de contatos flexíveis na presença de um campo magnético uniforme de módulo 0,440 T (Fig. 28-44). Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para a direita ou para a esquerda) da corrente necessária para remover a tensão dos contatos.

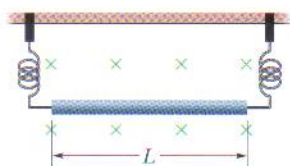



FIG. 28-44 Problema 39.

•40 O fio dobrado da Fig. 28-45 está submetido a um campo magnético uniforme. Cada trecho retilíneo tem 2,0 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 60°$ com o eixo x. O fio é percorrido por uma corrente de 2,0 A. Qual é a força que o campo magnético exerce sobre o fio, em termos dos vetores unitários, se o campo magnético é (a) $4{,}0\hat{k}$ T; (b) $4{,}0\hat{i}$ T?

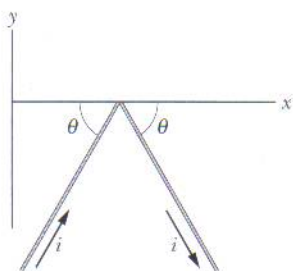



FIG. 28-45 Problema 40.

•41 Uma linha de transmissão horizontal é percorrida por uma corrente de 5000 A no sentido sul-norte. O campo magnético da Terra (60,0 μT) tem a direção norte e faz um ângulo de 70,0° com a horizontal. Determine (a) o módulo e (b) a direção da força magnética exercida pelo campo magnético da Terra sobre 100 m da linha.

•42 Um fio de 1,80 m de comprimento é percorrido por uma corrente de 13,0 A e faz um ângulo de 35,0° com um campo magnético uniforme de módulo $B = 1{,}50$ T. Calcule a força magnética exercida pelo campo sobre o fio.

••43 Um fio de 50,0 cm de comprimento é percorrido por uma corrente de 0,500 A no sentido positivo do eixo x na presença de um campo magnético $\vec{B} = (3{,}00 \text{ mT})\hat{j} + (10{,}0 \text{ mT})\hat{k}$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força que o campo magnético exerce sobre o fio?

••44 Na Fig. 28-46 um fio metálico de massa $m = 24{,}1$ mg pode deslizar com atrito insignificante sobre dois trilhos paralelos horizontais separados por uma distância $d = 2{,}56$ cm. O conjunto está em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo 56,3 mT. No instante $t = 0$ um gerador G é ligado aos trilhos e produz uma corrente constante $i = 9{,}13$ mA no fio e nos trilhos (mesmo quando o fio está se movendo). No instante $t = 61{,}1$ ms, determine (a) a velocidade escalar do fio; (b) o sentido do movimento do fio (para a esquerda ou para a direita).

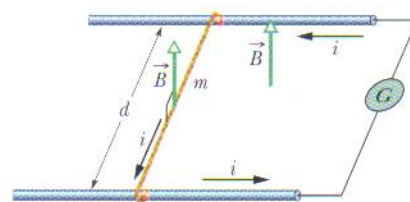



FIG. 28-46 Problema 44.

•••45 Uma barra de cobre de 1,0 kg repousa em dois trilhos horizontais situados a 1,0 m de distância um do outro e é percorrida por uma corrente de 50 A. O coeficiente de atrito estático entre a barra e os trilhos é 0,60. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação à vertical) do menor campo magnético que faz a barra se mover.

•••46 Um condutor longo, rígido, retilíneo, situado sobre o eixo x, é percorrido por uma corrente de 5,0 A no sentido negativo do eixo x. Um campo magnético $\vec{B}$ está presente, dado por $\vec{B} = 3{,}0\hat{i} + 8{,}0x^2\hat{j}$, com x em metros e $\vec{B}$ em militeslas. Determine, em termos dos vetores unitários, a força exercida pelo campo sobre o segmento de 2,0 m do condutor entre os pontos $x = 1{,}0$ m e $x = 3{,}0$ m.

seção 28-9 Torque em uma Espira Percorrida por Corrente

•47 A Fig. 28-47 mostra uma bobina retangular de cobre, de 20 espiras, com 10 cm de altura e 5 cm de largura. A bobina conduz uma corrente de 0,10 A e dispõe de uma dobradiça em um dos lados verticais. Está montada no plano xy, fazendo um ângulo $\theta = 30°$ com a direção de um campo magnético uniforme de módulo 0,50 T. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque que o campo exerce sobre a bobina em relação à dobradiça?

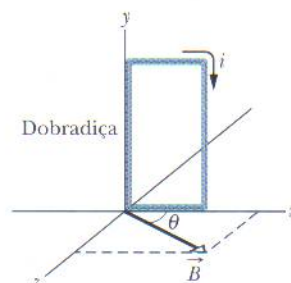



FIG. 28-47 Problema 47.

•**48** Uma bobina de uma espira, percorrida por uma corrente de 4,00 A, tem a forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 50,0, 120 e 130 cm. A bobina é submetida a um campo magnético uniforme de módulo 75,0 mT paralelo à corrente no lado de 130 cm. Determine o módulo da força magnética (a) no lado de 130 cm; (b) no lado de 50,0 cm; (c) no lado de 120 cm. (d) Determine a força total que o campo magnético exerce sobre a espira.

••**49** A Fig. 28-48 mostra um anel circular de fio com um raio $a = 1,8$ cm, submetido a um campo magnético divergente de simetria radial. O campo magnético em todos os pontos do anel tem o mesmo módulo $B = 3,4$ mT, é perpendicular ao anel e faz um ângulo $\theta = 20°$ com a normal ao plano do anel. A influência dos fios de alimentação da espira pode ser desprezada. Determine o módulo da força que o campo exerce sobre a espira se a corrente na espira é $i = 4,6$ mA.

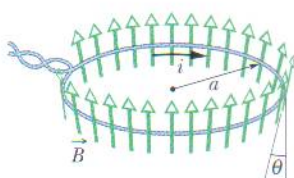



FIG. 28-48 Problema 49.

••**50** Na Fig. 28-49 uma bobina retangular percorrida por corrente está no plano de um campo magnético uniforme de módulo 0,040 T. A bobina é formada por uma única espira de fio flexível enrolado em um suporte flexível que permite mudar as dimensões do retângulo. (O comprimento total do fio permanece inalterado.) Quando o comprimento x de um dos lados do retângulo varia de aproximadamente zero para o valor máximo de aproximadamente 4,0 cm, o módulo τ do torque passa por um valor máximo de $4,80 \times 10^{-8}$ N · m. Qual é a corrente na bobina?

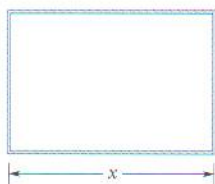



FIG. 28-49 Problema 50.

••**51** A bobina de um certo galvanômetro (veja o Exemplo 28-7) tem uma resistência de 75,3 Ω; o ponteiro chega ao final da escala quando uma corrente de 1,62 mA atravessa a bobina. (a) Determine o valor da resistência auxiliar necessária para converter o galvanômetro em um voltímetro que indique uma tensão máxima de 1,00 V. (b) A resistência do item (a) deve ser ligada em série ou em paralelo com o galvanômetro? (c) Determine o valor da resistência auxiliar necessária para converter o galvanômetro em um amperímetro que indique uma corrente máxima de 50,0 mA. (d) A resistência do item (c) deve ser ligada em série ou em paralelo?

••**52** Um elétron se move em um círculo de raio $r = 5,29 \times 10^{-11}$ m com uma velocidade de $2,19 \times 10^{6}$ m/s. Trate a trajetória circular como uma espira percorrida por uma corrente constante igual à razão entre a carga do elétron e o período do movimento. Se a trajetória do elétron está em uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo $B = 7,10$ mT, qual é o maior valor possível do módulo do torque aplicado pelo campo à espira?

••**53** A Fig. 28-50 mostra um cilindro de madeira de massa $m = 0,250$ kg e comprimento $L = 0,100$ m, com $N = 10,0$ espiras de fio enroladas longitudinalmente para formar uma bobina; o plano da bobina passa pelo eixo do cilindro. O cilindro é liberado a partir do repouso em um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal, com o plano da bobina paralelo ao plano inclinado. Se o conjunto é submetido a um campo magnético uniforme de módulo 0,500 T, qual é a menor corrente i na bobina que impede que o cilindro entre em movimento?

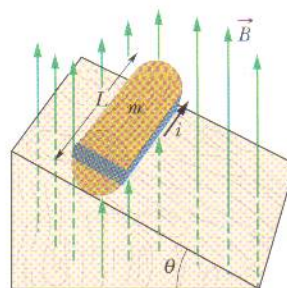



FIG. 28-50 Problema 53.

seção 28-10 O Momento Magnético Dipolar

•**54** Uma bobina circular de 15,0 cm de raio conduz uma corrente de 2,60 A. A normal ao plano da bobina faz um ângulo de 41,0° com um campo magnético uniforme de módulo 12,0 T. (a) Calcule o módulo do momento dipolar magnético da bobina. (b) Qual é o módulo do torque que age sobre a bobina?

•**55** Uma bobina circular de 160 espiras tem um raio de 1,90 cm. (a) Calcule a corrente que resulta em um momento dipolar magnético de módulo 2,30 A · m². (b) Determine o valor máximo do torque a que a bobina é submetida quando, sendo percorrida por essa corrente, é colocada na presença de um campo magnético uniforme de módulo 35,0 mT.

•**56** O módulo de momento dipolar magnético da Terra é $8,00 \times 10^{22}$ J/T. Suponha que esse momento é produzido por cargas que circulam na parte externa do núcleo da Terra. Se o raio da trajetória dessas cargas é 3500 km, calcule a corrente associada.

•**57** Uma bobina que conduz uma corrente de 5,0 A tem a forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 30, 40 e 50 cm. A bobina é submetida a um campo magnético uniforme de módulo 80 mT paralelo à corrente no lado de 50 cm da bobina. Determine o módulo (a) do momento dipolar magnético da bobina; (b) do torque sobre a bobina.

•**58** Um dipolo magnético com um momento dipolar de módulo 0,020 J/T é liberado a partir do repouso em um campo magnético uniforme de módulo 52 mT e gira livremente sob a ação da força magnética. Quando o dipolo está passando pela orientação na qual o momento dipolar está alinhado com o campo magnético, sua energia cinética é 0,80 mJ. (a) Qual é o ângulo inicial entre o momento dipolar e o campo magnético? (b) Qual é o ângulo quando o dipolo volta a entrar (momentaneamente) em repouso?

•**59** Duas espiras circulares concêntricas, de raios $r_1 = 20,0$ cm e $r_2 = 30,0$ cm, estão situadas no plano xy; ambas são percorridas

por uma corrente de 7,00 A no sentido horário (Fig. 28-51). (a) Determine o módulo do momento dipolar magnético do sistema. (b) Repita o cálculo supondo que a corrente da espira menor mudou de sentido.

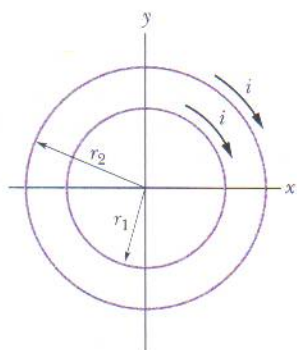



FIG. 28-51 Problema 59.

••60 A Fig. 28-52 mostra a energia potencial U de um dipolo magnético na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$ em função do ângulo ϕ entre a direção de $\vec{B}$ e a direção do dipolo magnético. A escala do eixo vertical é definida por $U_s = 2{,}0 \times 10^{-4}$ J. O dipolo pode girar em torno de um eixo com atrito desprezível, o que permite fazer variar o valor de ϕ. Rotações no sentido anti-horário a partir de $\phi = 0$ correspondem a valores positivos de ϕ, e rotações no sentido horário correspondem a valores negativos. O dipolo é liberado na posição $\phi = 0$ com uma energia cinética de $6{,}7 \times 10^{-4}$ J e gira no sentido anti-horário. Até que ângulo ϕ vai a rotação? (Na terminologia da Seção 8-6, qual é o valor de ϕ no ponto de retorno do poço de potencial da Fig. 28-52?)

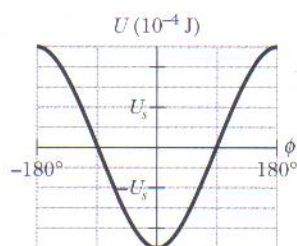



FIG. 28-52 Problema 60.

••61 Uma espira circular com 8,0 cm de raio é percorrida por uma corrente de 0,20 A. Um vetor de comprimento unitário, paralelo ao momento dipolar $\vec{\mu}$ da espira, é dado por $\mathbf{0{,}60\hat{i} - 0{,}80\hat{j}}$. Se a espira é submetida a um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = \mathbf{(0{,}25\ T)\hat{i} + (0{,}30\ T)\hat{k}}$, determine (a) o torque sobre a espira (em termos dos vetores unitários) e (b) a energia potencial magnética da espira.

••62 A Fig. 28-53 mostra uma espira *ABCDEFA* percorrida por uma corrente $i = 5{,}00$ A. Os lados da espira são paralelos aos eixos coordenados, com $AB = 20{,}0$ cm, $BC = 30{,}0$ cm e $FA = 10{,}0$ cm. Em termos dos vetores unitários, qual é o momento dipolar magnético da espira? (*Sugestão:* Imagine correntes iguais e opostas no segmento AD e calcule o momento produzido por duas espiras retangulares, *ABCDA* e *ADEFA*.)

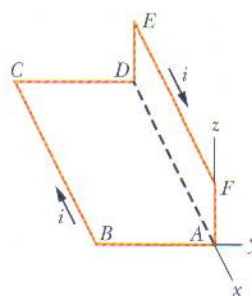



FIG. 28-53 Problema 62.

••63 Um fio de 25,0 cm de comprimento, percorrido por uma corrente de 4,51 mA, é convertido em uma bobina circular e submetido a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 5,71 mT. Se o torque que o campo exerce sobre a espira é o maior possível, determine (a) o ângulo entre $\vec{B}$ e o momento dipolar magnético da bobina e (b) o número de espiras da bobina. (c) Determine o módulo do torque máximo.

••64 Na Fig. 28-54a duas espiras concêntricas, situadas no mesmo plano, são percorridas por correntes em sentidos contrários. A corrente i_1 na espira 1 é fixa e a corrente i_2 na espira 2 é variável. A Fig. 28-54b mostra o momento magnético total do sistema em função de i_2. A escala do eixo vertical é definida por $\mu_{tot,s} = 2{,}0 \times 10^{-5}$ A · m², e a escala do eixo horizontal é definida por $i_{2s} = 10{,}0$ mA. Se o sentido da corrente na espira 2 for invertido, qual será o módulo do momento magnético total do sistema para $i_2 = 7{,}0$ mA?

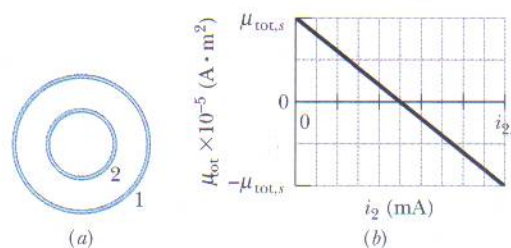



FIG. 28-54 Problema 64.

••65 A bobina da Fig. 28-55 conduz uma corrente $i = 2{,}00$ A no sentido indicado, é paralela ao plano xz, possui 3,00 espiras, tem uma área de $4{,}00 \times 10^{-3}$ m² e está submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B} = (2{,}00\hat{i} - 3{,}00\hat{j} - 4{,}00\hat{k})$ mT. Determine (a) a energia potencial magnética do sistema bobina-campo magnético; (b) o torque magnético (em termos dos vetores unitários) a que está sujeita a bobina.

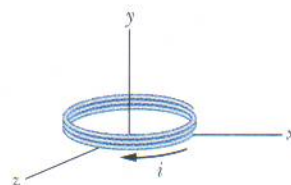



FIG. 28-55 Problema 65.

Problemas Adicionais

66 Um fio situado sobre o eixo y, entre $y = 0$ e $y = 0{,}250$ m, é percorrido por uma corrente de 2,00 mA no sentido negativo do

eixo. Na região existe um campo magnético não-uniforme dado por $\vec{B} = (0{,}300\ \text{T/m})y\hat{\text{i}} + (0{,}400\ \text{T/m})y\hat{\text{i}}$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força magnética que o campo exerce sobre o fio?

67 O físico S. A. Goudsmit inventou um método para medir a massa de um íon pesado determinando seu período de revolução na presença de um campo magnético conhecido. Um íon de iodo monoionizado descreve 7,00 revoluções em 1,29 milissegundo em um campo de 45,0 militeslas. Calcule a massa do íon em unidades de massa atômica.

68 Um elétron do tubo de imagem de um receptor de televisão está se movendo a $7{,}20 \times 10^6$ m/s na presença de um campo magnético de 83,0 mT. Determine (a) o valor máximo e (b) o valor mínimo da força que o campo magnético pode exercer sobre o elétron. (c) Em um certo instante o elétron tem uma aceleração de módulo $4{,}90 \times 10^{14}$ m/s². Qual é o ângulo entre a velocidade do elétron e o campo magnético nesse instante?

69 Um relógio de parede tem um mostrador com 15 cm de raio. Seis espiras de fio são enroladas no mostrador; o fio conduz uma corrente de 2,0 A no sentido horário. No local onde o relógio se encontra existe um campo magnético uniforme de 70 mT (o que não impede o relógio de mostrar corretamente a hora). Exatamente às 13 h o ponteiro das horas do relógio aponta na direção do campo magnético. (a) Após quantos minutos o ponteiro de minutos do relógio aponta na direção do torque exercido pelo campo magnético sobre a bobina? (b) Determine o módulo do torque.

70 Em um experimento de efeito Hall uma corrente de 3,0 A que percorre longitudinalmente um condutor com 1,0 cm de largura, 4,0 cm de comprimento e 10 μm de espessura produz uma diferença de potencial de Hall entre os lados do condutor de 10 μV quando um campo magnético de 1,5 T é aplicado perpendicularmente ao plano do condutor. A partir desses dados determine (a) a velocidade de deriva dos portadores de carga e (b) a concentração dos portadores de carga. (c) Mostre em um diagrama a polaridade da diferença de potencial de Hall com sentidos arbitrados para a corrente e o campo magnético, supondo que os portadores de carga são elétrons.

71 O átomo 1, de massa 35 u, e o átomo 2, de massa 37 u, são ambos monoionizados com uma carga $+e$. Depois de ser introduzido em um espectrômetro de massa (Fig. 28-14) e acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial $V = 7{,}3$ kV, cada íon segue uma trajetória circular em um campo magnético de módulo $B = 0{,}50$ T. Qual é a distância Δx entre os pontos em que os íons atingem o detector?

72 Um elétron com uma energia cinética de 2,5 keV, movendo-se em linha reta no sentido positivo do eixo x, penetra em uma região onde existe um campo elétrico uniforme de módulo 10 kV/m orientado no sentido negativo do eixo y. Deseja-se aplicar um campo $\vec{B}$ na mesma região para que o elétron continue a se mover em linha reta, e a direção de $\vec{B}$ deve ser tal que o módulo de $\vec{B}$ seja o menor possível. Em termos dos vetores unitários, qual deve ser o campo $\vec{B}$?

73 Na Fig. 28-56 um elétron se move com uma velocidade v = 100 m/s ao longo do eixo x, na presença de um campo magnético uniforme e de um campo elétrico uniforme. O campo magnético $\vec{B}$ aponta para dentro do papel e tem módulo 5,00 T. Qual é o campo elétrico em termos dos vetores unitários?

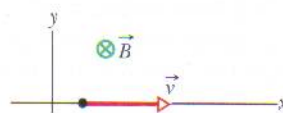



FIG. 28-56 Problema 73.

74 Um feixe de elétrons de energia cinética K emerge de uma "janela" de folha de alumínio na extremidade de um acelerador. A uma distância d dessa janela existe uma placa de metal perpendicular à direção do feixe (Fig. 28-57). (a) Mostre que é possível evitar que o feixe atinja a placa aplicando um campo uniforme $\vec{B}$ tal que

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}},$$

onde m e e são a massa e a carga do elétron. (b) Qual deve ser a orientação de $\vec{B}$?

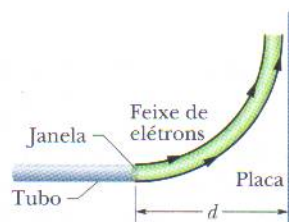



FIG. 28-57 Problema 74.

75 Um próton, um dêuteron ($q = +e, m = 2{,}0$ u) e uma partícula alfa ($q = +2e, m = 4{,}0\ u$) são acelerados pela mesma diferença de potencial e entram em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$, movendo-se perpendicularmente a $\vec{B}$. Determine a razão (a) entre a energia cinética do próton, K_p, e a energia cinética da partícula alfa, K_α; (b) entre a energia cinética do dêuteron, K_d, e K_α. Se o raio da trajetória circular do próton é 10 cm, determine o raio (c) da trajetória do dêuteron e (d) da trajetória da partícula alfa.

76 Um próton de carga $+e$ e massa m penetra com velocidade inicial $\vec{v} = v_{0x}\,\hat{\text{i}} + v_{0y}\,\hat{\text{j}}$ em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B} = B\hat{\text{i}}$. Escreva uma expressão, em termos dos vetores unitários, para a velocidade $\vec{v}$ em qualquer instante de tempo posterior t.

77 Uma partícula de massa 6,0 g está se movendo a 4,0 km/s no plano xy, em uma região onde existe um campo magnético uniforme dado por $5{,}0\hat{\text{i}}$ mT. No instante em que a velocidade da partícula faz um ângulo de 37° no sentido anti-horário com o semi-eixo x positivo, a força magnética que o campo exerce sobre a partícula é $0{,}48\hat{\text{k}}$ N. Qual é a carga da partícula?

78 O espectrômetro de massa de Bainbridge, mostrado de forma esquemática na Fig. 28-58, separa íons de mesma velocidade e mede a razão q/m desses íons. Depois de entrar no aparelho através das fendas colimadoras S_1 e S_2, os íons passam por um seletor de velocidade composto por um campo elétrico produzido pelas placas carregadas P e P′ e por um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao campo elétrico e à trajetória dos íons. Os íons que passam pelos campos cruzados $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sem serem desviados (ou seja, os que possuem uma velocidade E/B), entram em uma região onde existe um segundo campo magnético, $\vec{B}'$ que os faz descrever um semicírculo. Uma placa fotográfica (ou um detec-

tor moderno) registra a posição final dos íons. Mostre que a razão entre a carga e a massa dos íons é dada por $q/m = E/rBB'$, onde r é o raio do semicírculo.

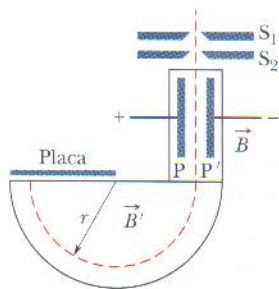



FIG. 28-58 Problema 78.

79 Em um certo instante, $\vec{v} = (-2{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j} - 6{,}00\hat{k})$ m/s é a velocidade de um próton em um campo magnético uniforme $\vec{B} = (2{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j} + 8{,}00\hat{k})$ mT. Nesse instante, determine (a) a força magnética $\vec{F}$ que o campo exerce sobre o próton, em termos dos vetores unitários; (b) o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{F}$; (c) o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

80 (a) Na Fig. 28-8, mostre que a razão entre o módulo E do campo elétrico de Hall e o módulo E_C do campo elétrico responsável pelo movimento das cargas (corrente) é dado por

$$\frac{E}{E_C} = \frac{B}{ne\rho},$$

onde ρ é a resistividade do material e n é a concentração de portadores de carga. (b) Calcule o valor numérico da razão para os dados do Problema 13. (Veja a Tabela 26-1.)

81 No instante $t = 0$ um elétron com uma energia cinética de 12 keV, que está se movendo no sentido positivo de um eixo x paralelo à componente horizontal do campo magnético $\vec{B}$ da Terra, passa pelo ponto $x = 0$. A componente vertical do campo aponta para baixo e tem um módulo de 55,0 μT. (a) Qual é o módulo da aceleração do elétron produzida pelo campo $\vec{B}$? (b) Qual é a distância a que se encontra o elétron do eixo x quando chega ao ponto de coordenada $x = 20$ cm?

82 A velocidade de um elétron é $\vec{v} = (32\hat{i} + 40\hat{j})$ km/s no instante em que penetra em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = 60\hat{i}$ μT. Determine (a) o raio da trajetória helicoidal do elétron; (b) o passo da trajetória. (c) Para um observador que olha para a região onde existe o campo magnético a partir do ponto de entrada do elétron, o elétron se move no sentido horário ou no sentido anti-horário?

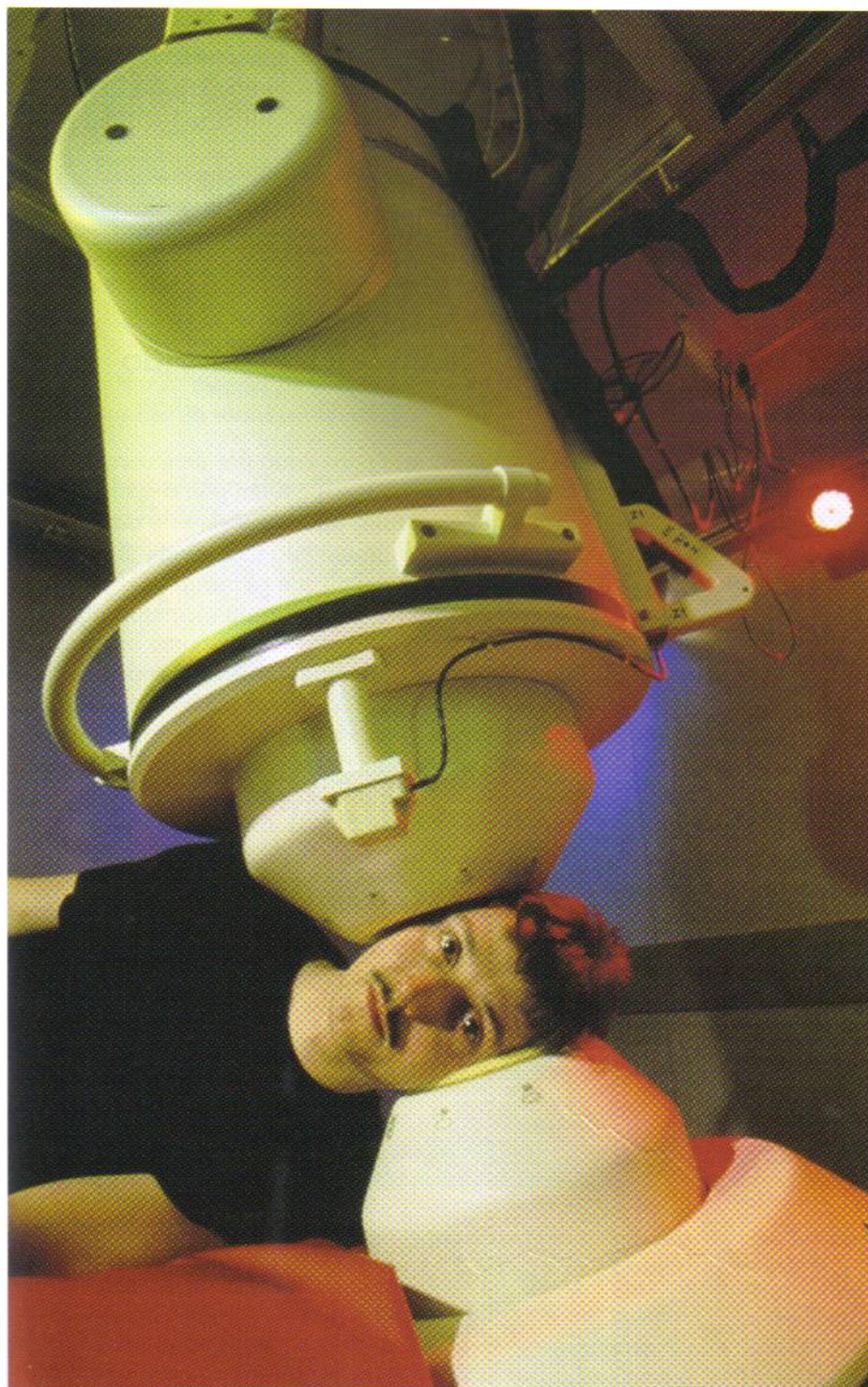
83 Um próton, um dêuteron ($q = +e, m = 2{,}0$ u) e uma partícula alfa ($q = +2e, m = 4{,}0$ u), todos com a mesma energia cinética, entram em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ movendo-se perpendicularmente a $\vec{B}$. Determine a razão (a) entre o raio r_d da trajetória do dêuteron e o raio r_p da trajetória do próton; (b) entre o raio r_α da trajetória da partícula alfa e r_p.

84 Uma partícula de carga 2,0 C está se movendo na presença de um campo magnético uniforme. Em um certo instante, a velocidade da partícula é $(2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 6{,}0\hat{k})$ m/s e a força magnética experimentada pela partícula é $(4{,}0\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k})$ N. As componentes x e y do campo magnético são iguais. Qual é o campo $\vec{B}$?

85 Uma partícula com uma carga de 5,0 μC está se movendo em uma região onde existem um campo magnético de $-20\hat{i}$ mT e um campo elétrico de $300\hat{j}$ V/m. Em um certo instante a velocidade da partícula é $(17\hat{i} - 11\hat{j} + 7{,}0\hat{k})$ km/s. Nesse instante, em termos dos vetores unitários, qual é a força eletromagnética total (a soma das forças elétrica e magnética) a que a partícula está submetida?

86 Um fio situado sobre o eixo x, entre os pontos $x = 0$ e $x =$ 1,00 m, conduz uma corrente de 3,00 A no sentido positivo do eixo. Na região existe um campo magnético não-uniforme dado por $\vec{B} = (4{,}00 \text{ T/m}^2)x^2\hat{i} - (0{,}600 \text{ T/m}^2)x^2\hat{j}$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força magnética que o campo exerce sobre o fio?

87 Prove que a relação $\tau = NiAB$ sen θ é válida não só para a espira retangular da Fig. 28-22, mas também para uma espira fechada de qualquer forma. (*Sugestão:* Substitua a espira de forma arbitrária por um conjunto de espiras longas, finas, aproximadamente retangulares, que sejam quase equivalentes à espira de forma arbitrária no que diz respeito à distribuição de corrente.)

Campos Magnéticos Produzidos por Correntes

Jurgen Scriba/Photo Researchers

Enquanto você lê esta frase uma certa região do cérebro é ativada. Quando aprecia o perfume de uma rosa ou segura um lápis outras regiões se tornam ativas. Uma das melhores formas de descobrir quais são as regiões ativadas é detectar o campo magnético produzido pela ativação. O aparelho mostrado na fotografia pode detectar o campo magnético produzido pelo cérebro de uma pessoa, o que permite estabelecer uma correlação entre as regiões ativas do cérebro e o que a pessoa está fazendo no momento. Entretanto, o cérebro não contém substâncias magnéticas.

Nesse caso, por que a ativação do cérebro produz um campo magnético?

A resposta está neste capítulo.

29-1 O QUE É FÍSICA?

Uma observação básica da física é a de que as partículas carregadas em movimento produzem campos magnéticos. Isso significa que uma corrente elétrica também produz um campo magnético. Esse aspecto do *eletromagnetismo*, que é o estudo combinado dos efeitos elétricos e magnéticos, foi uma surpresa para os cientistas na época em que foi descoberto. Surpresa ou não, ele se tornou extremamente importante para a vida cotidiana, já que constitui a base para um número imenso de dispositivos eletromagnéticos. Assim, por exemplo, os campos magnéticos produzidos por correntes elétricas estão presentes em todos os aparelhos que gravam e lêem informações em forma magnética, como os discos rígidos dos computadores. Esses campos também estão presentes em trens levitados magneticamente e outras máquinas usadas para levantar grandes pesos.

Nosso primeiro passo neste capítulo será determinar o campo magnético produzido pela corrente em um pequeno elemento de um fio percorrido por corrente. Em seguida, vamos calcular o campo magnético total produzido por fios de diferentes formas.

29-2 | Cálculo do Campo Magnético Produzido por uma Corrente

A Fig. 29-1 mostra um fio de forma arbitrária percorrido por uma corrente i. Estamos interessados em calcular o campo magnético $\vec{B}$ em um ponto próximo P. Para isso, dividimos mentalmente o fio em elementos infinitesimais ds e definimos para cada elemento um vetor comprimento $d\vec{s}$ cujo módulo é ds e cuja direção é a direção da corrente no elemento ds. Podemos definir um *elemento de corrente* como $i\,d\vec{s}$ e calcular o campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P por um elemento de corrente típico. Os experimentos mostram que os campos magnéticos, como os campos elétricos, podem ser somados para determinar o campo total. Assim, podemos calcular o campo total $\vec{B}$ no ponto P somando, por integração, as contribuições $d\vec{B}$ de todos os elementos de corrente. Entretanto, esse processo é um pouco mais complicado do que no caso do campo elétrico por causa de uma diferença: enquanto o elemento de carga dq que produz o campo elétrico é uma grandeza escalar, o elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ responsável pelo campo magnético é o produto de uma grandeza escalar por uma grandeza vetorial e, portanto, é uma grandeza vetorial.

O módulo do campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P por um elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,\theta}{r^2}, \qquad (29\text{-}1)$$

FIG. 29-1 Um elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ produz um elemento de campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P. O × verde (que representa a extremidade traseira de uma seta) no ponto P indica que o sentido do campo $d\vec{B}$ é *para dentro* do papel.

onde θ é o ângulo entre as direções de $d\vec{s}$ e $\hat{r}$, o vetor que liga ds a P, e μ_0 é uma constante, conhecida como *permeabilidade do vácuo*, cujo valor, por definição, é dado por

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A} \approx 1{,}26 \times 10^{-6}\ \text{T}\cdot\text{m/A}. \qquad (29\text{-}2)$$

A direção de $d\vec{B}$, que é para dentro do papel na Fig. 29-1, é a do produto vetorial $d\vec{s} \times \hat{r}$. Podemos, portanto, escrever a Eq. 29-1, em forma vetorial, como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{(lei de Biot-Savart).} \qquad (29\text{-}3)$$

Esta equação vetorial e sua forma escalar, Eq. 29-1, são conhecidas como **lei de Biot-Savart**. A lei, que se baseia em observações experimentais, é do tipo inverso do qua-

FIG. 29-2 As linhas de campo magnético produzidas por uma corrente em um fio retilíneo longo são círculos concêntricos em torno do fio. Na figura, o sentido da corrente é para dentro do papel, como indica o símbolo ×.

FIG. 29-3 A limalha de ferro que tinha sido espalhada em um pedaço de cartolina forma círculos concêntricos quando uma corrente atravessa o fio central. O alinhamento, que coincide com as linhas de campo magnético, é causado pelo campo magnético produzido pela corrente. *(Cortesia do Education Development Center)*

drado. Vamos usar essa lei para calcular o campo magnético total $\vec{B}$ produzido em um ponto por fios de várias geometrias.

Campo Magnético Produzido pela Corrente em um Fio Retilíneo Longo

Daqui a pouco vamos usar a lei de Biot-Savart para mostrar que o módulo do campo magnético a uma distância perpendicular R de um fio retilíneo longo (infinito) percorrido por uma corrente i é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{(fio retilíneo longo).} \tag{29-4}$$

O módulo do campo B na Eq. 29-4 depende apenas da corrente e da distância perpendicular R entre o ponto e o fio. Vamos mostrar que as linhas de campo de $\vec{B}$ formam circunferências concêntricas em torno do fio, como se pode ver no diagrama da Fig. 29-2 e no padrão formado por limalha de ferro na Fig. 29-3. O aumento do espaçamento das linhas com o aumento da distância na Fig. 29-2 reflete o fato de que o módulo de $\vec{B}$, de acordo com a Eq. 29-4, é inversamente proporcional a R. Os comprimentos dos dois vetores $\vec{B}$ que aparecem na figura também mostram essa diminuição de B com a distância.

Existe uma regra da mão direita para determinar a orientação do campo magnético produzido por um elemento de corrente:

Regra da mão direita: Envolva o elemento de corrente com a mão direita, com o polegar estendido apontando no sentido da corrente. Os outros dedos mostram a orientação das linhas de campo magnético produzidas pelo elemento.

O resultado da aplicação da regra da mão direita à corrente no fio retilíneo da Fig. 29-2 é mostrado, em uma vista lateral, na Fig. 29-4*a*. Para determinar a direção do campo magnético $\vec{B}$ produzido por essa corrente em um ponto do espaço envolva mentalmente o fio com a mão direita, com o polegar apontando no sentido da corrente. Faça com que a ponta do dedo indicador coincida com o ponto; a orientação do dedo indicador é a orientação do campo magnético nesse ponto. Na vista em seção reta da Fig. 29-2, $\vec{B}$ em qualquer ponto é *tangente a uma linha de campo magnético*; na vista lateral da Fig. 29-4, $\vec{B}$ é *perpendicular à reta que liga o ponto ao fio*.

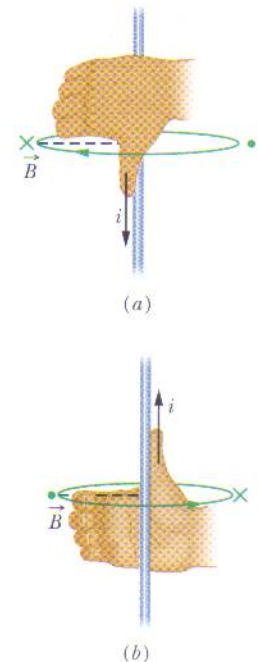



FIG. 29-4 A regra da mão direita mostra a direção do campo magnético produzido pela corrente em um fio. (*a*) Vista lateral do resultado da aplicação da regra da mão direita à corrente no fio retilíneo da Fig. 29-2. O campo magnético $\vec{B}$ em qualquer ponto à esquerda do fio é perpendicular à reta tracejada e aponta para dentro do papel, no sentido das pontas dos dedos, como indica o símbolo ×. (*b*) Quando o sentido da corrente é invertido o campo $\vec{B}$ em qualquer ponto à esquerda do fio continua a ser perpendicular à reta tracejada, mas passa a apontar para fora do papel, como indica o símbolo •.

Demonstração da Equação 29-4

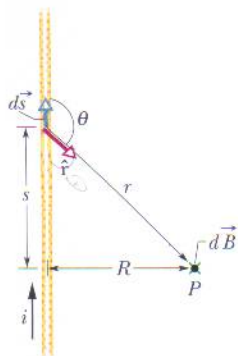



FIG. 29-5 Cálculo do campo magnético produzido por uma corrente i em um fio retilíneo longo. O campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P pelo elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ aponta para dentro do papel, como indica o símbolo ×.

A Fig. 29-5, que é semelhante à Fig. 29-1 exceto pelo fato de que agora o fio é retilíneo e de comprimento infinito, ilustra bem o processo. Queremos calcular o campo $\vec{B}$ no ponto P, a uma distância perpendicular R do fio. O módulo do campo elementar produzido no ponto P por um elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ situado a uma distância r do ponto P é dado pela Eq. 29-1:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,\theta}{r^2}.$$

A orientação de $d\vec{B}$ na Fig. 29-5 é a do vetor $d\vec{s} \times \hat{r}$, ou seja, para dentro do papel.

Observe que $d\vec{B}$ no ponto P tem a mesma orientação para todos os elementos de corrente nos quais o fio pode ser dividido. Assim, podemos calcular o módulo do campo magnético produzido no ponto P pelos elementos de corrente na metade superior de um fio infinitamente longo integrando dB na Eq. 29-1 de 0 a ∞.

Considere agora um elemento de corrente na metade inferior do fio que esteja uma distância tão grande abaixo de P quanto $d\vec{s}$ está acima de P. De acordo com a Eq. 29-3, o campo magnético produzido no ponto P por este elemento de corrente tem o mesmo módulo e a mesma orientação que o campo magnético produzido pelo elemento $i\,d\vec{s}$ da Fig. 29-5. Assim, o campo magnético produzido pela metade inferior do fio é igual ao campo magnético produzido pela metade superior. Para determinar o módulo do campo magnético $\vec{B}$ *total* no ponto P basta, portanto, multiplicar por 2 o resultado da integração, o que nos dá

$$B = 2\int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,\theta\,ds}{r^2}. \tag{29-5}$$

As variáveis θ, s e r nesta equação não são independentes; como se pode ver na Fig. 29-5, estão relacionadas através das equações

$$r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

e

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Fazendo essas substituições e usando a integral 19 do Apêndice E, obtemos:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R\,ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}, \end{aligned} \tag{29-6}$$

que é a equação que queríamos demonstrar. Observe que o campo magnético no ponto P produzido pela metade inferior ou pela metade superior do fio infinito da Fig. 29-5 é metade desse valor, ou seja,

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad \text{(fio retilíneo semi-infinito).} \tag{29-7}$$

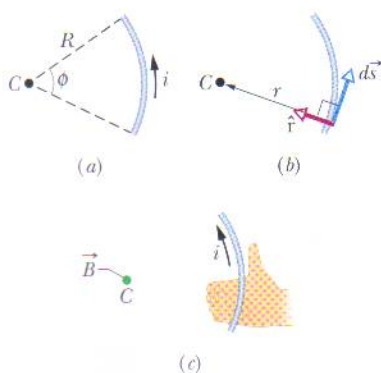



FIG. 29-6 (a) Um fio em forma de arco de circunferência com centro no ponto C e percorrido por uma corrente i. (b) Para qualquer elemento de comprimento ao longo do arco o ângulo entre as direções $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ é 90°. (c) Determinação da direção do campo magnético produzido pela corrente no ponto C usando a regra da mão direita; o campo aponta para fora do papel, no sentido das pontas dos dedos, como indica o símbolo •.

Campo Magnético Produzido por uma Corrente em um Fio em Forma de Arco de Circunferência

Para determinar o campo magnético produzido em um ponto por uma corrente em um fio curvo usamos mais uma vez a Eq. 29-1 para calcular o módulo do campo produzido por um elemento de corrente e integramos o resultado para obter o campo total produzido por todos os elementos de corrente. Essa integração pode ser difícil, dependendo da forma do fio; é relativamente simples, porém, quando o fio tem a forma de um arco de circunferência e o ponto é o centro de curvatura.

A Fig. 29-6*a* mostra um fio em forma de arco de circunferência de ângulo central ϕ, raio R e centro C, percorrido por uma corrente i. No ponto C cada elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ do fio produz um campo magnético de módulo dB dado pela Eq. 29-1. Além disso, como mostra a Fig. 29-6*b*, qualquer que seja a posição do elemento no fio o ângulo θ entre os vetores $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ é 90° e $r = R$. Fazendo $\theta = 90°$ e $r = R$ na Eq. 29-1, obtemos:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds \operatorname{sen} 90°}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds}{R^2}. \tag{29-8}$$

Este é o módulo do campo produzido no ponto C por um dos elementos de corrente.

A aplicação da regra da mão direita a um ponto qualquer do fio (como na Fig. 29-6*c*) mostra que todos os elementos de campo $d\vec{B}$ têm a mesma orientação no ponto C: para fora do papel. Podemos usar a identidade $ds = R\,d\phi$ para converter a variável de integração de ds para $d\phi$ e obter, a partir da Eq. 29-8,

$$B = \int dB = \int_0^{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iR\,d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_0^{\phi} d\phi.$$

Integrando, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R} \quad \text{(no centro de um arco de circunferência).} \tag{29-9}$$

Observe que essa equação é válida *apenas* para o campo no centro de curvatura do fio. Ao substituir as variáveis da Eq. 29-9 por valores numéricos é preciso não esquecer que o valor de ϕ deve ser expresso em radianos. Assim, por exemplo, para calcular o módulo do campo magnético no centro de uma circunferência completa de fio ϕ deve ser substituído por 2π na Eq. 29-9, o que nos dá

$$B = \frac{\mu_0 i(2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \text{(no centro de uma circunferência completa).} \tag{29-10}$$

Campo Magnético Produzido pela Atividade Cerebral

Os cientistas têm grande interesse em compreender como o cérebro funciona. Um dos novos métodos para estudar o funcionamento do cérebro é a *magnetencefalografia* (MEG), que consiste em monitorar os campos magnéticos produzidos pelo cérebro enquanto o paciente realiza uma tarefa, como ler uma palavra, por exemplo. A tarefa ativa uma região do cérebro, como a que processa a leitura, fazendo com que pulsos elétricos sejam enviados ao longo de circuitos nervosos. Como acontece com qualquer corrente, esses pulsos produzem campos magnéticos.

Os campos magnéticos detectados pela MEG são provavelmente produzidos por pulsos nas paredes das fissuras (sulcos) existentes na superfície do cérebro (Fig. 29-7). Vamos usar a Eq. 29-1 para estimar a intensidade desse campo em um ponto P situado a uma distância $r = 2$ cm do pulso. Suponha que a trajetória do pulso seja tangente à superfície do cérebro, caso em que o ângulo θ da Eq. 29-1 é 90°. Em um pulso típico a corrente é $i = 10\ \mu$A, e a distância percorrida é da ordem de 1 mm. Vamos tomar essa distância como sendo o elemento de comprimento ds na Eq. 29-1. Nesse caso, temos:

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})}{4\pi}\frac{(10 \times 10^{-6}\ \text{A})(1 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} \operatorname{sen} 90°$$
$$= 2{,}5 \times 10^{-12}\ \text{T} \approx 3\ \text{pT}.$$

Trata-se de um campo *extremamente* pequeno, mais de um milhão de vezes mais fraco que o campo magnético terrestre. Assim, para detectar os campos magnéticos produzidos pelo cérebro não podemos simplesmente colocar uma bússola perto do

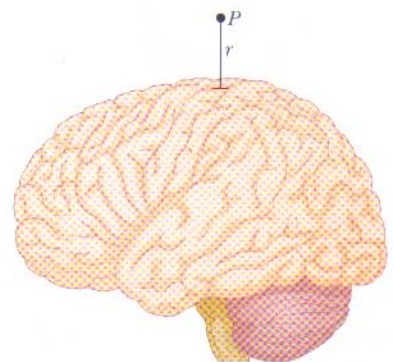



FIG. 29-7 Um pulso na parede de uma fissura na superfície do cérebro produz um campo magnético no ponto P situado a uma distância r.

cérebro e esperar que a atividade cerebral produza um movimento da agulha. Na verdade, os campos magnéticos do cérebro só podem ser detectados com o auxílio de um instrumento muito sensível, conhecido com SQUID (*superconducting quantum interference device*), capaz de medir campos menores que 1 pT, e mesmo assim é preciso tomar cuidado para eliminar outras fontes de campos magnéticos variáveis nas vizinhanças.

Exemplo 29-1 Aumente sua capacidade

O fio da Fig. 29-8*a* é percorrido por uma corrente i e tem a forma de um arco de circunferência de raio R e ângulo central $\pi/2$ rad, ladeado por dois trechos retilíneos cujos prolongamentos se interceptam no centro C do arco. Determine o campo magnético $\vec{B}$ no ponto C.

FIG. 29-8 (*a*) Fio formado por dois segmentos retilíneos (1 e 2) e um arco de circunferência (3) e percorrido por uma corrente i. (*b*) Para um elemento de corrente na seção 1, o ângulo entre $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ é zero. (*c*) Determinação da direção do campo magnético $\vec{B}_3$ produzido pelo arco de circunferência no ponto C; o sentido do campo é para dentro do papel.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar o campo magnético $\vec{B}$ no ponto C aplicando ao fio a lei de Biot-Savart (Eq. 29-3). A aplicação da Eq. 29-3 pode ser simplificada calculando $\vec{B}$ separadamente para as três partes do fio, a saber: (1) o trecho retilíneo da esquerda; (2) o trecho retilíneo da direita; (3) o arco de circunferência.

Trechos retilíneos: Para qualquer elemento de corrente da parte 1, o ângulo θ entre $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ é zero (Fig. 29-8*b*) e, portanto, de acordo com a Eq. 29-1,

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,0}{r^2} = 0.$$

Assim, a contribuição de toda a parte 1 para o campo magnético no ponto C é

$$B_1 = 0.$$

O mesmo acontece na parte 2, em que o ângulo θ entre $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ é 180° para qualquer elemento de corrente. Assim,

$$B_2 = 0.$$

Arco de circunferência: O uso da lei de Biot-Savart para calcular o campo magnético no centro de um arco de circunferência leva à Eq. 29-9 ($B = \mu_0 i\phi/4\pi R$). No nosso caso o ângulo central ϕ do arco é $\pi/2$ rad. Assim, de acordo com a Eq. 29-9 o módulo do campo magnético $\vec{B}_3$ no centro C do arco é dado por

$$B_3 = \frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{8R}.$$

Para determinar a orientação de $\vec{B}_3$ aplicamos a regra da mão direita, como mostra a Fig. 29-4. Segure mentalmente o arco de circunferência com a mão direita, como na Fig. 29-8*c*, com o polegar apontando no sentido da corrente. Os outros dedos indicam a orientação do campo magnético nas vizinhanças do fio. Na região em que se encontra o ponto C (no interior do arco de circunferência) os dedos apontam *para dentro* do papel. Assim, $\vec{B}_3$ tem essa orientação.

Campo total: Em geral, quando é necessário combinar dois ou mais campos magnéticos para obter o campo magnético total precisamos executar uma soma vetorial, e não simplesmente somar os módulos. Neste caso, porém, apenas o arco de circunferência produz um campo magnético diferente de zero no ponto C. Assim, podemos escrever o módulo do campo total $\vec{B}$ como

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 i}{8R} = \frac{\mu_0 i}{8R}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A orientação de $\vec{B}$ é a orientação de $\vec{B}_3$, ou seja, para dentro do papel na Fig. 29-8.

Exemplo 29-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 29-9a mostra dois fios paralelos longos percorridos por correntes i_1 e i_2 em sentidos opostos. Determine o módulo e a orientação do campo magnético total no ponto P para $i_1 = 15$ A, $i_2 = 32$ A e $d = 5{,}3$ cm.

FIG. 29-9 (a) Dois fios conduzem correntes i_1 e i_2 em sentidos opostos (para fora e para dentro do papel). Observe o ângulo reto no ponto P. (b) O campo total $\vec{B}$ é a soma vetorial dos campos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$.

IDÉIA-CHAVE (1) O campo magnético total $\vec{B}$ no ponto P é a soma vetorial dos campos magnéticos produzidos pelas correntes nos dois fios. (2) Podemos calcular o campo magnético produzido por qualquer corrente aplicando a lei de Biot-Savart à corrente. No caso de pontos próximos de um fio longo e retilíneo, a lei leva à Eq. 29-4.

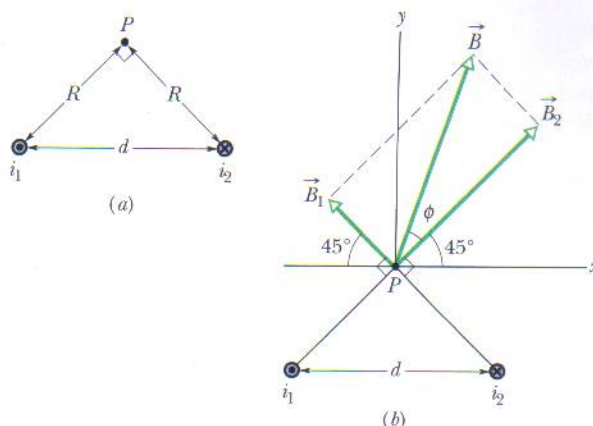
Determinação dos vetores: Na Fig. 29-9a o ponto P está a uma distância R das correntes i_1 e i_2. De acordo com a Eq. 29-4, essas correntes produzem no ponto P campos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$, cujos módulos são dados por

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}.$$

Observe, no triângulo retângulo da Fig. 29-9a, que os ângulos da base (entre os lados R e d) são 45°. Isso nos permite escrever $\cos 45° = R/d$ e substituir R por $d \cos 45°$. Nesse caso, os módulos dos campos magnéticos, B_1 e B_2, se tornam

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d \cos 45°} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d \cos 45°}.$$

Estamos interessados em combinar $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ para obter a soma dos dois vetores, que é o campo total $\vec{B}$ no ponto P. Para determinar a orientação de $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ aplicamos a regra da mão direita da Fig. 29-4 às duas correntes da Fig. 29-9a. No caso do fio 1, em que a corrente é para fora do papel, seguramos mentalmente o fio com a mão direita, com o polegar apontando para fora do papel. Nesse caso os outros dedos indicam que as linhas de campo têm o sentido anti-horário. Em particular, na região do ponto P apontam para cima e para a esquerda. Lembre-se de que o campo magnético em um ponto nas proximidades de um fio longo percorrido por corrente é perpendicular ao fio e a uma reta perpendicular ao fio passando pelo ponto. Assim, o sentido de $\vec{B}_1$ é para cima e para a esquerda, como mostra a Fig. 29-9b. (Observe no desenho que o vetor $\vec{B}_1$ é perpendicular à reta que liga o ponto P ao fio 1.)

Repetindo a análise para a corrente no fio 2, descobrimos que o sentido de $\vec{B}_2$ é para cima e para a direita, como mostra a Fig. 29-9b. (Observe no desenho que o vetor $\vec{B}_2$ é perpendicular à reta que liga o ponto P ao fio 2.)

Soma dos vetores: Podemos agora somar vetorialmente $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ para determinar o campo magnético $\vec{B}$ no ponto P. Isso pode ser feito usando uma calculadora científica ou trabalhando com as componentes dos vetores. Entretanto, existe um terceiro método: como $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ são mutuamente perpendiculares, formam os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $\vec{B}$. De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d(\cos 45°)}\sqrt{i_1^2 + i_2^2}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\sqrt{(15\ \text{A})^2 + (32\ \text{A})^2}}{(2\pi)(5{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m})(\cos 45°)}$$

$$= 1{,}89 \times 10^{-4}\ \text{T} \approx 190\ \mu\text{T}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O ângulo ϕ entre as direções de $\vec{B}$ e $\vec{B}_2$ na Fig. 29-9b é dado pela equação

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_1}{B_2},$$

que, para os valores conhecidos de B_1 e B_2, nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{i_1}{i_2} = \tan^{-1}\frac{15\ \text{A}}{32\ \text{A}} = 25°.$$

O ângulo entre a direção de $\vec{B}$ e o eixo x na Fig. 29-9b é portanto

$$\phi + 45° = 25° + 45° = 70°. \qquad \text{(Resposta)}$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Regras da Mão Direita* Para ajudar o leitor a interpretar as regras da mão direita vistas até o momento (e que serão vistas mais adiante), apresentamos a seguir uma revisão dessas regras.

Regra da Mão Direita para Produtos Vetoriais. Descrita na Seção 3-8, essa regra é usada para determinar a orientação do vetor resultante de um produto vetorial. Aponte os dedos da mão direita do primeiro vetor para o segundo, passando pelo menor

ângulo entre os dois vetores; o polegar estendido mostra a direção do vetor resultante do produto vetorial. No Capítulo 11 essa regra foi usada para determinar a orientação dos vetores torque e momento angular; no Capítulo 28, para determinar a orientação da força exercida por um campo magnético sobre um fio percorrido por corrente.

Regras da Mão Direita para o Magnetismo. Em muitas situações ligadas ao magnetismo é preciso relacionar um elemento "circular" a um elemento "retilíneo". Para isso, são usados os dedos (encurvados) e o polegar (estendido) da mão direita. Já vimos um exemplo na Seção 28-9, na qual relacionamos a corrente em uma espira (elemento circular) ao vetor normal $\vec{n}$ (elemento retilíneo). Envolva a espira com os dedos da mão direita apontados na direção da corrente o polegar estendido mostra a direção de $\vec{n}$. Esta é também a direção do momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ da espira.

Nesta seção foi apresentada mais uma regra da mão direita relacionada ao magnetismo. Para determinar a orientação das linhas de campo magnético nas vizinhanças de um elemento de corrente envolva o elemento de corrente com a mão direita, com o polegar estendido apontando no sentido da corrente; os outros dedos mostram a orientação das linhas de campo.

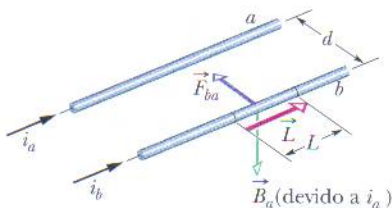



FIG. 29-10 Dois fios paralelos que conduzem correntes no mesmo sentido se atraem mutuamente. $\vec{B}_a$ é o campo magnético no fio b devido à corrente no fio a. $\vec{F}_{ba}$ é a força que age sobre o fio b porque o fio conduz uma corrente i_b na presença do campo $\vec{B}_a$.

29-3 | Forças entre Duas Correntes Paralelas

Dois longos fios paralelos, percorridos por correntes, exercem forças um sobre o outro. A Fig. 29-10 mostra dois desses fios, percorridos por correntes i_a e i_b e separados por uma distância d. Vamos analisar as forças exercidas pelos fios.

Vamos calcular primeiro a força produzida pela corrente no fio a sobre o fio b da Fig. 29-10. A corrente produz um campo magnético $\vec{B}_a$, e é esse campo que produz a força que estamos querendo calcular. Para determinar a força, portanto, precisamos conhecer o módulo e a orientação do campo $\vec{B}_a$ *na posição do fio b*. De acordo com a Eq. 29-4, o módulo de $\vec{B}_a$ em qualquer ponto do fio b é dado por

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}. \tag{29-11}$$

De acordo com a regra da mão direita, o sentido do campo $\vec{B}_a$ na posição do fio b é para baixo, como mostra a Fig. 29-10.

Agora que conhecemos o campo, podemos calcular a força exercida sobre o fio b. De acordo com a Eq. 28-26, a força $\vec{F}_{ba}$ a que está submetido um segmento L do fio b devido à presença do campo magnético externo $\vec{B}_a$ é dada por

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a, \tag{29-12}$$

onde $\vec{L}$ é o vetor comprimento do fio. Na Fig. 29-10 os vetores $\vec{L}$ e $\vec{B}_a$ são mutuamente perpendiculares e, portanto, de acordo com a Eq. 29-11, podemos escrever

$$F_{ba} = i_b L B_a \operatorname{sen} 90° = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}. \tag{29-13}$$

A direção de $\vec{F}_{ba}$ é a direção do produto vetorial $\vec{L} \times \vec{B}_a$. Aplicando a regra da mão direita para produtos vetoriais a $\vec{L}$ e $\vec{B}_a$ na Fig. 29-10 vemos que $\vec{F}_{ba}$ aponta na direção do fio a, como mostra a figura.

A regra geral para determinar a força exercida sobre um fio percorrido por corrente é a seguinte:

> Para determinar a força exercida sobre um fio percorrido por corrente por outro fio percorrido por corrente determine primeiro o campo produzido pelo segundo fio na posição do primeiro; em seguida, determine a força exercida pelo campo sobre o primeiro fio.

Podemos usar esse método para determinar a força exercida sobre o fio a pela corrente que circula no fio b. O resultado é que a força aponta na direção do fio b, o que significa que dois fios com correntes paralelas se atraem. No caso em que as correntes têm sentidos opostos nos dois fios o resultado mostra que as forças apontam para longe dos dois fios, ou seja, os fios se repelem. Assim,

> Correntes paralelas se atraem e correntes antiparalelas se repelem.

A força que age entre correntes em fios paralelos é usada para definir o ampère, uma das sete unidades básicas do SI. A definição, adotada em 1946, é a seguinte: "O ampère é a corrente constante que, quando mantida em dois condutores retilíneos, paralelos, de comprimento infinito e seção reta desprezível, separados por 1 m de distância no vácuo, produz em cada um uma força de módulo 2×10^{-7} newtons por metro de comprimento dos fios".

Canhão Eletromagnético

Uma das aplicações da força dada pela Eq. 29-13 é o canhão eletromagnético. Nesse aparelho uma força magnética acelera um projétil, fazendo-o adquirir uma alta velocidade em um curto período de tempo. A Fig. 29-11*a* mostra o princípio de funcionamento do canhão eletromagnético. Uma corrente elevada é estabelecida em um circuito formado por dois trilhos paralelos e um "fusível" condutor (uma barra de cobre, por exemplo) colocado entre os trilhos. O projétil a ser lançado fica perto da extremidade mais distante do fusível, encaixado frouxamente entre os trilhos. Quando a corrente é aplicada o fusível se funde e logo se vaporiza, criando um gás condutor entre os trilhos na região onde se encontrava.

Aplicando a regra da mão direita da Fig. 29-4, vemos que as correntes nos trilhos da Fig. 29-11*a* produzem um campo magnético $\vec{B}$ dirigido para baixo na região entre os trilhos. Esse campo magnético exerce uma força $\vec{F}$ sobre o gás devido à corrente i que existe no gás (Fig. 29-11*b*). De acordo com a Eq. 29-12 e a regra da mão direita para produtos vetoriais, a força $\vec{F}$ é paralela aos trilhos e aponta para longe do fusível. Assim, o gás é arremessado contra o projétil, imprimindo-lhe uma aceleração de até $5 \times 10^6 g$ e lançando-o com uma velocidade de 10 km/s, tudo isso em um intervalo de tempo menor que 1 ms. Talvez, no futuro, os canhões eletromagnéticos venham a ser usados para lançar no espaço materiais resultantes de operações de mineração na Lua ou em asteróides.

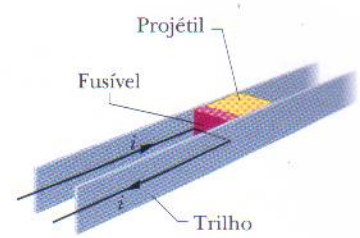
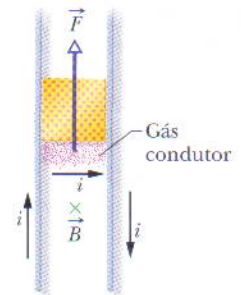
Projétil
Fusível
i
i
Trilho
(*a*)

$\vec{F}$
Gás condutor
i
i
$\vec{B}$
i
(*b*)

FIG. 29-11 (*a*) Princípio de funcionamento de um canhão eletromagnético. Uma corrente elevada provoca a vaporização de um fusível condutor. (*b*) A corrente produz um campo magnético $\vec{B}$ entre os trilhos, que exerce uma força $\vec{F}$ sobre o gás devido à corrente i que existe no gás. O gás é arremessado contra o projétil, lançando-o ao espaço.

TESTE 1 A figura mostra três fios longos, paralelos, igualmente espaçados, percorridos por correntes de mesmo valor absoluto, duas para fora do papel e uma para dentro do papel. Coloque os fios na ordem do módulo da força a que estão sujeitos devido à corrente nos outros dois fios, começando pelo maior.

a *b* *c*

29-4 | Lei de Ampère

É possível calcular o campo elétrico total associado a *qualquer* distribuição de cargas escrevendo o campo elétrico elementar $d\vec{E}$ produzido por um elemento de carga dq e somando as contribuições de todos os elementos de carga. No caso de uma distribuição complicada de cargas o cálculo pode exigir o uso de um computador. Entretanto, como vimos, se a distribuição possui simetria planar, cilíndrica ou esférica podemos usar a lei de Gauss para determinar o campo elétrico total, o que facilita consideravelmente os cálculos.

Do mesmo modo, é possível calcular o campo magnético total associado a *qualquer* distribuição de correntes escrevendo o campo magnético elementar $d\vec{B}$ (Eq. 29-3) produzido por um elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ e somando as contribuições de todos os elementos de corrente. No caso de uma distribuição complicada de correntes o cálculo pode exigir o uso de um computador. Entretanto, se a distribuição possui algum tipo de simetria podemos usar a **lei de Ampère** para determinar o campo magnético total, o que facilita consideravelmente os cálculos. Embora essa lei, que pode ser demonstrada a partir da lei de Biot-Savart, tenha recebido o nome do físico francês André-Marie Ampère (1775-1836), foi na realidade proposta pelo físico inglês James Clerk Maxwell (1831-1879).

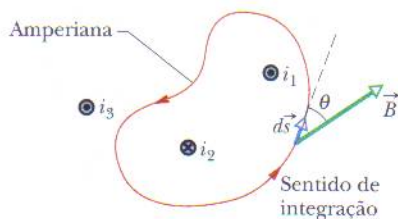



FIG. 29-12 Aplicação da lei de Ampère a uma amperiana arbitrária que envolve dois fios retilíneos longos, mas não um terceiro. Observe o sentido das correntes.

De acordo com a lei de Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{env} \quad \text{(lei de Ampère).} \tag{29-14}$$

O círculo no sinal de integral indica que a integração do produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ deve ser realizada para uma curva *fechada*, conhecida como *amperiana*. A corrente i_{env} é a corrente *total* envolvida pela curva fechada.

Para compreender melhor o significado do produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ e sua integral vamos aplicar a lei de Ampère à situação geral da Fig. 29-12. A figura mostra as seções retas de três fios longos, perpendiculares ao plano do papel, percorridos por correntes i_1, i_2 e i_3. Uma amperiana arbitrária traçada no plano do papel envolve duas das correntes, mas não a terceira. O sentido anti-horário indicado na amperiana mostra o sentido arbitrariamente escolhido para realizar a integração da Eq. 29-14.

Para aplicar a lei de Ampère dividimos mentalmente a amperiana em elementos de comprimento $d\vec{s}$, que são tangentes à curva e apontam no sentido de integração. Suponha que no local do elemento $d\vec{s}$ que aparece na Fig. 29-12 o campo magnético total devido às correntes nos três fios seja $\vec{B}$. Como os fios são perpendiculares ao plano do papel, sabemos que o campo magnético em $d\vec{s}$ devido a cada uma das correntes está no plano da Fig. 29-12; assim, o campo magnético total também está nesse plano. Entretanto, não conhecemos a orientação de $\vec{B}$ no plano. Na Fig. 29-12 $\vec{B}$ foi desenhado arbitrariamente fazendo um ângulo θ com a direção de $d\vec{s}$.

O produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ do lado esquerdo da Fig. 29-14 é igual a $B \cos \theta \, ds$. Assim, a lei de Ampère pode ser escrita na forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta \, ds = \mu_0 i_{env}. \tag{29-15}$$

Assim podemos interpretar o produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ como o produto de um comprimento elementar ds da amperiana pela componente do campo $B \cos \theta$ tangente à amperiana nesse ponto. Nesse caso, a integral pode ser interpretada como a soma desses produtos para toda a amperiana.

Para executar a integração não precisamos conhecer o sentido de $\vec{B}$ em todos os pontos da amperiana; em vez disso, atribuímos arbitrariamente um sentido para $\vec{B}$ que coincida com o sentido de integração, como na Fig. 29-12, e usamos a seguinte regra da mão direita para atribuir um sinal positivo ou negativo às correntes que contribuem para a corrente total envolvida pela amperiana, i_{env}:

Envolva a amperiana com a mão direita, com os dedos apontando no sentido da integração. Uma corrente no sentido do polegar estendido recebe sinal positivo; uma corrente no sentido oposto recebe sinal negativo.

Finalmente, resolvemos a Eq. 29-15 para obter o módulo de $\vec{B}$. Se B é positivo, isso significa que o sentido escolhido para $\vec{B}$ está correto; se B é negativo, ignoramos o sinal e tomamos $\vec{B}$ com o sentido oposto.

Na Fig. 29-13 aplicamos a regra da mão direita da lei de Ampère à situação da Fig. 29-12. Tomando o sentido de integração como o sentido anti-horário, a corrente total envolvida pela amperiana é

$$i_{env} = i_1 - i_2.$$

(A corrente i_3 está do lado de fora da amperiana.) Assim, de acordo com a Eq. 29-15, temos:

$$\oint B \cos \theta \, ds = \mu_0 (i_1 - i_2). \tag{29-16}$$

FIG. 29-13 Uso da regra da mão direita da lei de Ampère para determinar os sinais das correntes envolvidas por uma amperiana. A situação é a da Fig. 29-12.

O leitor pode estar se perguntando como é possível excluir a corrente i_3 do lado direito da Eq. 29-16, já que ela contribui para o módulo B do campo magnético do

lado esquerdo da equação. A resposta é que as contribuições da corrente i_3 para o campo magnético se cancelam quando a integração da Eq. 29-16 é realizada para uma curva fechada. O mesmo, porém, não acontece no caso das correntes envolvidas pela curva.

No caso da Fig. 29-12 não podemos usar a Eq. 29-16 para obter o módulo B do campo magnético, porque não dispomos de informações suficientes para simplificar e resolver a integral. Entretanto, conhecemos o resultado da integração: é $\mu_0(i_1 - i_2)$, o valor obtido a partir das correntes envolvidas pela amperiana.

Vamos agora aplicar a lei de Ampère a duas situações nas quais a simetria permite simplificar e resolver a integral e, assim, calcular o campo magnético.

FIG. 29-14 Uso da lei de Ampère para determinar o campo magnético produzido por uma corrente i do lado de fora de um fio retilíneo longo de seção reta circular. A amperiana é uma circunferência concêntrica com um raio maior que o raio do fio.

Campo Magnético nas Vizinhanças de um Fio Longo Retilíneo Percorrido por Corrente

A Fig. 29-14 mostra um fio longo retilíneo percorrido por uma corrente i dirigida para fora do plano do papel. De acordo com a Eq. 29-4, o campo magnético $\vec{B}$ produzido pela corrente tem o mesmo módulo em todos os pontos situados a uma distância r do fio, ou seja, possui simetria cilíndrica em relação ao fio. Podemos tirar vantagem dessa simetria para simplificar a integral que aparece na lei de Ampère (Eqs. 29-14 e 29-15); para isso, envolvemos o fio em um amperiana circular concêntrica de raio r, como na Fig. 29-14. O campo magnético $\vec{B}$ tem o mesmo módulo B em todos os pontos da amperiana. Como vamos realizar a integração no sentido anti-horário, $d\vec{s}$ tem o sentido indicado na Fig. 29-14.

Podemos simplificar a expressão $B \cos \theta$ da Eq. 29-15 observando que tanto $\vec{B}$ como $d\vec{s}$ são tangentes à amperiana em todos os pontos. Assim, $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ são paralelos ou antiparalelos em todos os pontos da amperiana; vamos adotar arbitrariamente a primeira hipótese. Nesse caso, em todos os pontos o ângulo θ entre $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ é 0°, $\cos \theta = \cos 0° = 1$; a integral da Eq. 29-15 se torna

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta \, ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Observe que $\oint ds$ é a soma de todos os segmentos de reta ds da amperiana, o que nos dá simplesmente a circunferência $2\pi r$ da curva.

De acordo com a regra da mão direita, o sinal da corrente da Fig. 29-14 é positivo; assim, o lado direito da lei de Ampère se torna $+\mu_0 i$, e temos:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

ou

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{(do lado de fora de um fio retilíneo).} \tag{29-17}$$

Com uma pequena mudança de notação esta é a Eq. 29-4, que obtivemos na Seção 29-2 (por um método muito mais trabalhoso) usando a lei de Biot-Savart. Além disso, como o módulo B do campo é positivo, sabemos que o sentido correto de $\vec{B}$ é o que aparece na Fig. 29-14.

Campo Magnético no Interior de um Fio Longo Retilíneo Percorrido por Corrente

A Fig. 29-15 mostra a seção reta de um fio longo retilíneo de raio R percorrido por uma corrente uniforme i dirigida para fora do papel. Como a distribuição de corrente ao longo da seção reta do fio é uniforme, o campo magnético $\vec{B}$ produzido pela corrente tem simetria cilíndrica. Assim, para determinar o campo magnético em pontos situados no interior do fio podemos novamente usar uma amperiana de raio r, como mostra a Fig. 29-15, onde agora $r < R$. Como mais uma vez $\vec{B}$ é tangente à curva, o lado esquerdo da lei de Ampère nos dá

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r). \tag{29-18}$$

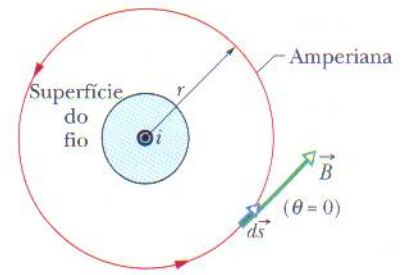
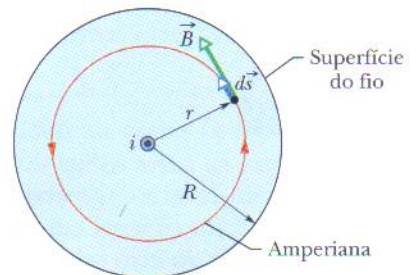



FIG. 29-15 Uso da lei de Ampère para determinar o campo magnético produzido por uma corrente i no interior de um fio retilíneo longo de seção reta circular. A corrente está distribuída uniformemente ao longo da seção reta do fio e aponta para fora do papel. A amperiana é uma circunferência concêntrica com um raio menor que o raio do fio.

Para calcular o lado direito da lei de Ampère observamos que, como a distribuição de corrente é uniforme, a corrente i_{env} envolvida pela amperiana é proporcional à área envolvida pela curva, ou seja,

$$i_{env} = i\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \tag{29-19}$$

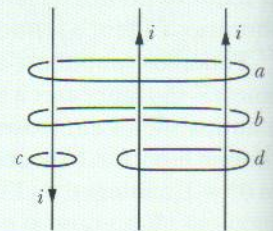
Usando a regra da mão direita, vemos que o sinal de i_{env} é positivo e, portanto, de acordo com a lei de Ampère,

$$B(2\pi r) = \mu_0 i\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

ou

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r \quad \text{(no interior de um fio retilíneo).} \tag{29-20}$$

Assim, no interior do fio o módulo B do campo elétrico é proporcional a r; o valor é zero no centro do fio e máximo na superfície, onde $r = R$. Observe que as Eqs. 29-17 e 29-20 fornecem o mesmo valor para B no ponto $r = R$, ou seja, as expressões para o campo magnético do lado de fora e do lado de dentro do fio fornecem o mesmo valor para pontos situados na superfície do fio.

TESTE 2 A figura mostra três correntes de mesmo valor absoluto i (duas paralelas e uma antiparalela) e quatro amperianas. Coloque as amperianas em ordem de acordo com o valor absoluto de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, começando pelo maior.

Exemplo 29-3

A Fig. 29-16*a* mostra a seção reta de um cilindro longo condutor oco de raio interno $a = 2{,}0$ cm e raio externo $b = 4{,}0$ cm. O cilindro conduz uma corrente para fora do plano do papel, e o módulo da densidade de corrente na seção reta é dado por $J = cr^2$, com $c = 3{,}0 \times 10^6$ A/m^4 e r em metros. Qual é o campo magnético $\vec{B}$ em um ponto situado a 3,0 cm de distância do eixo central do cilindro?

FIG. 29-16 (*a*) Seção reta de um cilindro longo condutor oco de raio interno *a* e raio externo *b*. (*b*) Uma amperiana de raio *r* é usada para calcular o campo magnético em pontos situados a uma distância *r* do eixo central.

IDÉIAS-CHAVE O ponto no qual queremos determinar o campo $\vec{B}$ está na parte sólida do cilindro, entre o raio interno e o raio externo. Observamos que a corrente tem simetria cilíndrica (é igual em todos os pontos situados à mesma distância do eixo central). A simetria permite usar a lei de Ampère para determinar o campo $\vec{B}$ no ponto. Para começar, traçamos uma amperiana como a que aparece na Fig. 29-16*b*. A curva é concêntrica com o cilindro e tem um raio $r = 3{,}0$ cm, porque estamos interessados em determinar o campo $\vec{B}$ a essa distância do eixo central do cilindro.

O passo seguinte é calcular a corrente i_{env} que é envolvida pela amperiana. Entretanto, *não podemos* usar uma simples proporção, como fizemos para chegar à Eq. 29-19, já que dessa vez a distribuição de corrente não é uniforme. Em vez disso, utilizando o mesmo método do Exemplo 26-2*b*, devemos integrar o módulo da densidade de corrente entre o raio interno *a* do cilindro e o raio *r* da amperiana.

Cálculos: Escrevemos a integral na forma

$$i_{env} = \int J\,dA = \int_a^r cr^2(2\pi r\,dr)$$
$$= 2\pi c \int_a^r r^3\,dr = 2\pi c\left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r$$
$$= \frac{\pi c(r^4 - a^4)}{2}.$$

O sentido a integração indicado na Fig. 29-16*b* foi escolhido arbitrariamente como sendo o sentido horário. Aplicando à amperiana a regra da mão direita descobrimos que precisamos somar a corrente i_{env} como sendo negativa, já que o sentido da corrente é para fora do plano do papel, mas o polegar aponta para dentro do papel.

Em seguida, calculamos o lado esquerdo da lei de Ampère exatamente como fizemos na Fig. 29-15 e obtemos novamente a Eq. 29-18. Assim, a lei de Ampère,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{env},$$

nos dá

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2}(r^4 - a^4).$$

Explicitando B e substituindo os valores conhecidos, temos:

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r}(r^4 - a^4)$$
$$= -\frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(3{,}0 \times 10^6\ \text{A/m}^4)}{4(0{,}030\ \text{m})}$$
$$\times [(0{,}030\ \text{m})^4 - (0{,}020\ \text{m})^4]$$
$$= -2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{T}.$$

Assim, o campo magnético $\vec{B}$ em um ponto situado a 3,0 cm do eixo central tem módulo

$$B = 2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{T} \qquad \text{(Resposta)}$$

e forma linhas de campo magnético com o sentido contrário ao da nossa direção de integração, ou seja, com o sentido anti-horário na Fig. 29-16*b*.

29-5 | Solenóides e Toróides

Campo Magnético de um Solenóide

Vamos agora voltar a atenção para outra situação na qual a lei de Ampère pode ser útil. Trata-se do campo magnético produzido pela corrente em uma bobina helicoidal formada por espiras circulares muito próximas. Uma bobina desse tipo recebe o nome de **solenóide** (Fig. 29-17). Vamos supor que o comprimento do solenóide é muito maior que o diâmetro.

FIG. 29-17 Um solenóide percorrido por uma corrente i.

A Fig. 29-18 mostra um trecho de um solenóide "esticado". O campo magnético do solenóide é a soma vetorial dos campos produzidos pelas espiras. No caso de pontos muito próximos de uma espira o fio se comporta magneticamente quase como um fio retilíneo, e as linhas de $\vec{B}$ são quase círculos concêntricos. Como mostra a Fig. 29-18, o campo tende a se cancelar entre espiras vizinhas. A figura também mostra que em pontos no interior do solenóide e razoavelmente afastados do fio $\vec{B}$ é aproximadamente paralelo ao eixo central. No caso-limite de um *solenóide ideal*, que é infinitamente longo e formado por espiras muito juntas (*espiras cerradas*) de um fio de seção reta quadrada, o campo no interior do solenóide é uniforme e paralelo ao eixo central.

Em pontos acima do solenóide, como o ponto P da Fig. 29-18, o campo magnético criado pelas partes superiores das espiras do solenóide (representadas pelo símbolo ⊙) aponta para a esquerda (como nas proximidades do ponto P), e tende a cancelar o campo criado em P pelas partes inferiores dessas espiras (representadas pelo símbolo ⊗), que aponta para direita (e não está desenhado na figura). No caso-limite de um solenóide ideal o campo magnético do lado de fora do solenóide é zero. Tomar o campo externo como sendo zero é uma excelente aproximação de um solenóide real se o comprimento do solenóide for muito maior que o diâmetro e se forem considerados apenas pontos como P, que não estão próximos das extremidades do solenóide. A orientação do campo magnético no interior do solenóide é dada pela regra da mão direita: segure o solenóide com a mão direita, com os dedos apontando no sentido da corrente; o polegar estendido mostra a orientação do campo magnético.

A Fig. 29-19 mostra as linhas de $\vec{B}$ em um solenóide real. O espaçamento das linhas na região central mostra que o campo no interior do solenóide é intenso e uniforme em toda a região, enquanto o campo externo é muito mais fraco.

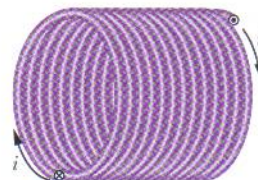
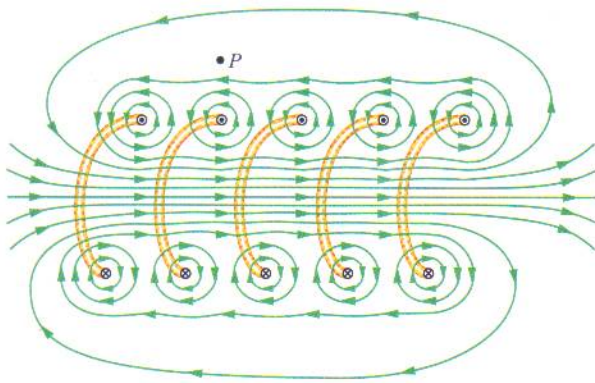



FIG. 29-18 Trecho de um solenóide "esticado" visto de perfil. São mostradas as partes traseiras de cinco espiras e as linhas de campo magnético associadas. As linhas de campo magnético são circulares nas proximidades das espiras. Perto do eixo do solenóide as linhas de campo se combinam para produzir um campo magnético paralelo ao eixo. As linhas de campo com pequeno espaçamento indicam que o campo magnético nessa região é intenso. Do lado de fora do solenóide as linhas de campo são mais espaçadas e o campo é muito mais fraco.

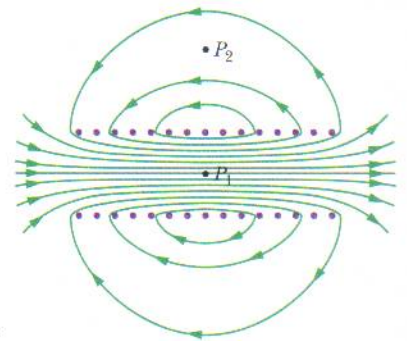



FIG. 29-19 Linhas de campo magnético em um solenóide real. O campo é intenso e uniforme em pontos do interior do solenóide, como P_1, e muito mais fraco em pontos do lado de fora do solenóide, como P_2.

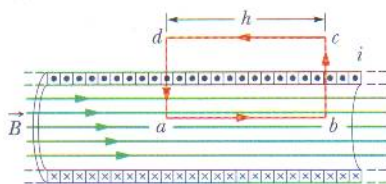



FIG. 29-20 Aplicação da lei de Ampère a um solenóide ideal percorrido por uma corrente i. A amperiana é o retângulo *abcda*.

Vamos agora aplicar a lei de Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{env}}, \tag{29-21}$$

ao solenóide ideal da Fig. 29-20, onde $\vec{B}$ é uniforme do lado de dentro do solenóide e zero do lado de fora, usando a amperiana retangular *abcda*. Escrevemos $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ como a soma de quatro integrais, uma para segmento da amperiana:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}. \tag{29-22}$$

A primeira integral do lado direito da Eq. 29-22 é Bh, onde B é o módulo do campo uniforme $\vec{B}$ no interior do solenóide e h é o comprimento (arbitrário) do segmento ab. A segunda e a quarta integrais são zero porque, para os elementos ds desses segmentos, $\vec{B}$ é perpendicular a ds ou é zero e, portanto, o produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ é zero. A terceira integral, que envolve um segmento do lado de fora do solenóide, também é zero porque $B = 0$ em todos os pontos do lado de fora do solenóide. Assim, o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ para toda a amperiana é Bh.

A corrente total i_{env} envolvida pela amperiana retangular da Fig. 29-20 não é igual à corrente i nas espiras do solenóide porque as espiras passam mais de uma vez pela amperiana. Seja n o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide; nesse caso, a amperiana envolve nh espiras e, portanto,

$$i_{\text{env}} = i(nh).$$

De acordo com a lei de Ampère, temos:

$$Bh = \mu_0 inh$$

ou

$$B = \mu_0 in \quad \text{(solenóide ideal).} \tag{29-23}$$

Embora a Eq. 29-23 tenha sido demonstrada para um solenóide ideal, constitui uma boa aproximação para solenóides reais se for aplicada apenas a pontos internos bem afastados das extremidades do solenóide. A Eq. 29-23 está de acordo com as observações experimentais de que o módulo B do campo magnético no interior de um solenóide não depende do diâmetro nem do comprimento do solenóide e

é uniforme ao longo da seção reta do solenóide. Um solenóide constitui, portanto, uma forma prática de criar um campo magnético uniforme de valor conhecido para realizar experimentos, assim como um capacitor de placas paralelas constitui uma forma prática de criar um campo elétrico uniforme de valor conhecido.

FIG. 29-21 (*a*) Um toróide percorrido por uma corrente i. (*b*) Seção reta horizontal do toróide. O campo magnético no interior do toróide pode ser calculado aplicando a lei de Ampère a uma amperiana como a mostrada na figura.

Campo Magnético de um Toróide

A Fig. 29-21*a* mostra um **toróide**, que pode ser descrito como um solenóide cilíndrico que foi encurvado até as extremidades se tocarem, formando assim um anel. Qual é o valor do campo magnético $\vec{B}$ no interior de um toróide? Podemos responder a essa pergunta usando a lei de Ampère e a simetria do toróide.

Por simetria, as linhas de $\vec{B}$ formam circunferências concêntricas no interior do toróide, como mostra a Fig. 29-21*b*. Vamos escolher como amperiana uma circunferência concêntrica de raio r e percorrê-la no sentido horário. De acordo com a lei de Ampère, temos:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 iN,$$

onde i é a corrente nas espiras do toróide (e é positiva para as espiras envolvidas pela amperiana) e N é o número total de espiras. Assim, temos:

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi}\frac{1}{r} \quad \text{(toróide).} \tag{29-24}$$

Isso mostra que, ao contrário do que acontece no caso do solenóide, B não é constante ao longo da seção reta do toróide.

É fácil mostrar, com o auxílio da lei de Ampère, que $B = 0$ para pontos do lado de fora de um toróide (como se o toróide fosse fabricado a partir de um solenóide ideal). O sentido do campo magnético no interior de um toróide pode ser determinado através da regra da mão direita: segure o toróide com a mão direita, com os dedos apontando no sentido da corrente; o polegar estendido mostra o sentido do campo magnético.

Exemplo 29-4

Um solenóide tem um comprimento $L = 1{,}23$ m, um diâmetro interno $d = 3{,}55$ cm e conduz uma corrente $i = 5{,}57$ A. É formado por cinco camadas de espiras cerradas, cada uma com 850 espiras. Qual é o valor de B no centro do solenóide?

IDÉIA-CHAVE O módulo B do campo magnético no eixo central do solenóide está relacionado à corrente i do solenóide e ao número n de espiras por unidade de comprimento através da Eq. 29-23 ($B = \mu_0 in$).

Cálculo: Como B não depende do diâmetro das espiras, o valor de n para cinco camadas de espiras é simplesmente cinco vezes maior que o valor para uma camada. Assim, de acordo com a Eq. 29-23, temos:

$$B = \mu_0 in = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(5{,}57\ \text{A})\frac{5 \times 850\ \text{espiras}}{1{,}23\ \text{m}}$$

$$= 2{,}42 \times 10^{-2}\ \text{T} = 24{,}2\ \text{mT.} \qquad \text{(Resposta)}$$

29-6 | Uma Bobina Percorrida por Corrente como um Dipolo Magnético

Até o momento examinamos os campos magnéticos produzidos por correntes em um fio retilíneo, em um solenóide e em um toróide. Vamos agora discutir o campo magnético produzido por uma corrente em uma bobina. Como vimos na Seção 28-10, uma bobina se comporta como um dipolo magnético no sentido de que, na

presença de um campo magnético $\vec{B}$, experimenta um torque $\vec{\tau}$ dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{29-25}$$

onde $\vec{\mu}$, o momento dipolar magnético da bobina, tem um módulo dado por NiA, onde N é o número de espiras, i é a corrente e A é a área das espiras. (*Atenção:* Não confunda o momento magnético dipolar $\vec{\mu}$ com a permeabilidade magnética do vácuo μ_0.)

Como vimos, o sentido de $\vec{\mu}$ é dado pela regra da mão direita: segure a bobina com a mão direita, com os dedos apontando no sentido da corrente; o polegar estendido mostra o sentido do momento dipolar magnético.

Campo Magnético de uma Bobina

Vamos agora examinar outro aspecto de uma bobina percorrida por corrente como um dipolo magnético: qual é o campo magnético *produzido* pela bobina em um ponto do espaço? A simetria não é suficiente para que seja possível usar a lei de Ampère; assim, temos que recorrer à lei de Biot-Savart. Para simplificar o problema vamos considerar uma bobina com uma única espira circular e calcular o campo apenas em pontos situados sobre o eixo central, que tomaremos como sendo o eixo z. Vamos demonstrar que o módulo do campo magnético nesses pontos é dado por

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{29-26}$$

onde R é o raio da espira e z é a distância entre o ponto considerado e o centro da espira. O sentido do campo magnético $\vec{B}$ é o mesmo do momento magnético $\vec{\mu}$ da bobina.

No caso de pontos muito distantes da bobina, $z \gg R$ e a Eq. 29-26 se reduz a

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3}.$$

Lembrando que πR^2 é a área A da bobina e generalizando o resultado para uma bobina de N espiras, podemos escrever essa equação na forma

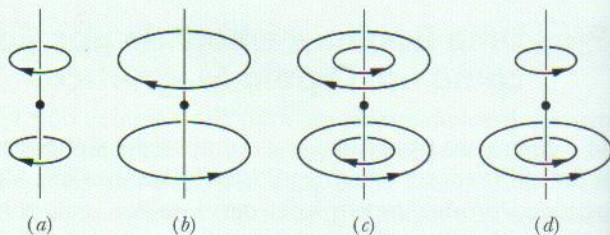
$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiA}{z^3}.$$

Além disso, como $\vec{B}$ e $\vec{\mu}$ são paralelos, podemos escrever a equação em forma vetorial usando a identidade $\mu = NiA$:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3} \quad \text{(bobina percorrida por corrente).} \tag{29-27}$$

FIG. 29-22 Uma espira percorrida por corrente produz um campo magnético semelhante ao de um ímã em forma de barra, com um pólo norte e um pólo sul. O momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ da espira, cujo sentido é dado pela regra da mão direita, aponta do pólo sul para o pólo norte, ou seja, na mesma direção que o campo $\vec{B}$ no interior da espira.

Assim, podemos encarar uma bobina percorrida por corrente como um dipolo magnético sob dois aspectos: (1) a bobina experimenta um torque na presença de um campo magnético externo; (2) a bobina produz um campo magnético que é dado, para pontos distantes sobre o eixo z, pela Eq. 29-27. A Fig. 29-22 mostra o campo magnético produzido por uma bobina percorrida por corrente; um lado da bobina se comporta como um pólo norte (para onde aponta o momento magnético $\vec{\mu}$) e o outro lado como um pólo sul, como sugere o desenho de um ímã em forma de barra.

TESTE 3 A figura mostra quatro pares de espiras circulares de raio r ou $2r$, com o centro em eixos verticais (perpendiculares ao plano das espiras) e percorridas por correntes de mesmo valor absoluto, nos sentidos indicados. Coloque os pares na ordem do módulo do campo magnético em um ponto sobre o eixo central a meio caminho entre os anéis, começando pelo maior.

Demonstração da Equação 29-26

A Fig. 29-23 mostra uma vista de perfil de uma espira circular de raio R percorrida por uma corrente i. Considere um ponto P sobre o eixo central, situado a uma distância z do plano da espira. Vamos aplicar a lei de Biot-Savart a um elemento de comprimento ds situado na extremidade esquerda da espira. O vetor comprimento $d\vec{s}$ associado a esse elemento aponta perpendicularmente para fora do plano do papel. O ângulo θ entre $d\vec{s}$ e $\hat{r}$ na Fig. 29-23 é 90°; o plano formado pelos dois vetores é perpendicular ao plano do papel e contém tanto $\hat{r}$ como $d\vec{s}$. De acordo com a lei de Biot-Savart (e a regra da mão direita), o elemento de campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P pela corrente no elemento ds é perpendicular a este plano e, portanto, paralelo ao plano do papel e perpendicular a $\hat{r}$, como mostra a Fig. 29-23.

FIG. 29-23 Vista de perfil de uma espira circular de raio R. O plano da espira é perpendicular ao papel, e apenas a metade mais distante da espira aparece na figura. A lei de Biot-Savart pode ser usada para calcular o campo magnético em um ponto P do eixo central da espira.

Vamos decompor $d\vec{B}$ em duas componentes: $dB_{\|}$, paralela ao eixo da espira, e $dB_{\perp}$, perpendicular ao eixo. Por simetria, a soma vetorial das componentes perpendiculares $dB_{\perp}$ produzidas por todos os elementos ds da espira é zero. Isso deixa apenas as componentes paralelas $dB_{\|}$ e, portanto,

$$B = \int dB_{\|}.$$

Para o elemento $d\vec{s}$ da Fig. 29-23 a lei de Biot-Savart (Eq. 29-1) nos diz que o campo magnético a uma distância r é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds \operatorname{sen} 90°}{r^2}.$$

Temos também

$$dB_{\|} = dB \cos\alpha.$$

Combinando as duas relações, obtemos

$$dB_{\|} = \frac{\mu_0 i \cos\alpha\, ds}{4\pi r^2}. \tag{29-28}$$

A Fig. 29-23 mostra que existe uma relação entre r e α. Ambos podem ser expressos em termos da variável z, a distância entre o ponto P e o centro da espira. As relações são as seguintes:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \tag{29-29}$$

e

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \tag{29-30}$$

Substituindo as Eqs. 29-29 e 29-30 na Eq. 29-28, obtemos

$$dB_{\|} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}\,ds.$$

Observe que i, R e z têm o mesmo valor para todos os elementos ds da espira; assim, quando integramos essa equação descobrimos que

$$B = \int dB_{\|}$$

$$= \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}\int ds$$

ou, como $\int ds$ é simplesmente a circunferência $2\pi R$ da espira,

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Esta é a Eq. 29-26, a relação que queríamos demonstrar.

REVISÃO E RESUMO

Lei de Biot-Savart O campo magnético criado por um condutor percorrido por corrente pode ser calculado com o auxílio da *lei de Biot-Savart*. De acordo com esta lei, a contribuição $d\vec{B}$ para o campo em um ponto P produzido por um elemento de corrente $i\,d\vec{s}$ situado a uma distância r do ponto é dada por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{(lei de Biot-Savart)}, \qquad (29\text{-}3)$$

onde $\hat{r}$ é o vetor unitário que liga o elemento de corrente ao ponto P. A constante μ_0, conhecida como permeabilidade do vácuo, tem o valor de $4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A} \approx 1{,}26 \times 10^{-6}\,\text{T}\cdot\text{m/A}$.

Campo Magnético Produzido pela Corrente em um Fio Retilíneo Longo No caso de um fio retilíneo longo percorrido por uma corrente i, a lei de Biot-Savart nos dá, para o módulo do campo magnético a uma distância perpendicular R do fio,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{(fio retilíneo longo)}. \qquad (29\text{-}4)$$

Campo Magnético de um Arco de Circunferência O módulo do campo magnético no centro de um arco de circunferência de raio R e ângulo central ϕ (em radianos) percorrido por uma corrente i é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i\phi}{4\pi R} \quad \text{(no centro de um arco de circunferência)}. \qquad (29\text{-}9)$$

Força entre Correntes Paralelas Fios paralelos percorridos por correntes no mesmo sentido se atraem e fios paralelos percorridos por correntes em sentidos opostos se repelem. O módulo da força que age sobre um segmento de comprimento L de um dos fios é dado por

$$F_{ba} = i_b L B_a \operatorname{sen} 90° = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}, \qquad (29\text{-}13)$$

onde d é a distância entre os fios e i_a e i_b são as correntes nos fios.

Lei de Ampère De acordo com a **lei de Ampère**,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{env}} \quad \text{(lei de Ampère)}. \qquad (29\text{-}14)$$

A integral de linha que aparece nesta equação deve ser calculada para uma curva fechada conhecida como *amperiana*. A corrente i é a corrente *total* envolvida pela amperiana. No caso de algumas distribuições de corrente, a Eq. 29-14 é mais fácil de usar que a Eq. 29-3 para calcular o campo magnético produzido por correntes.

Campos de um Solenóide e de um Toróide No interior de um *solenóide longo* percorrido por uma corrente i, em pontos distantes das extremidades, o módulo B do campo magnético é dado por

$$B = \mu_0 i n \quad \text{(solenóide ideal)}, \qquad (29\text{-}23)$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento. Em um ponto no interior de um *toróide* o módulo B do campo magnético é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi}\frac{1}{r} \quad \text{(toróide)}, \qquad (29\text{-}24)$$

onde r é a distância entre o ponto e o centro do toróide.

Campo de um Dipolo Magnético O campo magnético produzido por uma bobina percorrida por corrente, que se comporta como um *dipolo magnético*, em um ponto P situado a uma distância z ao longo do eixo central da bobina, é paralelo ao eixo central e dado por

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{\mu}}{z^3}, \qquad (29\text{-}27)$$

onde $\vec{\mu}$ é o momento dipolar da bobina. Esta equação é válida apenas para valores de z muito maiores que as dimensões da bobina.

PERGUNTAS

1 A Fig. 29-24 mostra quatro arranjos nos quais fios paralelos longos conduzem correntes iguais para dentro ou para fora do papel nos vértices de quadrados iguais. Coloque os arranjos na ordem do módulo do campo magnético no centro do quadrado, começando pelo maior.

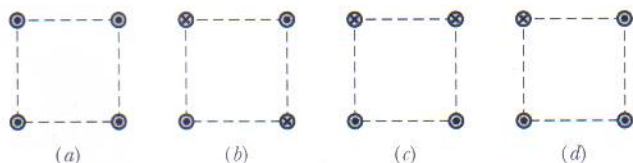



FIG. 29-24 Pergunta 1.

2 A Fig. 29-25 mostra seções retas de dois fios retilíneos longos; a corrente do fio da esquerda, i_1, é para fora do papel. Para que o campo magnético total produzido pelas duas correntes seja zero no ponto P, (a) o sentido da corrente i_2 do fio da direita deve ser para dentro ou para fora do papel? (b) O valor absoluto da corrente i_2 deve ser maior, menor ou igual ao valor absoluto de i_1?

FIG. 29-25 Pergunta 2.

3 A Fig. 29-26 mostra três circuitos formados por segmentos retilíneos e arcos de circunferência concêntricos (semicircunferências ou quartos de circunferência de raio r, $2r$ ou $3r$). A corrente é a mesma nos três circuitos. Coloque os circuitos na ordem do módulo do campo magnético no centro dos arcos (indicado na figura por um ponto), começando pelo maior.

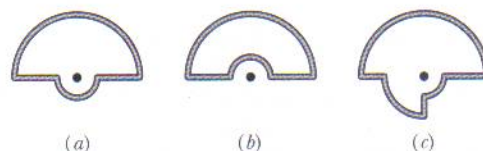



FIG. 29-26 Pergunta 3.

4 A Fig. 29-27 representa um instantâneo dos vetores velocidade de quatro elétrons nas vizinhanças de um fio percorrido por uma corrente i. As quatro velocidades têm o mesmo módulo, e a velocidade $\vec{v}_2$ aponta para dentro do papel. Os elétrons 1 e 2 estão à mesma distância do fio, e o mesmo acontece com os elétrons 3 e 4. Coloque os elétrons na ordem do módulo do campo magnético a que estão sujeitos devido à corrente i, começando pelo maior.

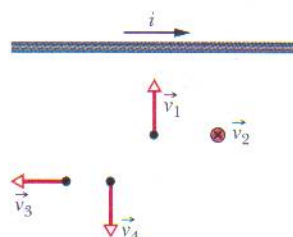



FIG. 29-27 Pergunta 4.

5 A Fig. 29-28 mostra três circuitos formados por dois segmentos radiais e dois arcos de circunferência concêntricos, um de raio r e o outro de raio $R > r$. A corrente é a mesma nos dois circuitos e o ângulo entre os dois segmentos radiais é o mesmo. Coloque os circuitos na ordem do módulo do campo magnético no centro dos arcos (indicado na figura por um ponto), começando pelo maior.

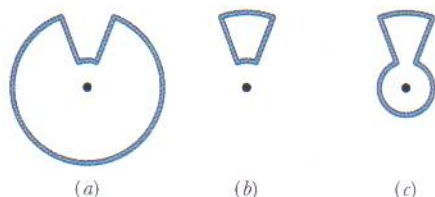



FIG. 29-28 Pergunta 5.

6 A Fig. 29-29 mostra quatro arranjos nos quais fios longos, paralelos e igualmente espaçados conduzem correntes iguais para dentro e para fora do papel. Coloque os arranjos na ordem do módulo da força a que está submetido o fio central, começando pelo maior.

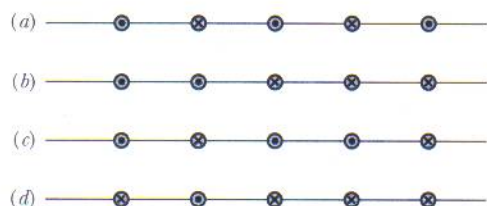



FIG. 29-29 Pergunta 6.

7 A Fig. 29-30 mostra três arranjos de três fios retilíneos longos conduzindo correntes iguais para dentro e para fora do papel. (a) Coloque os arranjos na ordem do módulo da força magnética a que está submetido o fio A, começando pelo maior. (b) No arranjo 3, o ângulo entre a força a que está submetido o fio A e a linha tracejada é igual, maior ou menor que 45°?

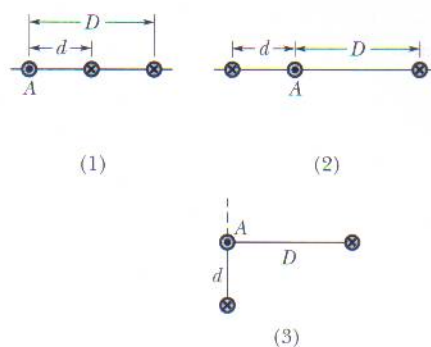



FIG. 29-30 Pergunta 7.

8 A Fig. 29-31 mostra quatro correntes iguais i e cinco amperianas (a, b, c, d, e) envolvendo essas correntes. Coloque as amperianas na ordem do valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo das curvas nas direções indicadas, começando pelo maior valor positivo.

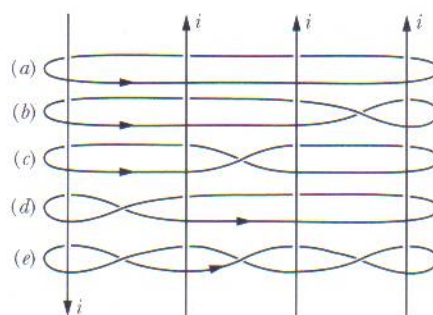



FIG. 29-31 Pergunta 8.

9 A Fig. 29-32 mostra quatro amperianas circulares (a, b, c, d) concêntricas com um fio cuja corrente é dirigida para fora do papel. A corrente é uniforme ao longo da seção reta do fio (região sombreada). Coloque as amperianas na ordem do valor absoluto de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo da curva, começando pelo maior.

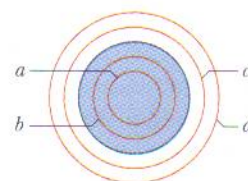



FIG. 29-32 Pergunta 9.

10 A Fig. 29-33 mostra, em função da distância radial r, o módulo B do campo magnético do lado de dentro e do lado de fora de quatro fios (a, b, c, d), cada um dos quais conduz uma corrente uniformemente distribuída ao longo da seção reta. Os trechos em que os gráficos correspondentes a dois fios se superpõem estão indicados por duas letras. Coloque os fios na ordem (a) do raio, (b) do módulo do campo magnético na superfície e (c) da corrente, começando pelo maior valor. (d) O módulo da densidade de corrente do fio a é maior, menor ou igual ao do fio c?

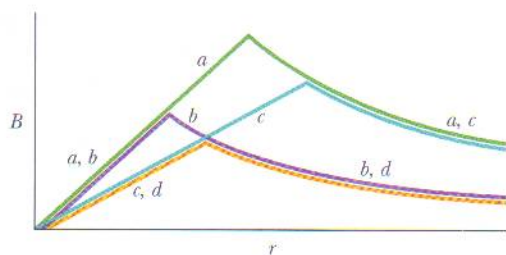



FIG. 29-33 Pergunta 10.

11 A Fig. 29-34 mostra quatro amperianas circulares (a, b, c, d) e, em seção reta, quadro condutores circulares longos (regiões sombreadas), todos concêntricos. Três dos condutores são cilindros ocos; o condutor central é um cilindro maciço. As correntes nos condutores são, do raio menor para o raio maior, 4 A para fora do papel, 9 A para dentro do papel, 5 A para fora do papel e 3 A para dentro do papel. Coloque as amperianas na ordem do módulo de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo da curva, começando pelo maior.

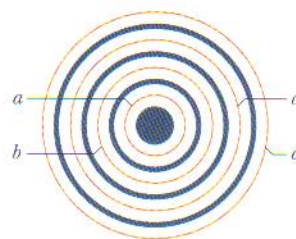



FIG. 29-34 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 29-2 Cálculo do Campo Magnético Produzido por uma Corrente

•1 Em um certo local das Filipinas o campo magnético da Terra tem um módulo de 39 μT, é horizontal e aponta exatamente para o norte. Suponha que o campo total é zero, 8,0 cm acima de um fio longo, retilíneo, horizontal que conduz uma corrente constante. Determine (a) o módulo da corrente; (b) a orientação da corrente.

•2 Um condutor retilíneo percorrido por uma corrente i = 5,0 A se divide em dois arcos semicirculares, como mostra a Fig. 29-35. Qual é o campo magnético no centro C da espira circular resultante?

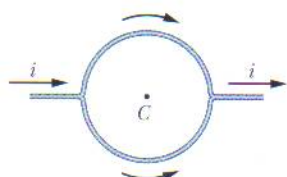



FIG. 29-35 Problema 2.

•3 Um topógrafo está usando uma bússola magnética 6,1 m abaixo de uma linha de transmissão que conduz uma corrente constante de 100 A. (a) Qual é o campo magnético produzido pela linha de transmissão na posição da bússola? (b) Este campo tem uma influência significativa na leitura da bússola? A componente horizontal do campo magnético da Terra no local é 20 μT.

•4 A Fig. 29-36a mostra um elemento de comprimento ds = 1,00 μm em um fio retilíneo muito longo percorrido por uma corrente. A corrente no elemento cria um campo magnético elementar $d\vec{B}$ no espaço em volta. A Fig. 29-36b mostra o módulo dB do campo para pontos situados a 2,5 cm de distância do elemento em função do ângulo θ entre o fio e uma reta que liga o elemento ao ponto. A escala vertical é definida por dB_s = 60,0 pT. Qual é o módulo do campo magnético produzido pelo fio inteiro em um ponto situado a 2,5 cm de distância do fio?

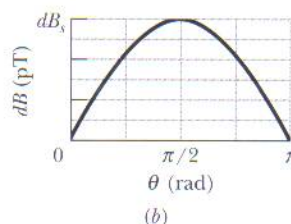
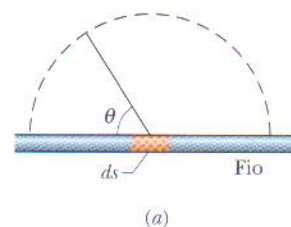



FIG. 29-36 Problema 4.

•5 Na Fig. 29-37 dois arcos de circunferência têm raios a = 13,5 cm e b = 10,7 cm, subtendem um ângulo θ = 74,0°, conduzem uma corrente i = 0,411 A e têm o mesmo centro de curvatura P. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético no ponto P.

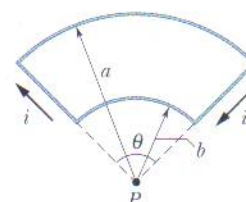



FIG. 29-37 Problema 5.

•6 Na Fig. 29-38 dois arcos de circunferência têm raios R_2 = 7,80 cm e R_1 = 3,15 cm, subtendem um ângulo θ = 180°, conduzem uma corrente i = 0,281 A e têm o mesmo centro de curvatura C. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético no ponto C.

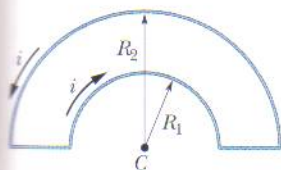



FIG. 29-38 Problema 6.

•7 Dois fios retilíneos longos são paralelos e estão separados por uma distância de 8,0 cm. As correntes nos fios são iguais e o campo magnético em um ponto situado exatamente entre os dois fios tem um módulo de 300 μT. (a) As correntes têm o mesmo sentido ou sentidos opostos? (b) Qual é o valor das correntes?

•8 Na Fig. 29-39, um fio é formado por uma semicircunferência de raio R = 9,26 cm e dois segmentos retilíneos (radiais) de comprimento L = 13,1 cm cada um. A corrente no fio é i = 34,8 mA. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético no centro de curvatura C da semicircunferência.

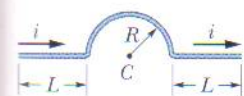



FIG. 29-39 Problema 8.

•9 Na Fig. 29-40 dois fios retilíneos longos são perpendiculares ao plano do papel e estão separados por uma distância d_1 = 0,75 cm. O fio 1 conduz uma corrente de 6,5 A para dentro do papel. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) da corrente no fio 2 para que o campo magnético seja zero no ponto P, situado a uma distância d_2 = 1,50 cm do fio 2.

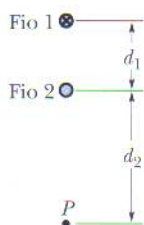



FIG. 29-40 Problema 9.

•10 Na Fig. 29-41 dois fios retilíneos longos, separados por uma distância d = 16,0 cm, conduzem correntes i_1 = 3,61 mA e i_2 = 3,00i_1 dirigidas para fora do papel. (a) Em que ponto do eixo x o campo magnético total é zero? (b) Se as duas correntes são multiplicadas por dois, o ponto em que o campo magnético é zero se aproxima do fio 1, se aproxima do fio 2 ou permanece onde está?

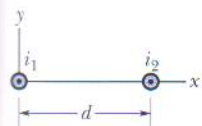



FIG. 29-41 Problema 10.

•11 Na Fig. 29-42 uma corrente i = 10 A circula em um condutor longo formado por dois trechos retilíneos e uma semicircunferência de raio R = 5,0 mm e centro no ponto a. O ponto b fica a meio caminho entre os trechos retilíneos e tão afastado da semicircunferência que os dois trechos retos podem ser considerados fios infinitos. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético no ponto a. Determine também (c) o módulo e (d) o sentido do campo magnético no ponto b.

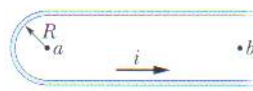



FIG. 29-42 Problema 11.

•12 Na Fig. 29-43 o ponto P está a uma distância R = 2,00 cm de um fio retilíneo muito longo que conduz uma corrente. O campo magnético $\vec{B}$ no ponto P é a soma das contribuições de elementos de corrente $i\,d\vec{s}$ ao longo de todo o fio. Determine a distância s entre o ponto P e o elemento (a) que mais contribui para o campo $\vec{B}$; (b) responsável por com 10% da maior contribuição.

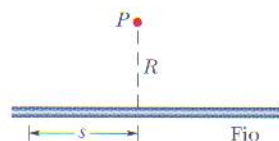



FIG. 29-43 Problema 12.

••13 A Fig. 29-44 mostra um próton que se move com velocidade $\vec{v} = (-200 \text{ m/s})\hat{\text{j}}$ em direção a um fio retilíneo longo que conduz uma corrente i = 350 mA. No instante mostrado a distância entre o próton e o fio é d = 2,89 cm. Em termos dos vetores unitários, qual é a força magnética a que o próton está submetido?

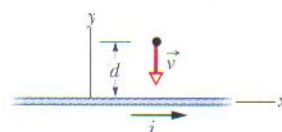



FIG. 29-44 Problema 13.

••14 A Fig. 29-45a mostra, em seção reta, dois fios longos e paralelos percorridos por correntes e separados por uma distância L. A razão i_1/i_2 entre as correntes é 4,00; as direções das correntes não são conhecidas. A Fig. 29-45b mostra a componente B_y do campo magnético em função da posição sobre o eixo x à direita do fio 2. A escala vertical é definida por B_{ys} = 4,0 nT e a escala horizontal por x_s = 20,0 cm. (a) Para que valor de $x > 0$ a componente B_y é máxima? (b) Se i_2 = 3 mA, qual é este valor máximo de B_y? Determine o sentido (para dentro ou para fora do papel) (c) de i_1; (d) de i_2.

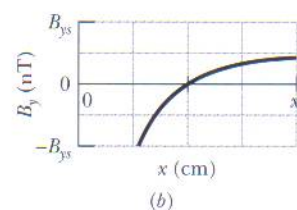
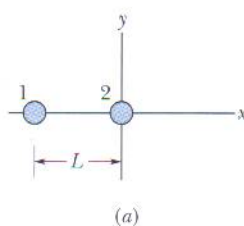



FIG. 29-45 Problema 14.

••**15** A Fig. 29-46 mostra um fio que conduz uma corrente i = 3,00 A. Dois trechos retilíneos semi-infinitos, ambos tangentes à mesma circunferência, são ligados por um arco de circunferência que possui um ângulo central θ e coincide com parte da circunferência. O arco e os dois trechos retilíneos estão no mesmo plano. Se $B = 0$ no centro da circunferência, qual é o valor de θ?

FIG. 29-46 Problema 15.

••**16** A Fig. 29-47 mostra, em seção reta, quatro fios finos paralelos, retilíneos e muito compridos, que conduzem correntes iguais nos sentidos indicados. Inicialmente os quatro fios estão a uma distância d = 15,0 cm da origem do sistema de coordenadas, onde criam um campo magnético total $\vec{B}$. (a) Para que valor de x o fio 1 deve ser deslocado sobre o eixo x para que o campo $\vec{B}$ sofra uma rotação de 30° no sentido anti-horário? (b) Com o fio 1 na nova posição, para que valor de x o fio 3 deve ser deslocado sobre o eixo x para que o campo $\vec{B}$ volte à orientação inicial?

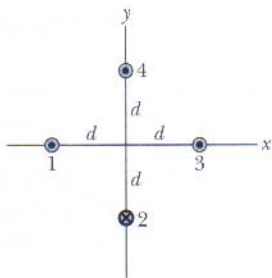



FIG. 29-47 Problema 16.

••**17** Na Fig. 29-48, o ponto P_1 está a uma distância R = 13,1 cm do ponto médio de um fio retilíneo de comprimento L = 18,0 cm que conduz uma corrente i = 58,2 mA. (Observe que o fio *não* é longo.) Qual é o módulo do campo magnético no ponto P_1?

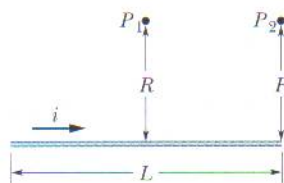



FIG. 29-48 Problemas 17 e 21.

••**18** A Eq. 29-4 fornece o módulo B do campo magnético criado por um fio retilíneo *infinitamente longo* percorrido por uma corrente em um ponto P situado a uma distância R do fio. Suponha que o ponto P esteja na verdade a uma distância R do ponto médio de um fio de comprimento *finito* L percorrido por uma corrente. Nesse caso, o uso da Eq. 29-4 para calcular B envolve um certo erro percentual. Qual deve ser a razão L/R para que o erro percentual seja 1,00%? Em outras palavras, para que valor de L/R a igualdade é satisfeita?

$$\frac{(B \text{ da Eq. 29-4}) - (B \text{ real})}{(B \text{ real})}(100\%) = 1{,}00\%$$

••**19** Na Fig. 29-49 quatro fios retilíneos longos são perpendiculares ao papel, e suas seções retas formam um quadrado de lado a = 20 cm. As correntes são para fora do papel nos fios 1 e 4 e para dentro do papel nos fios 2 e 3, e todos os fios conduzem uma corrente de 20 A. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético no centro do quadrado?

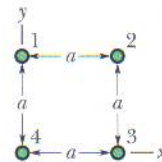



FIG. 29-49 Problemas 19, 36 e 39.

••**20** Na Fig. 29-50 duas espiras circulares concêntricas, que conduzem correntes no mesmo sentido, estão no mesmo plano. A espira 1 tem 1,50 cm de raio e conduz uma corrente de 4,00 mA. A espira 2 tem 2,50 cm de raio e conduz uma corrente de 6,00 mA. O campo magnético $\vec{B}$ no centro comum das duas espiras é medido enquanto se faz girar a espira 2 em torno de um diâmetro. Qual deve ser o ângulo de rotação da espira 2 para que o módulo do campo $\vec{B}$ seja 100 nT?

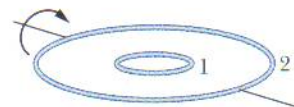



FIG. 29-50 Problema 20.

••**21** Na Fig. 29-48 o ponto P_2 está a uma distância R = 25,1 cm da extremidade mais próxima de um fio retilíneo de comprimento L = 13,6 cm que conduz uma corrente i = 0,693 A. (Observe que o fio *não* é longo.) Qual é o módulo do campo magnético no ponto P_2?

••**22** Na Fig. 29-51a o fio 1 é formado por um arco de circunferência e dois segmentos radiais e conduz uma corrente i_1 = 0,50 A no sentido indicado. O fio 2, mostrado em seção reta, é longo, retilíneo e perpendicular ao plano do papel. A distância entre o fio 2 e o centro do arco é igual ao raio R do arco, e o fio conduz uma corrente i_2 que pode ser ajustada. As duas correntes criam um campo magnético total $\vec{B}$ no centro do arco. A Fig. 29-51b mostra o quadrado do módulo do campo, B^2, em função do quadrado da corrente, i_2^2. A escala vertical é definida por B_s^2 = 10,0 × 10^{-10} T^2. Qual é o ângulo subtendido pelo arco?

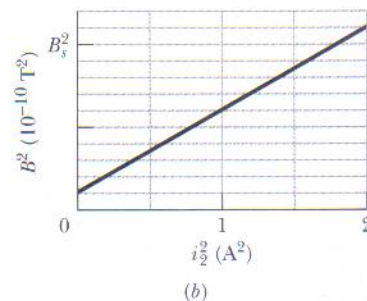
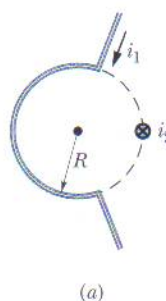



FIG. 29-51 Problema 22.

••23 A Fig. 29-52 mostra dois fios. O fio de baixo conduz uma corrente $i_1 = 0,40$ A e inclui um arco de circunferência com 5,0 cm de raio e centro no ponto P, que subtende um ângulo de 180°. O fio de cima conduz uma corrente $i_2 = 2i_1$ e inclui um arco de circunferência com 4,0 cm de raio e centro também no ponto P, que subtende um ângulo de 120°. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do campo magnético $\vec{B}$ para os sentidos das correntes indicados na figura. Determine também (c) o módulo e (d) a direção de $\vec{B}$ se o sentido da corrente i_1 for invertido.

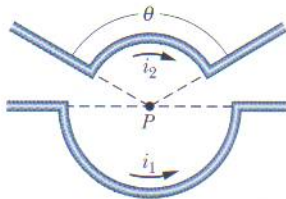



FIG. 29-52 Problema 23.

••24 Uma corrente é estabelecida em uma espira constituída por uma semicircunferência de 4,00 cm de raio, uma semicircunferência concêntrica de raio menor e dois segmentos retilíneos radiais, todos no mesmo plano. A Fig. 29-53a mostra o arranjo, mas não está desenhada em escala. O módulo do campo magnético produzido no centro de curvatura é 47,25 μT. Quando a semicircunferência menor sofre uma rotação de 180° (Fig. 29-53b) o módulo do campo magnético produzido no centro de curvatura diminui para 15,75 μT e o sentido do campo se inverte. Qual é o raio da semicircunferência menor?

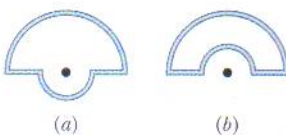



FIG. 29-53 Problema 24.

••25 Na Fig. 29-54 dois fios longos retilíneos (mostrados em seção reta) conduzem correntes $i_1 = 30,0$ mA e $i_2 = 40,0$ mA dirigidas para fora do papel. Os fios estão à mesma distância da origem, onde criam um campo magnético $\vec{B}$. Qual deve ser o novo valor de i_1 para que $\vec{B}$ sofra uma rotação de 20,0° no sentido horário?

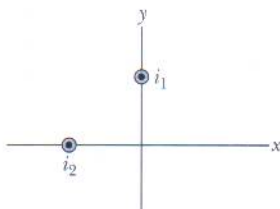



FIG. 29-54 Problema 25.

••26 A Fig. 29-55a mostra dois fios. O fio 1 é formado por um arco de circunferência de raio R e dois segmentos radiais e conduz uma corrente $i_1 = 2,0$ A no sentido indicado. O fio 2 é longo e retilíneo, conduz uma corrente i_2 que pode ser ajustada e está a uma distância $R/2$ do centro do arco. O campo magnético $\vec{B}$ produzido pelas duas correntes é medido no centro de curvatura do arco. A Fig. 29-55b mostra a componente de $\vec{B}$ na direção perpendicular ao plano do papel em função da corrente i_2. A escala horizontal é definida por $i_{2s} = 1,00$ A. Determine o ângulo subtendido pelo arco.

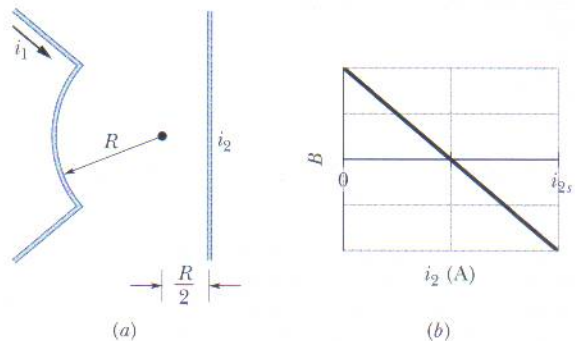



FIG. 29-55 Problema 26.

••27 Um fio longo está sobre o eixo x e conduz uma corrente de 30 A no sentido positivo do eixo x. Um segundo fio longo é perpendicular ao plano xy, passa pelo ponto (0; 4,0 m; 0) e conduz uma corrente de 40 A no sentido positivo do eixo z. Determine o módulo do campo magnético produzido pelos fios no ponto (0; 2,0 m; 0).

••28 Na Fig. 29-56, parte de um fio longo isolado que conduz uma corrente $i = 5,78$ mA é encurvada para formar uma espira circular de raio $R = 1,89$ cm. Em termos dos vetores unitários, determine o campo magnético C no centro da espira (a) se a espira está no plano do papel; (b) se a espira está perpendicular ao plano do papel, depois de sofrer uma rotação de 90° no sentido anti-horário, como mostra a figura.

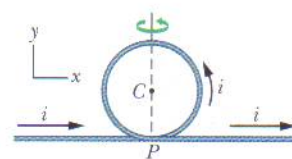



FIG. 29-56 Problema 28.

••29 A Fig. 29-57 mostra, em seção reta, dois fios retilíneos muito longos, ambos percorridos por uma corrente de 4,00 A orientada para fora do papel. A distância entre os fios é $d_1 = 6,00$ m e a distância entre o ponto P, eqüidistante dos dois fios, e o ponto médio do segmento de reta que liga os dois fios é $d_2 = 4,00$ m. Determine o módulo do campo magnético total produzido no ponto P pelos dois fios.

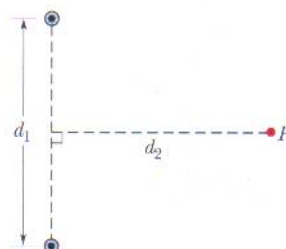



FIG. 29-57 Problema 29.

•••30 A espira percorrida por corrente da Fig. 29-58*a* é constituída por uma semicircunferência com 10,0 cm de raio, uma semicircunferência menor com o mesmo centro e dois segmentos radiais, todos no mesmo plano. A semicircunferência menor sofre uma rotação de um ângulo θ para fora do plano (Fig. 29-58*b*). A Fig. 29-58*c* mostra o módulo do campo magnético no centro de curvatura em função do ângulo θ. A escala vertical é definida por B_a = 10,0 μT e B_b = 12,0 μT. Qual é o raio do semicírculo menor?

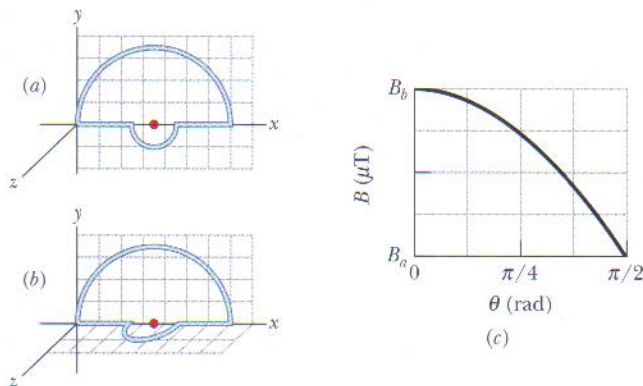



FIG. 29-58 Problema 30.

•••31 A Fig. 29-59 mostra uma seção reta de uma fita longa e fina de largura w = 4,91 cm que está conduzindo uma corrente uniformemente distribuída i = 4,61 μA para dentro do papel. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético $\vec{B}$ em um ponto P no plano da fita situado a uma distância d = 2,16 cm de uma das bordas? (*Sugestão:* Imagine a fita como um conjunto de fios paralelos.)

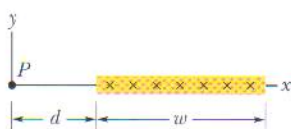



FIG. 29-59 Problema 31.

•••32 A Fig. 29-60 mostra, em seção reta, dois fios retilíneos longos apoiados na superfície de cilindro de plástico de 20,0 cm de raio, paralelamente ao eixo do cilindro. O fio 1 conduz uma corrente i_1 = 60,0 mA para fora do papel e é mantido fixo no lugar, do lado esquerdo do cilindro. O fio 2 conduz uma corrente i_2 = 40,0 mA para fora do papel e pode ser deslocado em torno do cilindro. Qual deve ser o ângulo (positivo) θ_2 do fio 2 para que, na origem, o módulo do campo magnético total seja 80,0 nT?

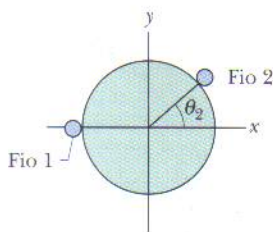



FIG. 29-60 Problema 32.

•••33 Na Fig. 29-61 a = 4,7 cm e i = 13 A. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético no ponto P. (Observe que não se trata de fios longos.)

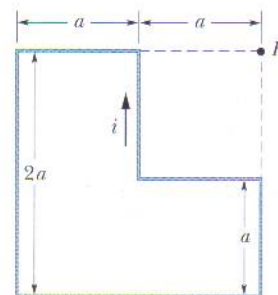



FIG. 29-61 Problema 33.

•••34 Dois fios longos retilíneos percorridos por corrente estão apoiados na superfície de um cilindro longo de plástico de raio R = 20,0 cm, paralelamente ao eixo do cilindro. A Fig. 29-62*a* mostra, em seção reta, o cilindro e o fio 1, mas não o fio 2. Com o fio 2 mantido fixo no lugar o fio 1 é deslocado sobre o cilindro, do ângulo θ_1 = 0° até o ângulo θ_1 = 180°, passando pelo primeiro e segundo quadrantes do sistema de coordenadas xy. O campo magnético $\vec{B}$ no centro do cilindro é medido em função de θ_1. A Fig. 29-62*b* mostra a componente B_x de $\vec{B}$ em função de θ_1 (a escala vertical é definida por B_{xs} = 6,0 μT), e a Fig. 29-62*c* mostra a componente B_y (a escala vertical é definida por B_{ys} = 4,0 μT). (a) Qual é o ângulo θ_2 que define a posição do fio 2? Determine (b) o valor e (c) o sentido (para dentro ou para fora do papel) da corrente no fio 1. Determine também (d) o valor e (e) o sentido da corrente no fio 2.

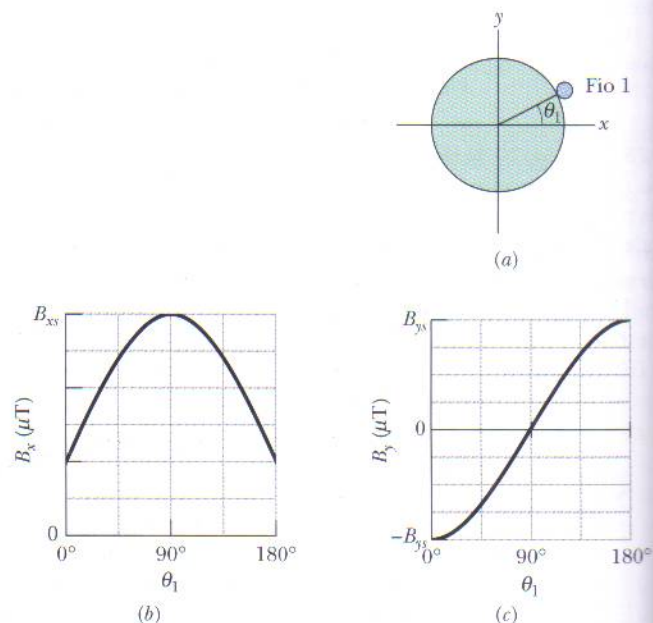



FIG. 29-62 Problema 34.

seção 29-3 Forças entre Duas Correntes Paralelas

•35 A Fig. 29-63 mostra o fio 1 em seção reta; o fio é retilíneo e longo, conduz uma corrente de 4,00 mA para fora do papel e

está a uma distância $d_1 = 2{,}40$ cm de uma superfície. O fio 2, que é paralelo ao fio 1 e também longo, está sobre a superfície a uma distância horizontal $d_2 = 5{,}00$ cm do fio 1 e conduz uma corrente de 6,80 mA para dentro do papel. Qual é a componente x da força magnética *por unidade de comprimento* que age sobre o fio 2?

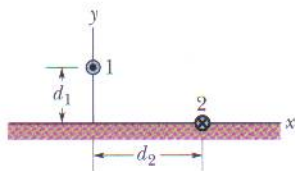



FIG. 29-63 Problema 35.

••36 Na Fig. 29-49 quatro fios retilíneos longos são perpendiculares ao papel, e suas seções retas formam um quadrado de lado $a = 8{,}50$ cm. Todos os fios conduzem correntes de 15,0 A para fora do papel. Em termos dos vetores unitários, qual é a força magnética *por metro de fio* que age sobre o fio 1?

••37 Na Fig. 29-64 cinco fios paralelos longos no plano xy estão separados por uma distância $d = 50{,}0$ cm. As correntes para dentro do papel são $i_1 = 2{,}00$ A, $i_3 = 0{,}250$ A, $i_4 = 4{,}00$ A e $i_5 = 2{,}00$ A; a corrente para fora do papel é $i_2 = 4{,}00$ A. Qual é o módulo da força *por unidade de comprimento* que age sobre o fio 3?

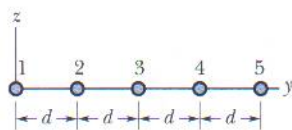



FIG. 29-64 Problemas 37 e 38.

••38 Na Fig. 29-64 cinco fios paralelos longos no plano xy estão separados por uma distância $d = 8{,}00$ cm, têm 10,0 m de comprimento e conduzem correntes iguais de 3,00 A para fora do papel. Em termos dos vetores unitários, determine a força (a) sobre o fio 1; (b) sobre o fio 2; (c) sobre o fio 3; (d) sobre o fio 4; (e) sobre o fio 5.

••39 Na Fig. 29-49 quatro fios retilíneos longos são perpendiculares ao papel, e suas seções retas formam um quadrado de lado $a = 13{,}5$ cm. Todos os fios conduzem correntes de 7,50 A, e as correntes são para fora do papel nos fios 1 e 4 e para dentro do papel nos fios 2 e 3. Em termos dos vetores unitários, qual é a força magnética *por metro de fio* que age sobre o fio 4?

••40 A Fig. 29-65*a* mostra, em seção reta, três fios percorridos por corrente que são longos, retilíneos e paralelos. Os fios 1 e 2 são mantidos fixos sobre o eixo x, separados por uma distância d. O fio 1 conduz uma corrente de 0,750 A, mas o sentido da corrente é desconhecido. O fio 3, com uma corrente de 0,250 para fora do papel, pode ser deslocado ao longo do eixo x, o que modifica a força $\vec{F}_2$ a que está sujeito o fio 2. A componente y dessa força é F_{2y} e o valor por unidade de comprimento do fio 2 é F_{2y}/L_2. A Fig. 29-65*b* mostra o valor de F_{2y}/L_2 em função da coordenada x do fio 3. O gráfico possui uma assíntota $F_{2y}/L_2 = -0{,}627$ μN/m para $x \to \infty$. A escala horizontal é definida por $x_s = 12{,}0$ cm. Determine (a) o valor e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) da corrente no fio 2.

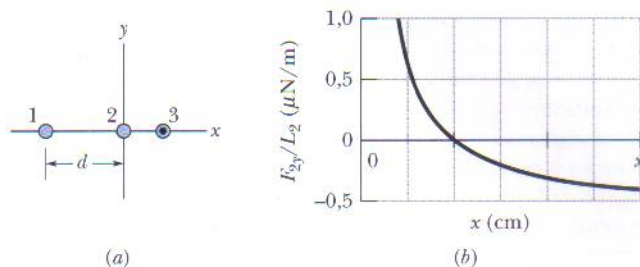



FIG. 29-65 Problema 40.

•••41 Na Fig. 29-66 um fio retilíneo longo conduz uma corrente $i_1 = 30{,}0$ A e uma espira retangular conduz uma corrente $i_2 = 20{,}0$ A. Suponha que $a = 1{,}00$ cm, $b = 8{,}00$ cm e $L = 30{,}0$ cm. Em termos dos vetores unitários, qual é a força a que está submetida a espira?

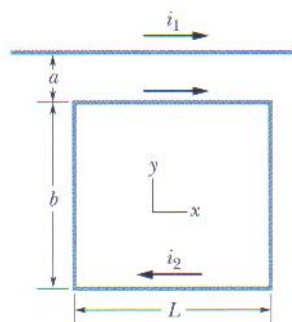



FIG. 29-66 Problema 41.

seção 29-4 Lei de Ampère

•42 A Fig. 29-67 mostra duas curvas fechadas que envolvem duas espiras que conduzem correntes $i_1 = 5{,}0$ A e $i_2 = 3{,}0$ A. Determine o valor da integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (a) para a curva 1; (b) para a curva 2.

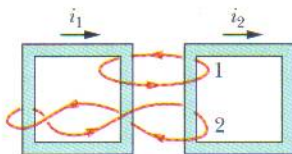



FIG. 29-67 Problema 42.

•43 Os oito fios da Fig. 29-68 conduzem correntes iguais de 2,0 A para dentro ou para fora do papel. Duas curvas estão indicadas para a integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Determine o valor da integral (a) para a curva 1; (b) para a curva 2.

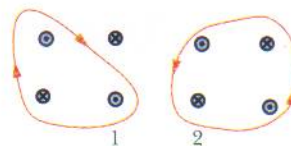



FIG. 29-68 Problema 43.

•44 Oito fios são perpendiculares ao plano do papel nos pontos indicados na Fig. 29-69. O fio k ($k = 1, 2, \ldots, 8$) conduz uma corrente ki, onde $i = 4{,}50$ mA. Para os fios com k ímpar, a corrente é para fora do papel; para os fios com k par, a corrente é para dentro do papel. Determine o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo da curva fechada mostrada na figura, no sentido indicado.

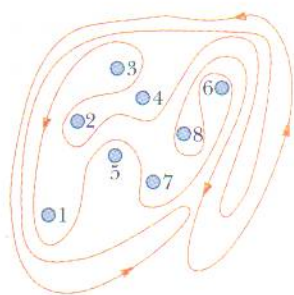



FIG. 29-69 Problema 44.

•45 A Fig. 29-70 mostra uma seção reta de um fio cilíndrico longo de raio a = 2,00 cm que conduz uma corrente uniforme de 170 A. Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente a uma distância do eixo do fio igual a (a) 0; (b) 1,00 cm; (c) 2,00 cm (superfície do fio); (d) 4,00 cm.

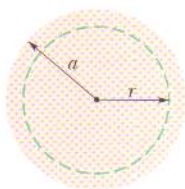



FIG. 29-70 Problema 45.

•46 Em uma certa região existe uma densidade de corrente uniforme de 15 A/m² no sentido positivo do eixo z. Determine o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ quando a integral de linha é calculada ao longo de três segmentos de reta, de $(4d, 0, 0)$ para $(4d, 3d, 0)$, de $(4d, 3d, 0)$ para $(0, 0, 0)$ e de $(0, 0, 0)$ para $(4d, 0, 0)$, com d = 20 cm.

••47 A densidade de corrente $\vec{J}$ no interior de um fio cilíndrico longo de raio a = 3,1 mm é paralela ao eixo central, e seu módulo varia linearmente com a distância radial r de acordo com a equação $J = J_0 r/a$, onde J_0 = 310 A/m². Determine o módulo do campo magnético (a) para $r = 0$; (b) para $r = a/2$; (c) para $r = a$.

••48 Na Fig. 29-71 um cano circular longo de raio externo R = 2,6 cm conduz uma corrente (uniformemente distribuída) i = 8,00 mA para dentro do papel, e seu eixo está a uma distância de 3,00R de um fio paralelo ao cano. Determine (a) o valor e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) da corrente no fio para que o campo magnético no ponto P tenha o mesmo módulo que o campo magnético no eixo do cano e o sentido oposto.

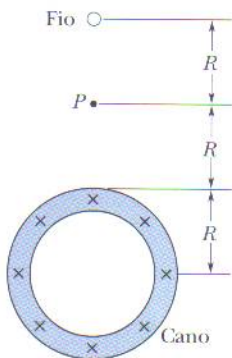



FIG. 29-71 Problema 48.

seção 29-5 Solenóides e Toróides

•49 Um solenóide de 200 espiras com 25 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro conduz uma corrente de 0,29 A. Calcule o módulo do campo magnético $\vec{B}$ no interior do solenóide.

•50 Um solenóide com 1,30 m de comprimento e 2,60 cm de diâmetro conduz uma corrente de 18,0 A. O campo magnético no interior do solenóide é 23,0 mT. Determine o comprimento do fio de que é feito o solenóide.

•51 Um toróide de seção reta quadrada, com 5,00 cm de lado e um raio interno de 15,0 cm, tem 500 espiras e conduz uma corrente de 0,800 A. (Ele é feito a partir de um solenóide quadrado, em vez de redondo, como o da Fig. 29-17.) Determine o campo magnético no interior do toróide (a) a uma distância do centro igual ao raio interno; (b) a uma distância do centro igual ao raio externo.

•52 Um solenóide com 95,0 cm de comprimento tem um raio de 2,00 cm e uma bobina com 1200 espiras; a corrente é 3,60 A. Calcule o módulo do campo magnético no interior do solenóide.

••53 Um solenóide longo com 10,0 espiras/cm e um raio de 7,00 cm conduz uma corrente de 20,0 mA. Um condutor retilíneo situado no eixo central do solenóide conduz uma corrente de 6,00 A. (a) A que distância do eixo do solenóide a direção do campo magnético resultante faz um ângulo de 45° com a direção do eixo? (b) Qual é o módulo do campo magnético a essa distância do eixo?

••54 Um elétron é introduzido em uma das extremidades de um solenóide. Ao penetrar no campo magnético uniforme que existe no interior do solenóide a velocidade do elétron é 800 m/s e o vetor velocidade faz um ângulo de 30° com o eixo central do solenóide. O solenóide tem 8000 espiras e conduz uma corrente de 4,0 A. Quantas revoluções o elétron descreve no interior do solenóide antes de chegar à outra extremidade? (Em um solenóide real, no qual o campo não é uniforme perto das extremidades, o número de revoluções é ligeiramente menor que o valor calculado neste problema.)

••55 Um solenóide longo tem 100 espiras/cm e conduz uma corrente i. Um elétron se move no interior do solenóide em uma circunferência de 2,30 cm de raio perpendicular ao eixo do solenóide. A velocidade do elétron é 0,0460c (c = velocidade da luz). Determine a corrente i no solenóide.

seção 29-6 Uma Bobina Percorrida por Corrente como um Dipolo Magnético

•56 A Fig. 29-72a mostra um fio que conduz uma corrente i e forma uma bobina circular com apenas uma espira. Na Fig. 29-72b um fio de mesmo comprimento forma uma bobina circular com duas espiras de raio igual à metade do raio da espira da Fig. 29-72a. (a) Se B_a e B_b são os módulos dos campos magnéticos nos centros das duas bobinas, qual é o valor da razão B_b/B_a? (b) Qual é o valor da razão μ_b/μ_a entre os momentos dipolares das duas bobinas?

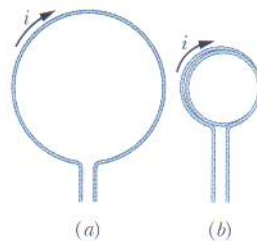



FIG. 29-72 Problema 56.

•57 Qual é o módulo do momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ do solenóide descrito no Problema 49?

•58 A Fig. 29-73 mostra um dispositivo conhecido como bobina de Helmholtz, formado por duas bobinas circulares coa-

xiais de raio R = 25,0 cm, com 200 espiras, separadas por uma distância s = R. As duas bobinas conduzem correntes iguais i = 12,2 mA no mesmo sentido. Determine o módulo do campo magnético no ponto P, situado sobre o eixo das bobinas, a meio caminho entre elas.

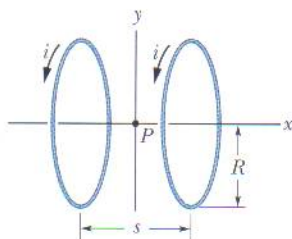



FIG. 29-73 Problemas 58 e 86.

•59 Um estudante fabrica um pequeno eletroímã enrolando 300 espiras de fio em um cilindro de madeira com um diâmetro d = 5,0 cm. A bobina é ligada a uma bateria que produz uma corrente de 4,0 A no fio. (a) Qual é o módulo do momento dipolar magnético do eletroímã? (b) A que distância axial $z \gg d$ o campo magnético do eletroímã tem um módulo de 5,0 μT (aproximadamente um décimo do campo magnético da Terra)?

••60 Na Fig. 29-74 uma corrente i = 56,2 mA circula em uma espira formada por dois segmentos radiais e duas semicircunferências de raios a = 5,72 cm e b = 9,36 cm com um centro comum P. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora da página) do campo magnético no ponto P e (c) o módulo e (d) o sentido do momento magnético da espira.

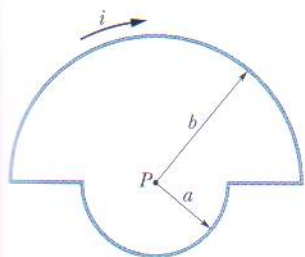



FIG. 29-74 Problema 60.

••61 Na Fig. 29-75 um fio conduz uma corrente de 6,0 A ao longo do circuito fechado *abcdefgha*, que percorre 8 das 12 arestas de um cubo com 10 cm de aresta. (a) Considerando o circuito uma combinação de três espiras quadradas (*bcfgb*, *abgha* e *cdefc*), determine o momento magnético total do circuito em termos dos vetores unitários. (b) Determine o módulo do campo magnético total no ponto de coordenadas (0; 5,0 m; 0).

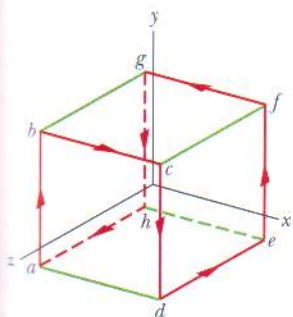



FIG. 29-75 Problema 61.

••62 Na Fig. 29-76*a* duas espiras circulares, com diferentes correntes mas o mesmo raio de 4,0 cm, têm os centros sobre o eixo y. Estão separadas inicialmente por uma distância L = 3,0 cm, com a espira 2 posicionada na origem do eixo. As correntes nas duas espiras produzem um campo magnético na origem cuja componente y é B_y. Essa componente é medida enquanto a espira 2 é deslocada no sentido positivo do eixo y. A Fig. 29-76*b* mostra o valor de B_y em função da coordenada y da espira 2. A curva tem uma assíntota B_y = 7,20 μT para $y \to \infty$. A escala horizontal é definida por y_s = 10,0 cm. Determine (a) a corrente i_1 na espira 1; (b) a corrente i_2 na espira 2.

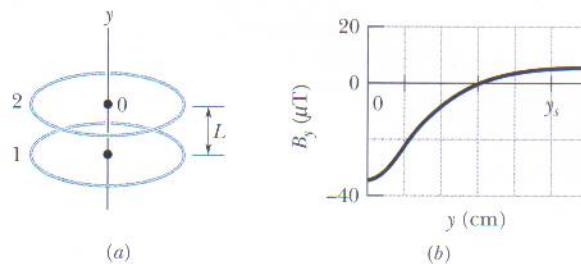



FIG. 29-76 Problema 62.

••63 Uma espira circular com 12 cm de raio conduz uma corrente de 15 A. Uma bobina plana com 0,82 cm de raio e 50 espiras, conduzindo uma corrente de 1,3 A, é concêntrica com a espira. O plano da espira é perpendicular ao plano da bobina. Suponha que o campo magnético da espira é uniforme na região em que se encontra a bobina. Determine (a) o módulo do campo magnético produzido pela espira no centro comum da espira e da bobina; (b) o módulo do torque exercido pela espira sobre a bobina.

Problemas Adicionais

64 A Fig. 29-77 mostra uma espira percorrida por uma corrente i = 2,00 A. A espira é formada por uma semicircunferência de 4,00 m de raio, dois quartos de circunferência de 2,00 m de raio cada um e três segmentos retilíneos. Qual é o módulo do campo magnético no centro comum dos arcos de circunferência?

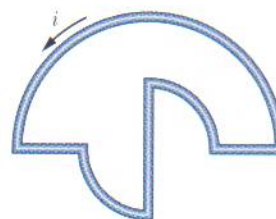



FIG. 29-77 Problema 64.

65 A Fig. 29-78 mostra uma seção reta de um condutor cilíndrico longo de raio r = 4,00 cm que contém um furo cilíndrico de raio b = 1,50 cm. Os eixos centrais do cilindro e do furo são paralelos e estão separados por uma distância d = 2,00 cm; uma corrente i = 5,25 A está distribuída uniformemente na região sombreada. (a) Determine o módulo do campo magnético no centro do furo. (b) Discuta os casos especiais b = 0 e d = 0.

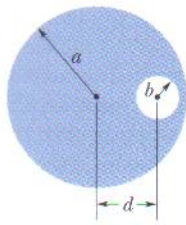



FIG. 29-78 Problema 65.

66 O módulo do campo magnético a 88,0 cm do eixo de um fio retilíneo longo é 7,30 μT. Determine a corrente no fio.

67 Três fios longos são paralelos ao eixo z e conduzem uma corrente de 10 A no sentido positivo do eixo z. Os pontos de interseção dos fios com o plano xy formam um triângulo eqüilátero com 50 cm de lado, como mostra a Fig. 29-79. Um quarto fio (fio b) passa pelo ponto médio da base do triângulo e é paralelo aos outros três fios. Se a força magnética exercida sobre o fio a é zero, determine (a) o valor e (b) o sentido ($+z$ ou $-z$) da corrente no fio b.

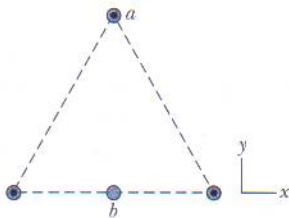



FIG. 29-79 Problema 67.

68 A Fig. 29-80 mostra, em seção reta, dois fios longos paralelos separados por uma distância d = 10,0 cm; os dois fios conduzem uma corrente de 100 A, que tem o sentido para fora do papel no fio 1. O ponto P está sobre a mediatriz do segmento de reta que liga os dois fios. Em termos dos vetores unitários, determine o campo magnético no ponto P se o sentido da corrente 2 for (a) para fora do papel; (b) para dentro do papel.

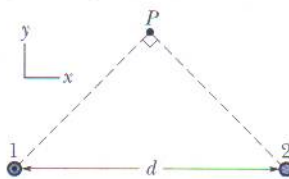



FIG. 29-80 Problema 68.

69 Um fio nu de cobre calibre 10 (ou seja, com 2,6 mm de diâmetro) pode conduzir uma corrente de 50 A sem superaquecer. Para esta corrente, qual é o módulo do campo magnético na superfície do fio?

70 Um fio longo vertical conduz uma corrente desconhecida. Um cilindro oco, longo, de espessura desprezível, coaxial com o fio, conduz uma corrente de 30 mA, dirigida para cima. A superfície do cilindro tem um raio de 3,0 mm. Se o módulo do campo magnético em um ponto situado a 5,0 mm de distância do fio é 1,0 μT, determine (a) o valor e (b) o sentido da corrente no fio.

71 A Fig. 29-81 mostra um segmento de fio de comprimento Δs = 3,0 cm, com o centro na origem, percorrido por uma corrente i = 2,0 A no sentido positivo do eixo y (como parte de um circuito completo). Para calcular o módulo do campo magnético $\vec{B}$ produzido pelo segmento em um ponto situado a vários metros da origem podemos usar a lei de Biot-Savart na forma $B = (\mu_0/4\pi)i\,\Delta s\,(\text{sen}\,\theta)/r^2$, já que r e θ podem ser considerados constantes para todo o segmento. Calcule $\vec{B}$ (em termos dos vetores unitários) para pontos situados nas seguintes coordenadas: (a) (0; 0; 5,0 m); (b) (0; 6,0 m; 0); (c) (7,0 m; 7,0 m; 0); (d) (−3,0 m; −4,0 m; 0).

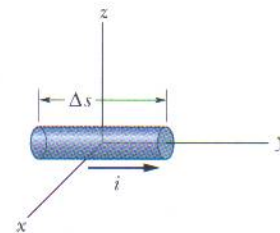



FIG. 29-81 Problema 71.

72 Na Fig. 29-82, uma espira conduz uma corrente i = 200 mA. A espira é formada por dois segmentos radiais e dois arcos de circunferência concêntricos de raios de 2,00 m e 4,00 m. O ângulo θ é $\pi/4$ rad. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para for a do papel) do campo magnético no centro de curvatura P.

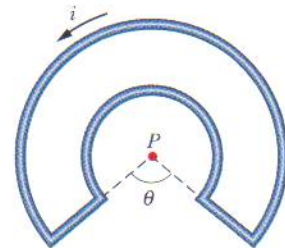



FIG. 29-82 Problema 72.

73 Um fio cilíndrico com 8,00 mm de raio conduz uma corrente de 25,0 A, uniformemente distribuída em sua seção reta. A que distância do eixo central existe um ponto no interior do fio onde o módulo do campo magnético é 0,100 mT?

74 Um fio longo que conduz uma corrente de 100 A é perpendicular às linhas de campo magnético de um campo magnético uniforme cujo módulo é 5,0 mT. A que distância do fio o campo magnético é zero?

75 Duas espiras, uma em forma de circunferência e outra em forma de quadrado, têm o mesmo comprimento L e conduzem a mesma corrente i. Mostre que o campo magnético produzido no centro da espira quadrada é maior que o campo magnético produzido no centro da espira circular.

76 Um fio longo retilíneo conduz uma corrente de 50 A. Um elétron está se movendo com uma velocidade de $1{,}0 \times 10^7$ m/s a 5,0 cm de distância do fio. Determine o módulo da força magnética que age sobre o elétron se a velocidade do elétron é (a) na direção do fio, (b) paralela ao fio no sentido da corrente, (c) perpendicular às direções dos itens (a) e (b).

77 Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético no ponto P da Fig. 29-83 se $i = 10$ A e $a = 8{,}0$ cm? (Observe que os fios *não* são longos.)

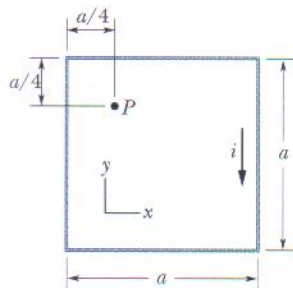



FIG. 29-83 Problema 77.

78 A Fig. 29-84 mostra, em seção reta, dois fios longos paralelos separados por uma distância $d = 18{,}6$ cm. A corrente nos fios é 4,23 A para fora do papel, no fio 1, e para dentro do papel, no fio 2. Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético no ponto P, situado a uma distância $R = 34{,}2$ cm da reta que liga os dois fios?

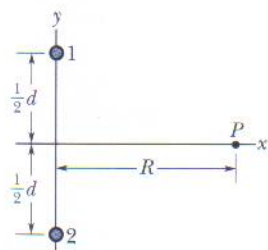



FIG. 29-84 Problema 78.

79 A Fig. 29-85 mostra uma seção reta de uma placa condutora infinita que conduz uma corrente λ por unidade de largura, dirigida para fora do papel. (a) Use a lei de Biot-Savart e a simetria da situação para mostrar que para todos os pontos P acima da placa e para todos os pontos P' abaixo da placa o campo magnético $\vec{B}$ é paralelo à placa e tem o sentido indicado na figura. (b) Use a lei de Ampère para mostrar que $B = \mu_0\lambda/2$ em todos os pontos P e P'.

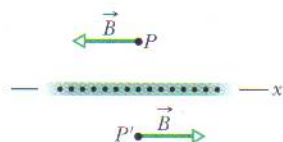



FIG. 29-85 Problema 79.

80 Dois fios longos estão no plano xy e conduzem correntes no sentido positivo do eixo x. O fio 1 está em $y = 10{,}0$ cm e conduz uma corrente de 6,00 A; o fio 2 está em $y = 5{,}00$ cm e conduz uma corrente de 10,0 A. (a) Em termos dos vetores unitários, qual é o campo magnético $\vec{B}$ na origem? (b) Para que valor de y o campo $\vec{B}$ é zero? (c) Se a corrente no fio 1 é invertida, para que valor de y o campo $\vec{B}$ é zero?

81 A Fig. 29-86 mostra uma seção reta de um condutor cilíndrico oco de raios a e b que conduz uma corrente i uniformemente distribuída. (a) Mostre que, no intervalo $b < r < a$, o módulo $B(r)$ do campo elétrico a uma distância r do eixo central do condutor é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)}\frac{r^2 - b^2}{r}.$$

(b) Mostre que, para r = a, a equação do item (a) fornece o módulo B do campo magnético na superfície do condutor; para $r = b$, o campo magnético é zero; para b 5 0, a equação fornece o módulo do campo magnético no interior de um condutor cilíndrico maciço de raio a. (c) Faça um gráfico de $B(r)$, no intervalo $0 < r <$ 6 cm, para $a = 2{,}0$ cm, $b = 1{,}8$ cm e $i = 100$ A.

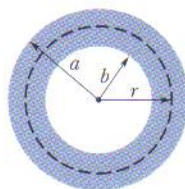



FIG. 29-86 Problema 81.

82 Três longos fios estão no plano xy, são paralelos ao eixo x e guardam entre si uma distância de 10 cm. Os dois fios externos conduzem uma corrente de 5,0 A no sentido positivo do eixo x. Determine o módulo da força que age sobre um trecho de 3,0 m de um dos fios externos se a corrente no fio central é 3,2 A (a) no sentido positivo do eixo x; (b) no sentido negativo do eixo x.

83 Na Fig. 29-87 dois fios muito longos conduzem a mesma corrente i. Ambos seguem um arco de 90° da mesma circunferência de raio R. Mostre que o campo magnético $\vec{B}$ no centro da circunferência é igual ao campo $\vec{B}$ em um ponto situado a uma distância R abaixo de um fio retilíneo muito longo que conduz uma corrente i para a esquerda.

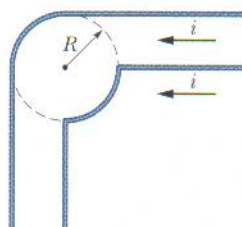



FIG. 29-87 Problema 83.

84 Um fio longo tem um raio maior que 4,0 mm e conduz uma corrente uniformemente distribuída em sua seção reta. O módulo do campo magnético produzido por essa corrente é 0,28 mT em um ponto situado a 4,0 mm do eixo do fio e 0,20 mT em um ponto situado a 10 mm do eixo do fio. Qual é o raio do fio?

85 Um condutor longo, oco, cilíndrico (raio interno 2,0 mm, raio externo 4,0 mm) é percorrido por uma corrente de 24 A distribuída uniformemente na seção reta. Um fio longo e fino coaxial com o cilindro conduz uma corrente de 24 A no sentido oposto. Determine o módulo do campo magnético (a) a 1,0 mm; (b) a 3,0 mm; (c) a 5,0 mm de distância do eixo central do fio e do cilindro.

86 Na Fig. 29-73 um arranjo conhecido como bobina de Helmholtz é formado por duas bobinas coaxiais circulares de N espiras e raio R, separadas por uma distância s. As duas bobinas conduzem uma corrente i no mesmo sentido. (a) Mostre que a derivada primeira do módulo do campo magnético das bobinas, dB/dx, é zero no ponto médio P para qualquer valor de s. Por que é razoável esperar que isso aconteça, tendo em vista a simetria da situação? (b) Mostre que a derivada segunda, d^2B/dx^2, também se anula no ponto P para $s = R$. Isso explica a uniformidade de

B nas proximidades do ponto P para essa distância entre as bobinas.

87 Uma espira quadrada de lado a conduz uma corrente i. Mostre que no centro da espira o módulo do campo elétrico produzido pela corrente é

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}.$$

88 Mostre que o módulo do campo magnético produzido no centro de uma espira retangular de comprimento L e largura W, percorrida por uma corrente i, é dado por

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

89 Uma espira quadrada de lado a conduz uma corrente i. Mostre que o módulo do campo magnético em um ponto sobre uma reta perpendicular ao plano da espira, passando pelo centro da espira, é dado por

$$B(x) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}},$$

onde x é a distância entre o ponto e o centro da espira.

Mostre que este resultado é compatível com o resultado do Problema 87.

90 A Fig. 29-88 é um desenho esquemático de um canhão eletromagnético. O projétil P é colocado entre dois trilhos de seção reta circular; uma fonte faz passar uma corrente nos trilhos e no projétil, que é feito de material condutor (não é necessário usar um fusível). (a) Seja w a distância entre os trilhos, R o raio dos trilhos e i a corrente. Mostre que o projétil é submetido a uma força para a direita, paralela aos trilhos, cujo módulo é dado aproximadamente por

$$F = \frac{i^2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{w + R}{R}.$$

(b) Se o projétil se encontra inicialmente em repouso na extremidade esquerda dos trilhos, determine a velocidade v com a qual é lançado da extremidade direita. Suponha que $i = 450$ kA, $w = 12$ mm, $R = 6{,}7$ cm, $L = 4{,}0$ m e a massa do projétil é 10 g.

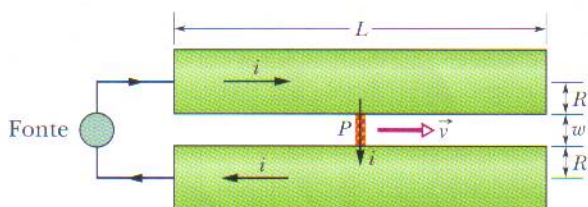



FIG. 29-88 Problema 90.

91 Mostre que um campo magnético uniforme $\vec{B}$ não pode diminuir bruscamente para zero (como pode parecer pela falta de linhas de campo à direita do ponto a na Fig. 29-89) quando nos deslocamos perpendicularmente a $\vec{B}$, ao longo, por exemplo, da seta horizontal da figura. (*Sugestão:* Aplique a lei de Ampère à amperiana retangular indicada pelas retas tracejadas.) Nos ímãs reais, o campo $\vec{B}$ tende a zero gradualmente quando nos afastamos da região entre os pólos. Modifique as linhas de campo da figura para torná-las mais realistas.

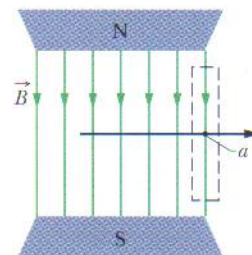



FIG. 29-89 Problema 91.

92 Mostre que se a espessura de um toróide é muito menor que o raio de curvatura a Eq. 29-24 para o campo no interior de um toróide se reduz à Eq. 29-23 para o campo no interior de um solenóide. Explique por que esse resultado é razoável.

93 A Fig. 29-90 mostra uma seção reta de um cabo coaxial longo de raios a, b e c. Correntes i de mesmo valor e sentidos opostos estão uniformemente distribuídas nos dois condutores. Escreva expressões para o módulo do campo magnético $B(r)$ em função da distância radial r (a) para $r < c$; (b) para $c < r < b$; (c) para $b < r < a$; (d) para $r > a$. (e) Teste essas expressões para todos os casos especiais possíveis. (f) Suponha que $a = 2{,}0$ cm, $b = 1{,}8$ cm, $c = 0{,}40$ cm e $i = 120$ A e plote a função $B(r)$ no intervalo $0 < r < 3$ cm.

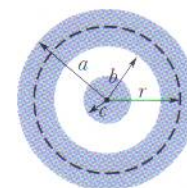



FIG. 29-90 Problema 93.

Indução e Indutância

Mark Joseph/Getty Images, Inc.

As metalúrgicas sempre usaram fornos aquecidos por combustão para fundir metais. Muitas metalúrgicas modernas, porém, para não poluir o ar utilizam fornos de indução, nos quais a energia é fornecida pela corrente elétrica que circula, conduzida por fios isolados, em torno do cadinho onde se encontra o metal. Os fios, em si, não se aquecem o suficiente para fundir o metal (caso contrário, também fundiriam). Na verdade, são resfriados a água para não se aquecerem.

Nesse caso, por que o metal se aquece o suficiente para fundir?

A resposta está neste capítulo.

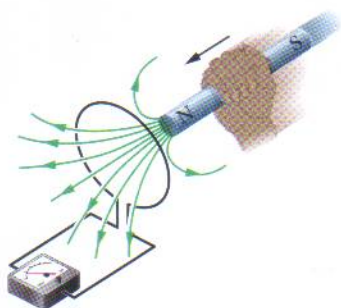



FIG. 30-1 Um amperímetro revela a existência de uma corrente na espira quando o ímã está em movimento em relação à espira.

30-1 O QUE É FÍSICA?

No Capítulo 29 discutimos o fato de que uma corrente produz um campo magnético. Isso foi uma surpresa para os cientistas que observaram o fenômeno pela primeira vez. Talvez ainda mais surpreendente tenha sido a descoberta do efeito oposto: Um campo magnético pode gerar um campo elétrico capaz de produzir uma corrente. Essa ligação entre um campo magnético e um campo elétrico produzido (*induzido*) é hoje chamada de *lei de indução de Faraday*.

As observações de Michael Faraday e outros cientistas que levaram a esta lei eram a princípio apenas ciência básica, interessantes apenas por revelarem mais uma faceta do modo como o universo funciona. Hoje em dia, porém, aplicações dessa ciência básica estão em toda parte. Assim, por exemplo, a indução é responsável pelo funcionamento das guitarras elétricas que revolucionaram o rock e ainda são muito usadas na música popular. Também é essencial para a operação dos geradores que fornecem energia elétrica para nossas cidades. Embora os fornos de indução não sejam os preferidos dos cozinheiros profissionais ou amadores, grandes fornalhas de indução são comuns nas fábricas onde grandes quantidades de metal têm que ser fundidas rapidamente.

Antes de tratar de aplicações como a guitarra elétrica, vamos discutir dois experimentos simples relacionados à lei de indução de Faraday.

30-2 | Dois Experimentos

Primeiro Experimento. A Fig. 30-1 mostra uma espira de material condutor ligada a um amperímetro. Como não existe uma bateria ou outra fonte de tensão no circuito, não há corrente. Entretanto, quando aproximamos da espira um ímã em forma de barra o amperímetro indica a passagem de uma corrente. A corrente desaparece quando o ímã pára. Quando afastamos o ímã da espira, a corrente torna a aparecer, no sentido contrário. Repetindo o experimento algumas vezes, chegamos às seguintes conclusões:

1. A corrente é observada apenas se existe um movimento relativo entre a espira e o ímã; a corrente desaparece no momento em que o movimento relativo deixa de existir.
2. Quanto mais rápido o movimento, maior a corrente.
3. Se quando aproximamos da espira o pólo norte do ímã a corrente tem o sentido horário, quando afastamos o pólo norte a corrente tem o sentido anti-horário. Nesse caso, quando aproximamos da espira o pólo sul a corrente tem o sentido anti-horário, e quando afastamos da espira o pólo sul a corrente tem o sentido horário.

A corrente produzida na espira é chamada de **corrente induzida**; o trabalho executado por unidade de carga para produzir essa corrente (ou seja, para colocar em movimento os elétrons de condução responsáveis pela corrente) é chamado de **força eletromotriz induzida**; o processo de produzir a corrente e a força eletromotriz recebe o nome de **indução**.

Segundo Experimento. Para este experimento usamos o arranjo da Fig. 30-2, com duas espiras condutoras próximas uma da outra, mas sem se tocarem. Quando a chave S é fechada, fazendo passar uma corrente na espira da direita, o amperímetro registra, por um breve instante, uma corrente na espira da esquerda. Quando a chave é aberta, o instrumento também registra uma corrente, no sentido oposto. Observamos uma corrente induzida (e, portanto, uma força eletromotriz induzida) quando a corrente na espira da direita está variando (aumentando ou diminuindo), mas não quando é constante (com a chave permanentemente aberta ou permanentemente fechada).

FIG. 30-2 Um amperímetro revela a existência de uma corrente no circuito da esquerda quando a chave S é fechada (fazendo circular uma corrente no circuito da direita) e quando a chave é S é aberta (fazendo com que a corrente no circuito da direita seja interrompida). A posição relativa das espiras permanece a mesma.

A força eletromotriz induzida e a corrente induzida nesses experimentos são aparentemente causadas pela variação de alguma coisa, mas qual é essa "coisa"? Faraday encontrou a resposta.

30-3 | A Lei de Indução de Faraday

Faraday descobriu que uma força eletromotriz e uma corrente podem ser induzidas em uma espira, como em nossos dois experimentos, fazendo variar a *quantidade de campo magnético* que atravessa a espira. Percebeu ainda que a "quantidade de campo magnético" pode ser visualizada em termos das linhas de campo magnético que atravessam a espira. A **lei de indução de Faraday**, enunciada em termos de nossos experimentos, diz o seguinte:

> Uma força eletromotriz é induzida na espira da esquerda das Figs. 30-1 e 30-2 quando o número de linhas de campo magnético que atravessam a espira varia.

O número de linhas de campo que atravessam a espira não importa; os valores da força eletromotriz e da corrente induzida são determinados pela *taxa de variação* desse número.

Em nosso primeiro experimento (Fig. 30-1) as linhas de campo magnético se espalham a partir do pólo norte do ímã. Assim, quando aproximamos o pólo norte do ímã da espira o número de linhas de campo que atravessam a espira aumenta. Esse aumento aparentemente faz com que os elétrons de condução se movam (ou seja, produz uma corrente induzida) e fornece a energia necessária para esse movimento (ou seja, produz uma força eletromotriz induzida). Quando o ímã pára de se mover o número de linhas de campo que atravessam a espira deixa de variar, e a corrente induzida e a força eletromotriz induzida desaparecem.

Em nosso segundo experimento (Fig. 30-2), quando a chave está aberta (a corrente é zero) não existem linhas de campo. Quando a chave é fechada passa a existir uma corrente na bobina da direita. A corrente produz um campo magnético nas vizinhanças da espira da direita que também passa pela espira da esquerda. Enquanto a corrente está aumentando o campo também está aumentando, e o número de linhas de campo que atravessam a espira da esquerda aumenta. Como no primeiro experimento, é este aumento do número de linhas de campo que aparentemente induz uma corrente e uma força eletromotriz na espira da esquerda. Quando a corrente na espira da direita atinge o valor final, constante, o número de linhas de campo que atravessam a espira da esquerda deixa de variar e a corrente induzida e a força eletromotriz induzida desaparecem.

A lei de Faraday não explica *por que* uma corrente e uma força eletromotriz são induzidas nos dois experimentos, mas ajuda a visualizar o fenômeno da indução.

Um Tratamento Quantitativo

Para aplicar a lei de Faraday a problemas específicos precisamos saber calcular a *quantidade de campo magnético* que atravessa uma espira. No Capítulo 23, em uma situação semelhante, precisávamos calcular a quantidade de campo elétrico que atravessa uma superfície. Para isso, definimos um fluxo elétrico $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Vamos agora definir um *fluxo magnético*: Suponha que uma espira que envolve uma área A seja submetida a um campo magnético $\vec{B}$. Nesse caso, o **fluxo magnético** que atravessa a espira é dado por

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{(fluxo magnético através da área } A\text{).} \qquad (30\text{-}1)$$

Como no Capítulo 23, $d\vec{A}$ é um vetor de módulo dA perpendicular a um elemento de área dA.

Como caso especial da Eq. 30-1, suponha que a espira esteja em um plano e que o campo magnético seja perpendicular ao plano da espira. Nesse caso, podemos escrever o produto escalar da Eq. 30-1 como $B\,dA \cos 0° = B\,dA$. Se, além disso, o campo magnético é uniforme, B pode ser colocado do lado de fora do sinal de in-

tegral. Nesse caso, a integral se reduz a $\int dA$, que é simplesmente a área da espira. Assim, a Eq. 30-1 se torna

$$\Phi_B = BA \qquad (\vec{B} \perp \text{área } A, \vec{B} \text{ uniforme}). \tag{30-2}$$

De acordo com as Eqs. 30-1 e 30-2, a unidade de fluxo magnético é o tesla-metro quadrado, que recebe o nome de *weber* (Wb):

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2. \tag{30-3}$$

Usando a definição de fluxo magnético, podemos enunciar a lei de Faraday de modo mais rigoroso:

O módulo da força eletromotriz $\mathscr{E}$ induzida em uma espira condutora é igual à taxa de variação com o tempo do fluxo magnético Φ_B que atravessa a espira.

Como vamos ver na próxima seção, a força eletromotriz induzida $\mathscr{E}$ se opõe à variação do fluxo, de modo que, matematicamente, a lei de Faraday pode ser escrita na forma

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(lei de Faraday)}, \tag{30-4}$$

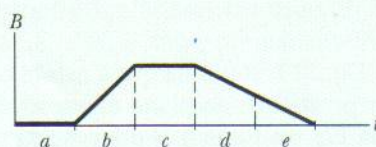
onde o sinal negativo indica a oposição a que nos referimos. O sinal negativo da Eq. 30-4 é freqüentemente omitido, já que em muitos casos estamos interessados apenas no valor absoluto da força eletromotriz induzida.

Se o fluxo magnético através de uma bobina de N espiras sofre uma variação, uma força eletromotriz é induzida em cada espira e a força eletromotriz total é a soma dessas forças eletromotrizes. Se as espiras da bobina estão muito próximas (ou seja, se temos um *enrolamento compacto*), o mesmo fluxo magnético Φ_B atravessa todas as espiras, e a força eletromotriz total induzida na bobina é dada por

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(bobina de } N \text{ espiras)}. \tag{30-5}$$

Existem três formas de mudar o fluxo magnético que atravessa uma bobina:

1. Mudar o módulo B do campo magnético.
2. Mudar a área total da bobina ou a parte da área atravessada pelo campo magnético (aumentando ou diminuindo o tamanho da bobina, no primeiro caso, e colocando uma parte maior ou menor da bobina na região onde existe o campo, no segundo caso).
3. Mudar o ângulo entre a orientação do campo magnético $\vec{B}$ e o plano da bobina (fazendo girar a bobina, por exemplo).

TESTE 1 O gráfico mostra o módulo $B(t)$ de um campo magnético uniforme que atravessa uma bobina condutora, com o direção do campo perpendicular ao plano da bobina. Coloque as cinco regiões do gráfico na ordem do valor absoluto da força eletromotriz induzida da bobina, começando pelo maior.

Exemplo 30-1 Aumente sua capacidade

O solenóide longo S representado em corte na Fig. 30-3 possui 220 espiras/cm, tem um diâmetro $D = 3{,}2$ cm e conduz uma corrente $i = 1{,}5$ A. No centro do solenóide é colocada uma bobina C, de enrolamento compacto, com 130 espiras e diâmetro $d = 2{,}1$ cm. A corrente no solenóide é reduzida a zero a uma taxa constante em 25 ms. Qual é o valor absoluto da força eletromotriz induzida na bobina C enquanto a corrente no solenóide está variando?

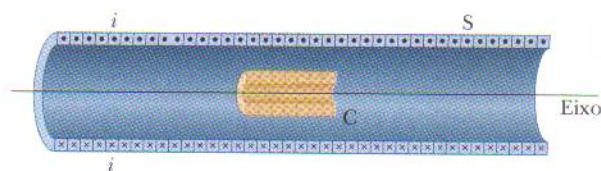



FIG. 30-3 Uma bobina C no interior de um solenóide S que conduz uma corrente i.

IDÉIAS-CHAVE

1. Como está situada no centro do solenóide, a bobina C é submetida ao campo magnético produzido pela corrente i do solenóide; assim, um fluxo Φ_B atravessa a bobina C.
2. Quando a corrente i diminui, o fluxo Φ_B também diminui.
3. De acordo com a lei de Faraday, quando Φ_B diminui, uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ é induzida na bobina C.
4. O fluxo em cada espira da bobina C depende da área A e da orientação da espira em relação ao campo $\vec{B}$ do solenóide. Como $\vec{B}$ é uniforme e perpendicular ao plano das espiras, o fluxo é dado pela Eq. 30-2 ($\Phi_B = BA$).
5. De acordo com a Eq. 29-23 ($B = \mu_0 in$), o módulo B do campo magnético no interior do solenóide depende da corrente i do solenóide e do número n de espiras por unidade de comprimento.

Cálculos: Como a bobina C possui mais de uma espira, aplicamos a lei de Faraday na forma da Eq. 30-5 ($\mathscr{E} = -N\, d\Phi_B/dt$), onde o número N de espiras é 130 e $d\Phi_B/dt$ é a taxa de variação do fluxo em cada espira.

Como a corrente no solenóide diminui a uma taxa constante, o fluxo Φ_B também diminui a uma taxa constante e, portanto, podemos escrever $d\Phi_B/dt$ como $\Delta\Phi_B/\Delta t$. Para calcular $\Delta\Phi_B$, precisamos conhecer apenas os valores inicial e final do fluxo. O fluxo final $\Phi_{B,f}$ é zero porque a corrente final no solenóide é zero. Para determinar o fluxo inicial $\Phi_{B,i}$, observamos que a área A é $\pi d^2/4$ ($= 3{,}464 \times 10^{-4}$ m^2) e $n = 220$ espiras/cm ou 22.000 espiras/m. Substituindo a Eq. 29-23 na Eq. 30-2, obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi_{B,i} &= BA = (\mu_0 in)A \\ &= (4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(1{,}5\ \text{A})(22\,000\ \text{espiras/m}) \\ &\quad \times (3{,}464 \times 10^{-4}\,\text{m}^2) \\ &= 1{,}44 \times 10^{-5}\ \text{Wb}.\end{aligned}$$

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,f} - \Phi_{B,i}}{\Delta t} \\ &= \frac{(0 - 1{,}44 \times 10^{-5}\ \text{Wb})}{25 \times 10^{-3}\ \text{s}} \\ &= -5{,}76 \times 10^{-4}\ \text{Wb/s} = -5{,}76 \times 10^{-4}\ \text{V}.\end{aligned}$$

Como estamos interessados apenas em valores absolutos, ignoramos os sinais negativos nesta equação e na Eq. 30-5 e escrevemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= N\frac{d\Phi_B}{dt} = (130\ \text{espiras})(5{,}76 \times 10^{-4}\ \text{V}) \\ &= 7{,}5 \times 10^{-2}\ \text{V} = 75\ \text{mV}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

30-4 | A Lei de Lenz

Pouco depois de Faraday propor a lei de indução Heinrich Friedrich Lenz inventou uma regra, hoje conhecida como **lei de Lenz**, para determinar o sentido da corrente induzida em uma espira:

> A corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o campo magnético produzido *pela corrente* se opõe ao campo magnético que induz a corrente.

A força eletromotriz induzida tem o mesmo sentido que a corrente induzida. Para ter uma idéia melhor de como funciona a lei de Lenz, vamos aplicá-la de duas formas diferentes, mas equivalentes, à situação da Fig. 30-4, na qual o pólo norte de um ímã está se aproximando de uma espira condutora.

1. ***Oposição ao Movimento de um Pólo.*** A aproximação do pólo norte do ímã da Fig. 30-4 aumenta o fluxo magnético que atravessa a espira e, portanto, induz

FIG. 30-4 Aplicação da lei de Lenz. Quando o ímã se aproxima da espira uma corrente é induzida na espira. A corrente produz um outro campo magnético, cujo momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ está orientado de tal forma que se opõe ao movimento do ímã. Assim, a corrente induzida tem o sentido anti-horário, como mostra a figura.

uma corrente na espira. De acordo com a Fig. 29-22, a espira passa a se comportar como um dipolo magnético com um pólo sul e um pólo norte; o momento magnético $\vec{\mu}$ associado a este dipolo aponta do pólo sul para o pólo norte. Para se *opor* ao aumento de fluxo causado pela aproximação do ímã o pólo norte da espira (e, portanto, $\vec{\mu}$) deve estar voltado *na direção* do pólo norte do ímã, de modo a repeli-lo (Fig. 30-4). Nesse caso, de acordo com a regra da mão direita (Fig. 29-22) a corrente induzida na espira tem o sentido anti-horário quando vista do lado do ímã na Fig. 30-4.

Quando afastamos o ímã da espira, uma nova corrente é induzida na espira. Agora, porém, o pólo sul da espira deve estar voltado para o pólo norte do ímã de modo a atraí-lo e, assim, se opor ao afastamento. Assim, a corrente induzida na espira tem o sentido horário quando vista do lado do ímã.

2. ***Oposição à Variação de Fluxo.*** Na Fig. 30-4, com o ímã inicialmente distante o fluxo magnético que atravessa a espira é zero. Quando o pólo norte do ímã se aproxima da espira com o campo magnético $\vec{B}$ apontando *para baixo* o fluxo através da espira aumenta. Para se opor a esse aumento de fluxo a corrente induzida i deve criar um campo $\vec{B}_{\text{ind}}$ apontando *para cima*, como na Fig. 30-5*a*; nesse caso, o fluxo para cima de $\vec{B}_{\text{ind}}$ se opõe ao aumento do fluxo para baixo causado pela aproximação do ímã e o conseqüente aumento de $\vec{B}$. De acordo com a regra da mão direita da Fig. 29-22, o sentido de i nesse caso deve ser o sentido anti-horário da Fig. 30-5*a*.

   Observe que o fluxo de $\vec{B}_{\text{ind}}$ sempre se opõe à *variação* do fluxo de $\vec{B}$, mas isso não significa que $\vec{B}$ e $\vec{B}_{\text{ind}}$ sempre têm sentidos opostos. Assim, por exemplo, quando afastamos o ímã da espira da Fig. 30-4 o fluxo Φ_B produzido pelo ímã tem o mesmo sentido que antes (para baixo), mas agora está diminuindo. Nesse caso, como mostra a Fig. 30-5*b*, o fluxo de $\vec{B}_{\text{ind}}$ também deve ser para baixo, de modo a se opor à *diminuição* do fluxo Φ_B. Nesse caso, portanto, $\vec{B}$ e $\vec{B}_{\text{ind}}$ têm o mesmo sentido.

   As Figs. 30-5*c* e 30-5*d* mostram as situações em que o pólo sul do ímã se aproxima e se afasta da espira, respectivamente.

FIG. 30-5 O sentido da corrente i induzida em uma espira é tal que o campo magnético $\vec{B}_i$ produzido pela corrente se opõe à *variação* do campo magnético $\vec{B}$ que induziu a corrente. O campo $\vec{B}_i$ sempre tem o sentido oposto ao sentido de $\vec{B}$ se $\vec{B}$ está aumentando (a, c), e o mesmo sentido que $\vec{B}$ se $\vec{B}$ está diminuindo (b, d). A regra da mão direita fornece o sentido da corrente induzida a partir do sentido do campo induzido.

Guitarras Elétricas

A Fig. 30-6 mostra a Fender® Stratocaster®, um modelo de guitarra elétrica. Enquanto os sons de uma guitarra acústica dependem de ressonâncias acústicas produzidas pelas oscilações das cordas no interior oco do instrumento, a guitarra elétrica é um instrumento maciço, no qual não acontecem oscilações acústicas. Em vez disso, as oscilações das cordas metálicas são captadas por sensores elétricos (bobinas de captação), que enviam sinais para um amplificador e daí para um ou mais alto-falantes.

O princípio básico de funcionamento de uma bobina de captação está ilustrado na Fig. 30-7. O fio que liga a guitarra ao amplificador está enrolado em um pequeno ímã. O campo magnético do ímã produz um pólo norte e um pólo sul no trecho da corda metálica situado acima do ímã. Essa parte da corda passa a gerar um outro campo magnético. Quando a corda é tocada e começa a oscilar seu movimento em relação à bobina muda o fluxo do campo magnético através da bobina, induzindo uma corrente na bobina. Quando a corda se aproxima e se afasta da bobina a corrente induzida muda de sentido com a mesma freqüência que as oscilações da corda, transmitindo assim a freqüência das oscilações para o amplificador e o alto-falante.

Em uma Stratocaster existem três grupos de bobinas de captação, colocados perto da extremidade das cordas (no lado do mais largo do corpo da guitarra). O grupo mais próximo da extremidade do instrumento detecta melhor as oscilações de alta freqüência; o grupo mais próximo do centro detecta melhor as oscilações de baixa freqüência. Apertando um botão na guitarra o músico pode selecionar o grupo ou par de grupos cujo sinal será enviado para o amplificador e os alto-falantes.

Para ter maior controle sobre o instrumento o legendário Jimi Hendrix às vezes refazia as bobinas de captação da sua guitarra para mudar o número de espiras.

FIG. 30-6 Uma guitarra Fender Stratocaster. *(Cortesia de Fender Musical Instruments Corporation)*

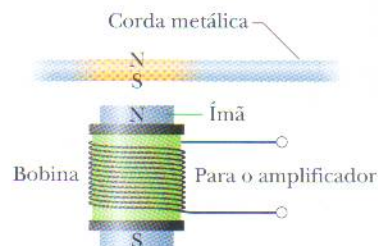
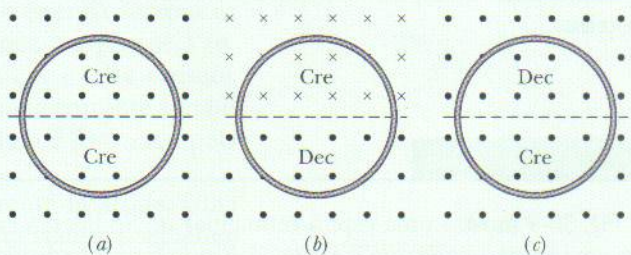



FIG. 30-7 Vista lateral de uma bobina de captação de uma guitarra elétrica. Quando a corda de metal (que se comporta como um ímã) começa a oscilar produz uma variação do fluxo magnético que induz uma corrente na bobina.

Dessa forma alterava o valor da força eletromotriz induzida nas bobinas e, portanto, a sensibilidade às oscilações das cordas. Mesmo sem essa medida extrema a guitarra elétrica permite um maior controle sobre a qualidade do som produzido que as guitarras acústicas.

TESTE 2 A figura mostra três arranjos nos quais espiras circulares iguais são submetidas a campos magnéticos uniformes crescentes (Cre) ou decrescentes (Dec) com a mesma taxa de crescimento ou decaimento. A reta tracejada passa pelo centro das bobinas. Coloque os arranjos na ordem do valor absoluto da corrente induzida na espira, começando pelo maior.

Exemplo 30-2

A Fig. 30-8 mostra uma espira condutora formada por uma semicircunferência de raio $r = 0{,}20$ m e três fios retilíneos. A semicircunferência está em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ orientado para fora do plano do papel; o módulo do campo é dado por $B = 4{,}0t^2 + 2{,}0t + 3{,}0$, com B em teslas e t em segundos. Uma fonte ideal com uma força eletromotriz $\mathscr{E}_{\text{fonte}} = 2{,}0$ V é ligada à espira. A resistência da espira é 2,0 Ω.

(a) Determine o módulo e o sentido da força eletromotriz $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ induzida na espira pelo campo $\vec{B}$ no instante $t = 10$ s.

IDÉIAS-CHAVE

1. De acordo com a lei de Faraday, o valor absoluto de E_{ind} é igual à taxa de variação do fluxo magnético através da espira, $d\Phi_B/dt$.
2. O fluxo através da espira depende da área A da espira e da orientação da espira em relação ao campo magnético $\vec{B}$.
3. Como $\vec{B}$ é uniforme e perpendicular ao plano da espira, o fluxo é dado pela Eq. 30-2 ($\Phi_B = BA$). (Não é necessário integrar B na região envolvida pela espira para calcular o fluxo.)
4. O campo induzido B_{ind} (produzido pela corrente induzida) se opõe à *variação* do fluxo magnético.

Módulo: Usando a Eq. 30-2 e levando em conta o fato de que apenas o módulo B do campo varia com tempo (a área A é constante), podemos escrever a lei de Faraday, Eq. 30-4, na forma

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = A\,\frac{dB}{dt}.$$

Como o fluxo atravessa apenas a parte da bobina correspondente à semicircunferência, a área A nesta equação é $\pi r^2/2$. Substituindo esse valor e a expressão dada para B, obtemos:

$$\mathscr{E}_{ind} = A\frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2}\frac{d}{dt}(4{,}0t^2 + 2{,}0t + 3{,}0)$$
$$= \frac{\pi r^2}{2}(8{,}0t + 2{,}0).$$

Para $t = 10$ s, temos:

$$\mathscr{E}_{ind} = \frac{\pi\,(0{,}20\text{ m})^2}{2}[8{,}0(10) + 2{,}0]$$
$$= 5{,}152\text{ V} \approx 5{,}2\text{ V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Sentido: Para determinar o sentido de $\mathscr{E}_{ind}$ observamos que na Fig. 30-8 o fluxo através da espira é para fora do papel e crescente. Como o campo induzido B_{ind} (produzido pela corrente induzida) se opõe a esse aumento, deve estar orientado *para dentro* do papel. Usando a regra da mão direita (Fig. 30-5*c*), descobrimos que a corrente induzida tem o sentido horário e, portanto, o mesmo acontece com a força eletromotriz induzida $\mathscr{E}_{ind}$.

(b) Qual é a corrente na espira no instante $t = 10$ s?

IDÉIA-CHAVE A espira está sujeita a *duas* forças eletromotrizes.

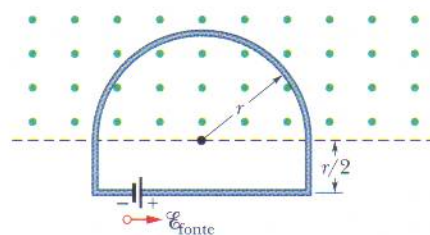



FIG. 30-8 Uma fonte é ligada a uma espira condutora que inclui uma semicircunferência de raio r imersa em um campo magnético uniforme. O campo, cujo módulo varia com o tempo, está orientado para fora do papel.

Cálculo: A força eletromotriz induzida $\mathscr{E}_{ind}$ tende a produzir uma corrente no sentido horário; a força eletromotriz da fonte $\mathscr{E}_{fonte}$ tende a produzir uma corrente no sentido anti-horário. Como $\mathscr{E}_{ind}$ é maior que $\mathscr{E}_{fonte}$, a força eletromotriz total $\mathscr{E}_{tot}$ tem o sentido horário e produz uma corrente no mesmo sentido. Para calcular a corrente no instante $t = 10$ s, usamos a Eq. 27-2 ($i = \mathscr{E}/R$):

$$i = \frac{\mathscr{E}_{tot}}{R} = \frac{\mathscr{E}_{ind} - \mathscr{E}_{fonte}}{R}$$
$$= \frac{5{,}152\text{ V} - 2{,}0\text{ V}}{2{,}0\ \Omega} = 1{,}58\text{ A} \approx 1{,}6\text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 30-3

A Fig. 30-9 mostra uma espira retangular de fio imersa em um campo não-uniforme e variável $\vec{B}$ que é perpendicular ao plano do papel e dirigido para dentro do papel. O módulo do campo é dado por $B = 4t^2x^2$, com B em teslas, t em segundos e x em metros. A espira tem uma largura $W = 3{,}0$ m e uma altura $H = 2{,}0$ m. Determine o módulo e a direção da força eletromotriz $\mathscr{E}$ induzida na espira no instante $t = 0{,}10$ s.

FIG. 30-9 Uma espira condutora de largura W e altura H está imersa em um campo magnético não-uniforme e variável, dirigido para dentro do papel. Para aplicar a lei de Faraday usamos uma tira vertical de altura H, largura dx e área dA.

IDÉIAS-CHAVE

1. Como o módulo do campo magnético $\vec{B}$ varia com o tempo, o fluxo magnético Φ_B através da espira também varia.
2. De acordo com a lei de Faraday, a variação de fluxo induz na espira uma força eletromotriz $\mathscr{E} = d\Phi_B/dt$.
3. Para usar esta equação precisamos de uma expressão para o fluxo Φ_B em função do tempo t. Entretanto, como B *não é* uniforme no interior da espira *não podemos* usar a Eq. 30-2 ($\Phi_B = BA$) para calcular essa expressão, mas devemos usar a Eq. 30-1 ($\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$).

Cálculos: Na Fig. 30-9 $\vec{B}$ é perpendicular ao plano da espira (e, portanto, paralelo ao vetor elemento de área $d\vec{A}$); assim, o produto escalar da Eq. 30-1 é igual a $B\,dA$. Como o campo magnético varia com a coordenada x e não com a coordenada y, podemos tomar a área elementar dA como a área de uma tira vertical de altura H e largura dx (como mostra a Fig. 30-9). Nesse caso, $dA = H\,dx$ e o fluxo através da espira é

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA = \int BH\,dx = \int 4t^2x^2H\,dx.$$

Tratando t como constante nessa integração e introduzindo os limites de integração $x = 0$ e $x = 3{,}0$ m, obtemos

$$\Phi_B = 4t^2H \int_0^{3,0} x^2\,dx = 4t^2H\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3,0} = 72t^2,$$

onde fizemos $H = 2{,}0$ m e Φ_B está em webers. Agora podemos usar a lei de Faraday para determinar o valor absoluto de $\mathscr{E}$ em função do tempo t:

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(72t^2)}{dt} = 144t,$$

onde $\mathscr{E}$ está em volts. No instante $t = 0{,}10$ s,

$$\mathscr{E} = (144\ \text{V/s})(0{,}10\ \text{s}) \approx 14\ \text{V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O fluxo de $\vec{B}$ através da espira é para dentro do papel na Fig. 30-9 e aumenta com o tempo, porque o módulo de B aumenta com o tempo. De acordo com a lei de Lenz o campo B_{ind} produzido pela corrente induzida se opõe a esse aumento e, portanto, está orientado para fora do papel. De acordo com a regra da mão direita da Fig. 30-5, a corrente induzida na espira tem o sentido anti-horário, e o mesmo acontece com a força eletromotriz induzida $\mathscr{E}$.

30-5 | Indução e Transferências de Energia

De acordo com a lei de Lenz, quando o ímã é aproximado ou afastado da espira da Fig. 30-1 uma força magnética oferece resistência ao movimento e, portanto, é preciso realizar um trabalho positivo para executá-lo. Ao mesmo tempo uma energia térmica é produzida na espira por causa da resistência elétrica do material à corrente induzida na espira pelo movimento. A energia transferida ao sistema *espira + ímã* pela força aplicada acaba sendo transformada em energia térmica. (Por enquanto, vamos ignorar a energia que é irradiada pela espira na forma de ondas eletromagnéticas durante a indução.) Quando mais rápido o movimento do ímã, mais rapidamente a força aplicada realiza trabalho e maior a rapidez com a qual a energia se transforma em energia térmica; em outras palavras, maior a potência associada a essa transferência de energia.

Qualquer que seja a forma como a corrente é induzida, a energia sempre se transforma em energia térmica durante o processo (a menos que a espira seja supercondutora) por causa da resistência elétrica do material de que é feita a espira. Assim, por exemplo, na Fig. 30-2 quando a chave S é fechada e uma corrente é induzida momentaneamente na espira da esquerda uma certa energia é fornecida pela fonte e transformada em energia térmica na espira.

A Fig. 30-10 mostra outra situação que envolve uma corrente induzida. Uma espira retangular de largura L está parcialmente imersa em um campo magnético externo uniforme perpendicular ao plano da espira. Este campo pode ser produzido, por exemplo, por um grande eletroímã. As retas tracejadas da Fig. 30-10 mostram os limites do campo magnético; o efeito das bordas é considerado desprezível. Suponha que a espira seja puxada para a direita com velocidade constante $\vec{v}$.

A situação da Fig. 30-10 é essencialmente a mesma da Fig. 30-1. Nos dois casos existe um movimento relativo entre um campo magnético e uma espira condutora; nos dois casos, o fluxo do campo através da espira varia com o tempo. É verdade que na Fig. 30-1 o fluxo varia porque $\vec{B}$ varia e na Fig. 30-10 o fluxo varia porque a parte da espira que está imersa no campo magnético varia, mas a diferença não é importante. A diferença importante entre os dois arranjos é que os cálculos são mais simples para o arranjo da Fig. 30-10. Vamos agora calcular a taxa com a qual é executado trabalho mecânico quando a espira da Fig. 30-10 é puxada com velocidade constante.

Como vamos ver, para puxar uma espira com velocidade constante $\vec{v}$ é preciso aplicar uma força constante $\vec{F}$ à espira, pois esta está sujeita a uma força magnética de mesmo módulo e sentido oposto. De acordo com a Eq. 7-48, a taxa com a qual esse trabalho é executado, ou seja, a potência, é dada por

$$P = Fv, \tag{30-6}$$

onde F é o módulo da força aplicada. Estamos interessados em obter uma expressão para P em função do módulo B do campo magnético e dos parâmetros da espira, que são, no caso, a resistência R e a largura L.

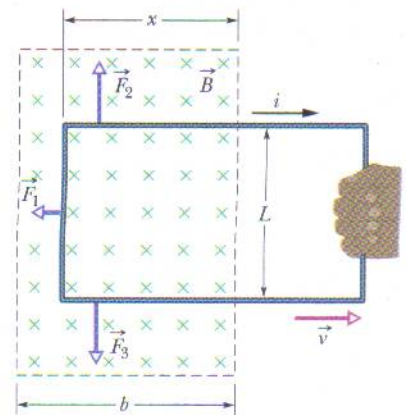



FIG. 30-10 Uma espira é puxada com velocidade constante $\vec{v}$ para fora de uma região onde existe um campo magnético. Enquanto a espira está se movendo uma corrente i no sentido horário é induzida na espira, e os segmentos da espira que ainda estão submetidos a um campo magnético experimentam forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$.

Quando deslocamos a espira para a direita na Fig. 30-10 a parte da espira que está imersa no campo magnético diminui. Assim, o fluxo através da espira também diminui e, de acordo com a lei de Faraday, uma corrente é induzida na espira. É a presença dessa corrente que produz a força que se opõe ao movimento.

Para determinar o valor da corrente começamos por aplicar a lei de Faraday. No instante em que x é o comprimento da parte da espira que ainda está na região onde existe campo magnético a área da parte da espira que ainda está na região onde existe campo magnético é Lx. Nesse caso, de acordo com a Eq. 30-2, o valor absoluto do fluxo através da bobina é

$$\Phi_B = BA = BLx. \tag{30-7}$$

Quando x diminui, o fluxo diminui. De acordo com a lei de Faraday, essa diminuição do fluxo faz com que uma força eletromotriz seja induzida na espira. Ignorando o sinal negativo da Eq. 30-4 e usando a Eq. 30-7, podemos escrever o valor absoluto dessa força eletromotriz como

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} BLx = BL\frac{dx}{dt} = BLv, \tag{30-8}$$

onde substituímos dx/dt por v, a velocidade com a qual a espira está se movendo.

A Fig. 30-11 mostra a espira como um circuito. A força eletromotriz induzida $\mathscr{E}$ aparece do lado esquerdo e a resistência R da espira do lado direito. O sentido da corrente induzida i é dado pela regra da mão direita para um fluxo decrescente (Fig. 30-5b). Aplicando a regra, vemos que a corrente circula no sentido horário; a força eletromotriz tem o mesmo sentido.

Para determinar o valor absoluto da corrente induzida não podemos aplicar a regra das malhas para diferenças de potencial em um circuito porque, como vamos ver na Seção 30-6, não é possível definir uma diferença de potencial para uma força eletromotriz induzida. Entretanto, podemos aplicar a equação $i = \mathscr{E}/R$, como fizemos no Exemplo 30-2. Usando o valor de $\mathscr{E}$ dado pela Eq. 30-8, temos:

$$i = \frac{BLv}{R}. \tag{30-9}$$

Como três segmentos da espira da Fig. 30-10 se encontram em uma região onde existe campo magnético, os segmentos estão sujeitos a forças transversais quando são percorridos por uma corrente elétrica. De acordo com a Eq. 28-26, essas forças são dadas, em notação vetorial, pela seguinte equação:

$$\vec{F}_d = i\vec{L} \times \vec{B}. \tag{30-10}$$

Na Fig. 30-10 as forças que agem sobre os três segmentos da espira foram chamadas de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$. Observe, porém, que, por simetria as forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ têm módulos iguais e sentidos opostos e, portanto, se cancelam mutuamente. Isso deixa apenas a força $\vec{F}_1$, que tem o sentido oposto ao da força $\vec{F}$ aplicada à espira e resiste ao movimento. Assim, $\vec{F} = -\vec{F}_1$.

Usando a Eq. 30-10 para obter o módulo de $\vec{F}_1$ e observando que o ângulo entre $\vec{B}$ e o vetor comprimento $\vec{L}$ para o segmento da esquerda é 90°, podemos escrever:

$$F = F_1 = iLB \operatorname{sen} 90° = iLB. \tag{30-11}$$

Substituindo i na Eq. 30-11 por seu valor, dado pela Eq. 30-9, obtemos:

$$F = \frac{B^2L^2v}{R}. \tag{30-12}$$

Como B, L e R são constantes, a velocidade v com a qual a espira é puxada é constante se o módulo da força F aplicada à espira for constante.

Substituindo a Eq. 30-12 na Eq. 30-6, podemos obter a taxa com a qual executamos trabalho sobre a espira ao puxá-la na presença de um campo magnético:

$$P = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R} \quad \text{(taxa de execução do trabalho).} \tag{30-13}$$

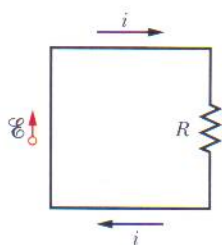



FIG. 30-11 Diagrama esquemático da espira da Fig. 30-10 enquanto está se movendo.

Para completar nossa análise vamos calcular a taxa com a qual a energia térmica é gerada na espira quando ela é puxada com velocidade constante. De acordo com a Eq. 26-27,

$$P = i^2R. \tag{30-14}$$

Substituindo i pelo seu valor, dado pela Eq. 30-9, temos:

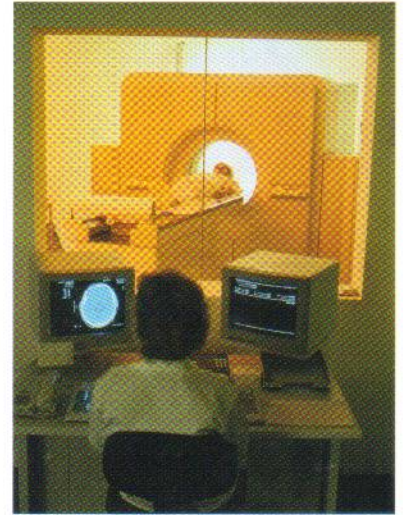
$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R} \quad \text{(taxa de geração de energia térmica)}, \tag{30-15}$$

que é exatamente igual à taxa com a qual executamos trabalho sobre a espira (Eq. 30-13). Assim, o trabalho para puxar a espira na presença de um campo magnético é transformado em energia térmica.

FIG. 30-12 Um paciente sendo submetido a um exame de ressonância magnética. *(Michael Rosenfeld/Getty Images, Inc.)*

Queimaduras Sofridas Durante um Exame de Ressonância Magnética

Para ser submetido a um exame de ressonância magnética (Fig. 30-12) um paciente é colocado no interior de um aparelho que produz dois campos: um campo constante $\vec{B}_{con}$ de alta intensidade e um pequeno campo alternado $\vec{B}(t)$. Normalmente o exame exige que o paciente permaneça imóvel durante um longo tempo. Os pacientes que não conseguem permanecer imóveis, como as crianças, por exemplo, são anestesiados. Como a anestesia, especialmente a anestesia geral, pode ser perigosa, os pacientes anestesiados são monitorados, em geral através de um *oxímetro de pulso*, instrumento que mede a concentração de oxigênio no sangue do paciente. O aparelho dispõe de um sensor, que é preso a um dos dedos do paciente, e de um cabo que liga o sensor a um monitor situado do lado de fora do aparelho de ressonância magnética.

Os exames de ressonância magnética são normalmente inofensivos. Em alguns casos, porém, a ignorância da lei de Faraday fez com que pacientes anestesiados sofressem graves queimaduras. Nesses casos, o cabo do oxímetro entrou acidentalmente em contato com o braço do paciente (Fig. 30-13). O cabo e a parte inferior do braço formaram uma espira através da qual o campo magnético variável $\vec{B}(t)$ produziu um fluxo variável. A variação de fluxo induziu na espira uma força eletromotriz. Embora o isolamento do cabo e a pele do paciente tivessem uma alta resistência elétrica, a força eletromotriz induzida foi suficientemente elevada para fazer uma corrente relativamente alta circular na espira. Como acontece em qualquer circuito que possui resistência elétrica, a energia elétrica foi transformada em energia térmica, principalmente nos pontos de maior resistência. Dessa forma, o dedo e o ponto do braço onde o cabo estava encostado sofreram queimaduras. Depois que isso aconteceu algumas vezes os operadores dos aparelhos de ressonância magnética foram orientados a evitar que qualquer cabo tocasse em mais de um ponto do corpo do paciente.

Correntes Parasitas

Suponha que a espira condutora da Fig. 30-10 seja substituída por uma placa condutora maciça. Quando puxamos a placa para fora da região onde existe campo magnético, como fizemos com a espira (Fig. 30-14a), o movimento relativo entre o

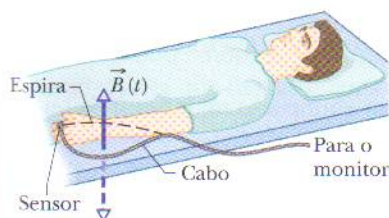



FIG. 30-13 Um sensor preso ao dedo de um paciente submetido a um exame de ressonância magnética, no qual um campo magnético vertical $\vec{B}(t)$ varia senoidalmente. Quando o cabo do sensor encosta no braço do paciente o cabo e a parte inferior do braço formam uma espira.

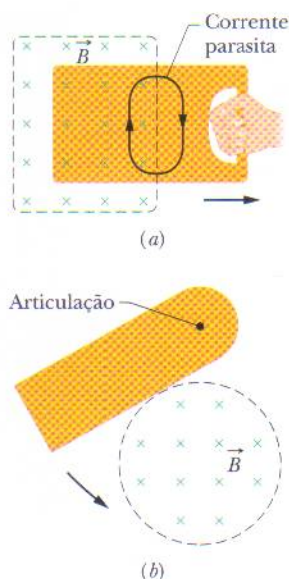
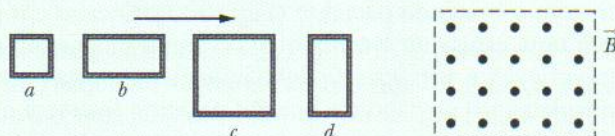



FIG. 30-14 (*a*) Quando uma placa é puxada para fora de uma região onde existe um campo magnético, *correntes parasitas* são induzidas na placa. A figura mostra uma corrente parasita típica. (*b*) Uma placa condutora balança como um pêndulo, entrando e saindo de uma região onde existe um campo magnético. Correntes parasitas são induzidas na placa toda vez que a placa entra ou sai da região.

campo e o condutor também induz uma corrente no condutor. Assim, surge uma força que se opõe ao movimento, e precisamos realizar um trabalho por causa da corrente induzida. No caso da placa, porém, os elétrons de condução responsáveis pela corrente induzida não seguem todos a mesma trajetória, como no caso da espira. Em vez disso, circulam no interior da placa como se fizessem parte de um remoinho. Uma corrente desse tipo é chamada de *corrente parasita* e pode ser *representada*, como na Fig. 30-14*a*, por uma única espira.

Como no caso da espira condutora da Fig. 30-10, a corrente induzida faz com que a energia mecânica usada para puxar a placa se transforme em energia térmica. A dissipação é mais evidente no arranjo da Fig. 30-14*b*; uma placa condutora, livre para girar em torno de um eixo, é liberada para oscilar como um pêndulo, passando por uma região onde existe um campo magnético. Toda vez que a placa entra ou sai do campo uma parte da energia mecânica é transformada em energia térmica. Depois de algumas oscilações a energia mecânica se esgota e a placa, agora aquecida, permanece imóvel na parte inferior da trajetória.

O funcionamento do forno de indução de baseia em um mecanismo semelhante de dissipação de energia. A Fig. 30-15 mostra o que acontece. O metal a ser fundido é colocado em um cadinho em torno do qual é enrolado um fio isolado. A corrente que circula no fio é uma corrente alternada, cuja amplitude e sentido variam com o tempo. Assim, o módulo e a orientação do campo magnético produzido pela corrente variam com o tempo. Este campo magnético variável $\vec{B}(t)$ produz correntes parasitas no metal, e a energia elétrica é convertida em energia térmica a uma taxa dada pela Eq. 30-14 ($P = i^2R$), aumentando a temperatura do metal até o ponto de fusão.

TESTE 3 A figura mostra quatro espiras de fio cujos lados têm comprimento L ou $2L$. As quatro espiras se movem com a mesma velocidade constante em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ (dirigido para fora do papel). Coloque as quatro espiras na ordem do valor absoluto da força eletromotriz induzida, começando pelo maior.

30-6 | Campos Elétricos Induzidos

Suponha que um anel de cobre de raio r é submetido a um campo magnético externo uniforme, como na Fig. 30-16*a*. O campo, desprezando o efeito de borda, ocupa um volume cilíndrico de raio R. Suponha que a intensidade desse campo seja aumentada a uma taxa constante, talvez aumentando, de forma apropriada, a corrente nos enrolamentos do eletroímã que produz o campo. Nesse caso o fluxo magnético através do anel também aumenta a uma taxa constante e, de acordo com a lei de Faraday, uma força eletromotriz induzida e uma corrente induzida aparecem no anel. De acordo com a lei de Lenz, a corrente induzida tem o sentido anti-horário na Fig. 30-16*a*.

Se existe uma corrente no anel de cobre, deve haver um campo elétrico para colocar os elétrons de condução em movimento. Este **campo elétrico induzido** $\vec{E}$, produzido pela variação do fluxo magnético, é tão real quanto o campo elétrico produzido por cargas estáticas; os dois tipos de campo exercem uma força $q_0\vec{E}$ em uma partícula de carga q_0.

Por essa linha de raciocínio, somos levados a um enunciado mais geral da lei de Faraday:

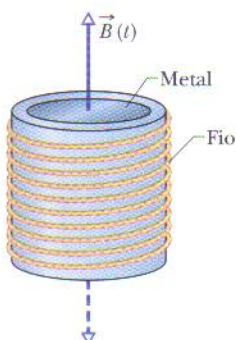



FIG. 30-15 Um forno de indução.

Um campo magnético variável produz um campo elétrico.

Um dos aspectos mais interessantes deste novo enunciado é o fato de que o campo elétrico induzido existe mesmo que o anel de cobre não esteja presente.

Para ter uma idéia melhor do que isso significa, considere a Fig. 30-16*b*, que é idêntica à Fig. 30-16*a* exceto pelo fato de que o anel de cobre foi substituído por uma circunferência imaginária de raio r. Vamos supor, como antes, que o módulo do campo magnético $\vec{B}$ esteja aumentando a uma taxa constante dB/dt. O campo elétrico induzido nos pontos da circunferência deve, por simetria, ser tangente à circunferência, como mostra a Fig. 30-16*b*.* Assim, a circunferência é uma linha de campo elétrico. Como não há nada de especial na circunferência de raio r, as linhas de campo elétrico produzidas pela variação do campo magnético devem ser uma família de circunferências concêntricas, como as da Fig. 30-16*c*.

Enquanto o campo magnético está *aumentando*, o campo elétrico representado pelas linhas de campo circulares da Fig. 30-16*c* continua a existir. Se o campo magnético se torna *constante*, o campo elétrico desaparece e com ele as linhas de campo. Se o campo magnético começa a *diminuir* (a uma taxa constante), as linhas de campo voltam a ser circunferências concêntricas como na Fig. 30-16*c*, mas com o sentido oposto. Tudo isso é conseqüência da afirmação de que "um campo magnético variável produz um campo elétrico".

Uma Reformulação da Lei de Faraday

Considere uma partícula de carga q_0 que se move ao longo da circunferência imaginária da Fig. 30-16*b*. O trabalho W realizado sobre a partícula pelo campo elétrico induzido durante uma revolução completa é $W = \mathscr{E}q_0$, onde $\mathscr{E}$ é a força eletromotriz induzida (trabalho realizado por unidade de carga para fazer uma carga de prova descrever a trajetória). Entretanto, por definição, o trabalho também é dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r), \qquad (30\text{-}16)$$

onde q_0E é o módulo da força que age sobre a partícula e $2\pi r$ é a distância ao longo do qual a força atua. Quando igualamos as duas expressões para o trabalho, a carga q_0 é cancelada e obtemos a seguinte relação:

$$\mathscr{E} = 2\pi r E. \qquad (30\text{-}17)$$

Vamos agora escrever a Eq. 30-16 de outra forma para obter uma expressão mais geral para o trabalho realizado sobre uma partícula de carga q_0 que se move em uma trajetória fechada:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \qquad (30\text{-}18)$$

(Os círculos nos sinais de integral indicam que a integral deve ser calculada para uma curva fechada.) Substituindo o trabalho W por $\mathscr{E}q_0$, temos:

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \qquad (30\text{-}19)$$

Esta integral se reduz à Eq. 30-17 quando é calculada para o caso especial da Fig. 30-16*b*.

A Eq. 30-19 permite atribuir um significado mais geral à força eletromotriz induzida. Até agora, a força eletromotriz induzida era vista como o trabalho por unidade de carga necessário para manter a corrente produzida pela variação de um fluxo magnético ou pelo trabalho por unidade de carga executado sobre uma partícula carregada que descreve uma curva fechada em uma região onde existe um fluxo

---

* Linhas de campo elétrico *radiais* também seriam compatíveis com a simetria do problema. Entretanto, essas linhas radiais teriam que começar e terminar em cargas elétricas, e estamos supondo que o campo magnético foi criado em uma região do espaço desprovida de cargas.

(a)

(b)

(c)

(d)

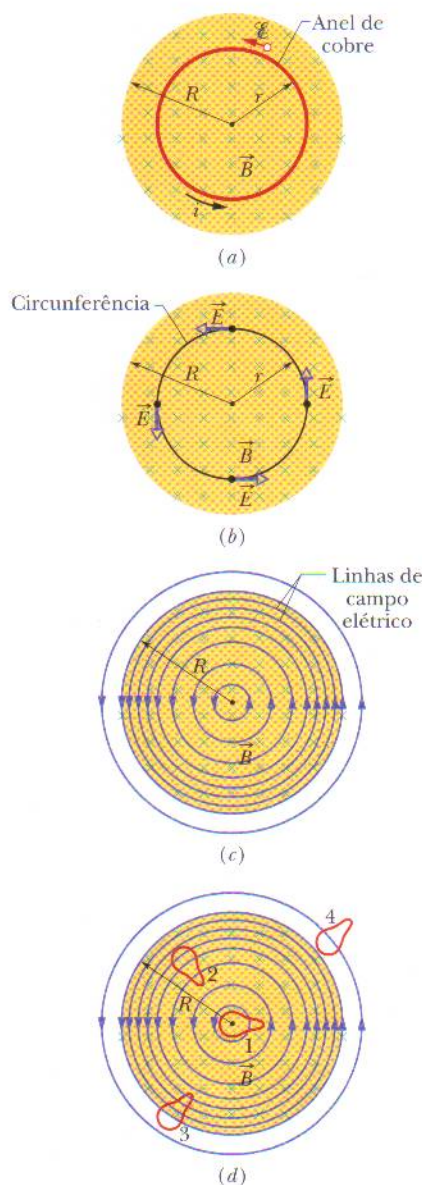



FIG. 30-16 (*a*) Se o campo magnético aumenta a uma taxa constante, uma corrente induzida aparece, como mostra a figura, no anel de cobre de raio *r*. (*b*) Um campo elétrico induzido aparece mesmo na ausência do anel; a figura mostra o campo elétrico em quatro pontos do espaço. (*c*) A configuração do campo elétrico induzido, mostrada através de linhas de campo. (*d*) Quatro curvas fechadas de mesma forma e mesma área. Forças eletromotrizes iguais são induzidas nas curvas 1 e 2, que estão totalmente na região onde existe um campo magnético variável. Uma força eletromotriz menor é induzida na curva 3, que está apenas parcialmente imersa no campo magnético. A força eletromotriz induzida na curva 4 é zero porque a curva está fora da região em que existe campo magnético.

magnético variável. Entretanto, no caso da Fig. 30-16*b* e da Eq. 30-19 pode existir uma força eletromotriz induzida mesmo que não haja uma corrente ou uma partícula: a força eletromotriz induzida é a soma (por integração) do produto escalar $\vec{E} \cdot ds$ ao longo de uma curva fechada, onde $\vec{E}$ é o campo elétrico induzido pela variação do fluxo magnético e ds é o elemento de comprimento ao longo da curva.

Combinando a Eq. 30-19 com a Eq. 30-4 ($\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$), obtemos uma nova expressão para a lei de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(lei de Faraday).} \tag{30-20}$$

De acordo com a Eq. 30-20, um campo magnético variável induz um campo elétrico. O campo magnético aparece do lado direito da equação (através do fluxo Φ_B), e o campo elétrico, do lado esquerdo.

Na forma da Eq. 30-20, a lei de Faraday pode ser aplicada a *qualquer* curva fechada que possa ser traçada em uma região onde existe um campo magnético variável. A Fig. 30-16*d*, por exemplo, mostra quatro dessas curvas, todas com a mesma forma e a mesma área, situadas em diferentes posições em relação ao campo magnético aplicado. A força eletromotriz $\mathscr{E}$ $(= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s})$ para as curvas 1 e 2 é igual porque as duas curvas estão totalmente imersas no campo magnético e, portanto, o valor de $d\Phi_B/dt$ é o mesmo, embora os vetores campo elétrico ao longo das curvas sejam diferentes, como mostram as linhas de campo elétrico. No caso da curva 3 a força eletromotriz induzida é menor porque o fluxo Φ_B através da região envolvida pela curva (e, portanto, o valor de $d\Phi_B/dt$) é menor. Para a curva 4, a força eletromotriz induzida é zero, embora o campo elétrico não seja zero em nenhum ponto da curva.

Uma Nova Visão do Potencial Elétrico

Os campos elétricos induzidos não são produzidos por cargas elétricas, estáticas, e sim por fluxos magnéticos variáveis. Embora os campos elétricos produzidos das duas formas exerçam forças sobre partículas carregadas, existem diferenças importantes entre eles. A diferença mais óbvia é o fato de que as linhas de campo dos campos elétricos induzidos formam curvas fechadas, como na Fig. 30-16*c*. As linhas de campo produzidas por cargas estáticas não formam curvas fechadas, pois sempre começam em uma carga positiva e terminam em uma carga negativa.

Em termos mais formais, podemos expressar a diferença entre os campos elétricos produzidos por indução e os campos produzidos por cargas estáticas da seguinte forma:

> O potencial elétrico tem significado apenas para campos elétricos produzidos por cargas estáticas; o conceito não se aplica aos campos elétricos produzidos por indução.

Podemos compreender qualitativamente essa afirmação considerando o que acontece com uma partícula carregada que se move ao longo da trajetória circular da Fig. 30-16*b* sob o efeito do campo elétrico induzido. A partícula começa em um certo ponto; ao voltar ao mesmo ponto experimentou uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ de, digamos, 5 V. Nesse caso, um trabalho de 5 J/C foi executado sobre a partícula e, portanto, esta deveria estar em um ponto no qual o potencial é 5 V maior. Entretanto, isso é impossível, já que a partícula está de volta ao mesmo ponto, e a um mesmo ponto não podem corresponder dois valores diferentes do potencial. Assim, o conceito de potencial não se aplica aos campos elétricos produzidos por campos magnéticos variáveis.

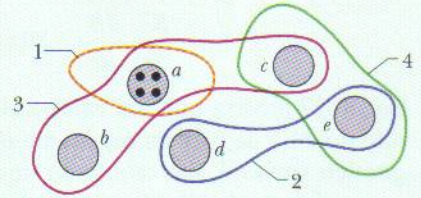
Podemos abordar a questão de um ponto de vista mais formal a partir da Eq. 24-18, que define a diferença de potencial entre dois pontos *i* e *f* na presença de um campo elétrico $\vec{E}$:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{30-21}$$

No Capítulo 24 ainda não havíamos discutido a lei de indução de Faraday; os campos elétricos envolvidos na demonstração da Eq. 24-18 eram apenas os produzidos por cargas estáticas. Se i e f na Eq. 30-21 correspondem ao mesmo ponto, a trajetória que liga i a f é uma curva fechada, V_i e V_f são iguais e a Eq. 30-21 se reduz a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \qquad (30\text{-}22)$$

Entretanto, na presença de um fluxo magnético variável essa integral *não* é zero, e sim $-d\Phi_B/dt$ (Eq. 30-20). Assim, atribuir um potencial elétrico a um campo elétrico induzido leva a uma contradição. A única conclusão possível é que o conceito de potencial elétrico não se aplica ao caso dos campos elétricos produzidos por indução.

TESTE 4 A figura mostra cinco regiões, identificadas por letras, nas quais um campo magnético uniforme entra ou sai do papel com o sentido indicado apenas no caso da região a. O módulo do campo está aumentando à mesma taxa nas cinco regiões, que possuem áreas iguais. A figura mostra também quatro trajetórias numeradas, ao longo das quais $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ tem os módulos indicados a seguir em termos de uma constante "mag". Determine se o campo magnético está orientado para dentro ou para fora do papel nas regiões b, c, d e e.

Trajetória	1	2	3	4
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$	mag	2(mag)	3(mag)	0

Exemplo 30-4

Na Fig. 30-16b, suponha que $R = 8{,}5$ cm e $dB/dt = 0{,}13$ T/s.

(a) Escreva uma expressão para o módulo E do campo elétrico induzido em pontos situados na região onde existe campo magnético, a uma distância r do centro da região. Calcule o valor da expressão para $r = 5{,}2$ cm.

IDÉIA-CHAVE A relação entre o campo elétrico induzido e o campo magnético variável é dada pela lei de Faraday.

Cálculos: Para determinar o módulo E do campo usamos a lei de Faraday na forma da Eq. 30-20. Escolhemos uma trajetória circular de integração de raio $r < R$ porque queremos determinar o valor de E em pontos situados na região onde existe campo magnético. Sabemos, por simetria, que $\vec{E}$ na Fig. 30-16b é tangente à trajetória circular em todos os pontos. Como o vetor comprimento $d\vec{s}$ também é tangente à trajetória circular, o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ na Eq. 30-20 é igual a $E\,ds$ em todos os pontos da trajetória. Sabemos também, por simetria, que E tem o mesmo valor em todos os pontos da trajetória. Assim, o lado esquerdo da Eq. 30-20 se torna

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E\,ds = E\oint ds = E(2\pi r). \qquad (30\text{-}23)$$

(A integral $\oint ds$ é a circunferência $2\pi r$ da trajetória.)

Em seguida, precisamos calcular o lado direito da Eq. 30-20. Como $\vec{B}$ é uniforme em toda a área A envolvida pelo caminho de integração e perpendicular a essa área, o fluxo magnético é dado pela Eq. 30-2:

$$\Phi_B = BA = B(\pi r^2). \qquad (30\text{-}24)$$

Substituindo as Eqs. 30-23 e 30-24 na Eq. 30-20 e ignorando o sinal negativo, temos:

$$E(2\pi r) = (\pi r^2)\frac{dB}{dt}$$

ou

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}. \quad \text{(Resposta)} \qquad (30\text{-}25)$$

A Eq. 30-25 permite calcular o módulo do campo elétrico em qualquer ponto tal que $r \leq R$ (ou seja, dentro da região em que existe campo magnético). Substituindo os valores conhecidos, obtemos, para $r = 5{,}2$ cm,

$$E = \frac{(5{,}2 \times 10^{-2}\ \text{m})}{2}(0{,}13\ \text{T/s})$$
$$= 0{,}0034\ \text{V/m} = 3{,}4\ \text{mV/m}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Escreva uma expressão para o módulo E do campo elétrico induzido em pontos fora da região em que existe campo magnético, a uma distância r do centro da região. Calcule o valor da expressão para $r = 12{,}5$ cm.

IDÉIAS-CHAVE A idéia do item (a) também se aplica a este caso, com a diferença de que agora devemos usar um

caminho de integração com $r \geq R$, já que estamos interessado em calcular E do lado de fora da região em que existe campo magnético. Procedendo como em (a) obtemos novamente a Eq. 30-23. Entretanto, não obtemos a Eq. 30-24, já que a nova trajetória de integração está do lado de fora da região em que existe campo magnético e, portanto, o fluxo magnético envolvido pelo novo caminho é apenas o fluxo que atravessa a área πR^2 onde existe campo magnético.

Cálculos: Podemos escrever:

$$\Phi_B = BA = B(\pi R^2). \qquad (30\text{-}26)$$

Substituindo as Eqs. 30-23 e 30-26 na Eq. 30-20 e ignorando o sinal negativo, obtemos:

$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}. \quad \text{(Resposta)} \qquad (30\text{-}27)$$

A Eq. 30-27 mostra que um campo elétrico também é induzido do lado de fora da região em que existe um campo magnético variável, um resultado importante que (como vamos ver na Seção 31-11) torna possível a construção de transformadores.

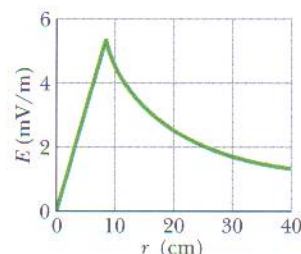
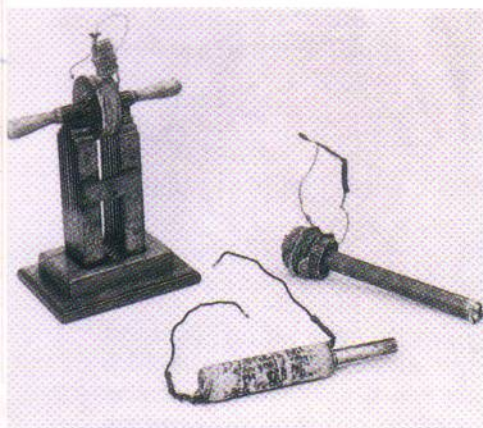



FIG. 30-17 Gráfico do campo elétrico induzido $E(r)$ para as condições do Exemplo 30-4.

Substituindo os valores conhecidos, obtemos, para r = 12,5 cm,

$$E = \frac{(8{,}5 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{(2)(12{,}5 \times 10^{-2}\,\text{m})}(0{,}13\,\text{T/s})$$

$$= 3{,}8 \times 10^{-3}\,\text{V/m} = 3{,}8\,\text{mV/m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Como era de se esperar, as Eqs. 30-25 e 30-27 fornecem o mesmo resultado para $r = R$. A Fig. 30-17 mostra um gráfico de $E(r)$ baseado nas duas equações.

Os indutores toscos com os quais Michael Faraday descobriu a lei da indução. Na época, componentes como fios com isolamento ainda não eram fabricados comercialmente. Dizem que Faraday isolava os fios enrolando-os com tiras de pano cortadas de uma das anáguas da mulher. *(The Royal Institution/Bridgeman Art Library/NY)*

30-7 | Indutores e Indutância

Como vimos no Capítulo 25, um capacitor pode ser usado para produzir um campo elétrico com as propriedades desejadas. O tipo mais simples de capacitor é o capacitor de placas paralelas (ou, mais exatamente, a parte central de um capacitor de placas paralelas). Analogamente, um indutor (símbolo ꝏꝏ) pode ser usado para produzir um campo magnético com as propriedades desejadas. O tipo mais simples de indutor é o solenóide longo (ou, mais exatamente, a parte central de um solenóide longo).

Se as espiras do solenóide que estamos usando como indutor conduzem uma corrente i, a corrente produz um fluxo magnético Φ_B na região central do indutor. A **indutância** do indutor é definida através da relação

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad \text{(definição de indutância)}, \qquad (30\text{-}28)$$

onde N é o número de espiras. Dizemos que as espiras do solenóide estão *enlaçadas* pelo fluxo magnético, e o produto $N\Phi_B$ é chamado de *enlaçamento de fluxo magnético*. A indutância L é, portanto, uma medida do enlaçamento de fluxo magnético produzido pelo indutor por unidade de corrente.

Como a unidade de fluxo magnético no SI é o tesla-metro quadrado, a unidade de indutância no SI é o tesla-metro quadrado por ampère (T · m²/A). Esta unidade é chamada de **henry** (H) em homenagem ao físico americano Joseph Henry, contemporâneo de Faraday, um dos descobridores da lei da indução. Assim,

$$1\,\text{henry} = 1\,\text{H} = 1\,\text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A}. \qquad (30\text{-}29)$$

No resto do capítulo vamos supor que não existem materiais magnéticos (como o ferro, por exemplo) nas vizinhanças dos indutores. Esses materiais distorcem o campo magnético produzido pelos indutores.

Indutância de um Solenóide

Considere um solenóide longo de seção reta A. Qual é a indutância por unidade de comprimento perto do centro do solenóide?

Para aplicar a definição de indutância (Eq. 30-28) precisamos conhecer o enlaçamento de fluxo criado por uma corrente nos enrolamentos do solenóide. Considere um segmento de comprimento l perto do centro do solenóide. O enlaçamento de fluxo para esse segmento é

$$N\Phi_B = (nl)(BA),$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide e B é o módulo do campo magnético no interior do solenóide.

O módulo B do campo magnético é dado pela Eq. 29-23,

$$B = \mu_0 in,$$

e portanto, de acordo com a Eq. 30-28,

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 in)(A)}{i}$$
$$= \mu_0 n^2 lA. \qquad (30\text{-}30)$$

Assim, a indutância por unidade de comprimento perto do centro de um solenóide longo é

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \quad \text{(solenóide).} \qquad (30\text{-}31)$$

FIG. 30-18 Quando fazemos variar a corrente em um indutor mudando a posição do contato de um resistor variável uma força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$ aparece no indutor *enquanto a corrente está variando*.

Como a capacitância, a indutância depende apenas da geometria do dispositivo. A variação com o quadrado do número de espiras por unidade de comprimento é razoável, já que, por exemplo, ao triplicarmos o valor de n não só triplicamos o número de espiras (N) mas também o fluxo ($\Phi_B = BA = \mu_0 inA$) através de cada espira, multiplicando assim por nove o enlaçamento de fluxo $n\Phi_B$ e, portanto, a indutância L.

Se o comprimento do solenóide é muito maior que o raio, a Eq. 30-30 fornece uma boa aproximação para a indutância. Essa aproximação despreza a distorção das linhas de campo magnético perto das extremidades do solenóide, do mesmo modo como a fórmula do capacitor de placas paralelas ($C = \varepsilon_0 A/d$) despreza a distorção das linhas de campo elétrico perto das extremidades do capacitor.

De acordo com a Eq. 30-30, lembrando que n é um número por unidade de comprimento, a indutância pode ser escrita como o produto da permeabilidade do vácuo μ_0 por uma grandeza com a dimensão de comprimento. Isso significa que μ_0 pode ser expressa na unidade henry por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}$$
$$= 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}. \qquad (30\text{-}32)$$

30-8 | Auto-indução

Quando a corrente que atravessa um indutor varia, o fluxo magnético Φ_B que atravessa as espiras também varia, o que significa, de acordo com a lei de Faraday, que uma força eletromotriz induzida aparece no indutor.

Uma força eletromotriz induzida $\mathscr{E}_L$ aparece em todo indutor cuja corrente está variando.

Esse processo (veja a Fig. 30-18) é chamado de **auto-indução**, e a força eletromotriz associada recebe o nome de **força eletromotriz auto-induzida**. Como qualquer força eletromotriz induzida, a força eletromotriz auto-induzida obedece à lei de Faraday.

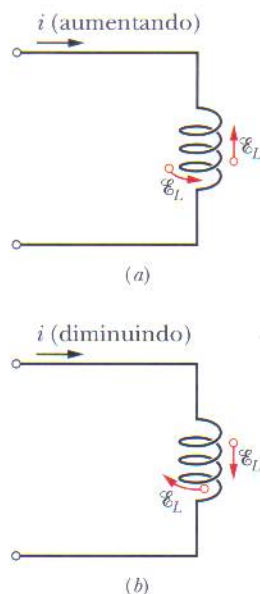



FIG. 30-19 (*a*) A corrente i está aumentando e a força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$ aparece no indutor com uma orientação tal que se opõe a esse aumento. A seta que representa $\mathscr{E}_L$ pode ser desenhada ao longo de uma das espiras do indutor ou ao lado do indutor. As duas representações foram usadas na figura. (*b*) A corrente i está diminuindo e a força eletromotriz auto-induzida aparece com uma orientação tal que se opõe a essa diminuição.

De acordo com a Eq. 30-28, para qualquer indutor,

$$N\Phi_B = Li. \tag{30-33}$$

Segundo a lei de Faraday,

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \tag{30-34}$$

Combinando as Eqs. 30-33 e 30-34, temos:

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt} \quad \text{(força eletromotriz auto-induzida).} \tag{30-35}$$

Assim, em qualquer indutor, como uma bobina, um solenóide ou um toróide, uma força eletromotriz induzida aparece sempre que a corrente varia com o tempo. O valor da corrente não tem nenhuma influência sobre o valor da força eletromotriz induzida; o que importa é a taxa de variação da corrente.

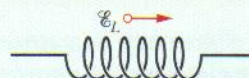
Para determinar a *polaridade* da força eletromotriz auto-induzida basta aplicar a lei de Lenz. O sinal negativo da Eq. 30-35 indica que, como diz a lei, a força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$ se opõe à variação da corrente i. O sinal negativo pode ser ignorado se estivermos interessados apenas no valor absoluto de $\mathscr{E}_L$.

Suponha que, como na Fig. 30-19*a*, uma bobina seja percorrida por uma corrente i que está aumentando com o tempo a uma taxa di/dt. Na linguagem da lei de Lenz, o aumento da corrente é a "variação" a que se opõe a auto-indução. Para que haja esta oposição é preciso que a polaridade da força eletromotriz auto-induzida na bobina seja tal que a corrente associada tenha o sentido oposto ao da corrente i. Se a corrente i diminui com o tempo, como na Fig. 30-19*b*, a polaridade da força eletromotriz auto-induzida é tal que a corrente associada tem o mesmo sentido que a corrente i, como mostra a figura.

Na Seção 30-6 vimos que não é possível definir um potencial elétrico para um campo elétrico induzido por uma variação de fluxo magnético. Isso significa que se uma força eletromotriz auto-induzida é produzida no indutor da Fig. 30-18 não podemos definir um potencial elétrico no interior do indutor, onde o fluxo está variando. Entretanto, ainda é possível definir potenciais em pontos do circuito que não estão no interior do indutor, ou seja, em pontos onde os campos elétricos se devem a distribuições de carga e aos potenciais elétricos associados.

Além disso, podemos definir uma diferença de potencial auto-induzida V_L *entre os terminais de um indutor*. No caso de um *indutor ideal* (cuja resistência é zero) o valor absoluto de V_L é igual ao valor absoluto da força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$.

No caso de um indutor não-ideal, com uma resistência r diferente de zero, podemos considerar o indutor como uma associação em série de um resistor de resistência r (que imaginamos estar do lado de fora da região em que o fluxo está variando) e um indutor ideal de força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$. Como no caso de uma fonte real de força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência interna r, a diferença de potencial entre os terminais de um indutor real é distinta da força eletromotriz. A menos que seja dito especificamente o contrário, vamos supor daqui em diante que todos os indutores são ideais.

TESTE 5 A figura mostra uma força eletromotriz $\mathscr{E}_L$ induzida em uma bobina. Escolha a opção correta para a corrente na bobina: (a) constante, da esquerda para a direita; (b) constante, da direita para a esquerda; (c) crescente, da esquerda para a direita; (d) decrescente, da esquerda para a direita; (e) crescente, da direita para a esquerda; (f) decrescente, da direita para a esquerda.

30-9 | Circuitos RL

Como vimos na Seção 27-9, quando introduzimos bruscamente uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ em um circuito com uma única malha que contém um resistor R e um capacitor C inicialmente descarregado a carga do capacitor não aumenta instantaneamente para o valor final $C\mathscr{E}$, mas tende exponencialmente para esse valor:

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \tag{30-36}$$

A taxa de aumento da carga do capacitor é determinada pela constante de tempo capacitiva τ_C, definida através da Eq. 27-36:

$$\tau_C = RC. \tag{30-37}$$

Quando removemos bruscamente a força eletromotriz do mesmo circuito a carga do capacitor não diminui instantaneamente para zero, mas tende exponencialmente para esse valor:

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}. \tag{30-38}$$

A constante de tempo τ_C é a mesma para a carga e a descarga do capacitor.

A corrente apresenta um comportamento análogo quando introduzimos (ou removemos) uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ em um circuito que contém um resistor R e um indutor L. Quando a chave S da Fig. 30-20 é colocada na posição a, por exemplo, a corrente no resistor começa a aumentar. Se o indutor não estivesse presente a corrente atingiria quase instantaneamente o valor final $\mathscr{E}/R$. A presença do indutor, porém, faz com que uma força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$ apareça no circuito. De acordo com a lei de Lenz, a força eletromotriz se opõe ao aumento da corrente, o que significa que tem a polaridade oposta à da força eletromotriz $\mathscr{E}$ da fonte. Assim, a corrente no resistor responde à diferença entre duas forças eletromotrizes, uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ constante produzida pela fonte e uma força eletromotriz variável $\mathscr{E}_L$ $(= -L\, di/dt)$ produzida pela auto-indução. Enquanto $\mathscr{E}_L$ está presente, a corrente é menor que $\mathscr{E}/R$.

FIG. 30-20 Um circuito RL. Quando a chave S é colocada na posição a a corrente começa a aumentar e tende para o valor final $\mathscr{E}/R$.

Com o passar do tempo a taxa de aumento da corrente diminui e o valor absoluto da força eletromotriz auto-induzida, que é proporcional a di/dt, também diminui. Assim, a corrente tende assintoticamente para $\mathscr{E}/R$.

Esses resultados podem ser generalizados da seguinte forma:

> Inicialmente um indutor se opõe a qualquer variação da corrente que o atravessa. Após um tempo suficientemente longo o indutor se comporta como um fio comum.

Vamos agora analisar quantitativamente a situação. Com a chave S da Fig. 30-20 na posição a, o circuito é equivalente ao da Fig. 30-21. Vamos aplicar a regra das malhas, começando no ponto x da figura e nos deslocando no sentido horário, o mesmo da corrente i.

1. *Resistor*. Como atravessamos o resistor no sentido da corrente i o potencial elétrico diminui de iR. Assim, quando passamos do ponto x para o ponto y o potencial varia de $-iR$.
2. *Indutor*. Como a corrente i está variando existe uma força eletromotriz auto-induzida $\mathscr{E}_L$ no indutor. De acordo com a Eq. 30-35 o valor absoluto de $\mathscr{E}_L$ é $L\, di/dt$. O sentido de $\mathscr{E}_L$ é para cima na Fig. 30-21, porque o sentido da corrente i é para baixo no indutor e a corrente está aumentando. Assim, quando passamos do ponto y para o ponto z, atravessando o indutor no sentido contrário ao de $\mathscr{E}_L$, o potencial varia de $-L\, di/dt$.
3. *Fonte*. Quando passamos do ponto z para o ponto x, voltando ao ponto inicial, o potencial varia de $+\mathscr{E}$ devido à força eletromotriz da fonte.

FIG. 30-21 O circuito da Fig. 30-20 com a chave na posição a. Aplicamos a regra das malhas no sentido horário, começando no ponto x.

De acordo com a regra das malhas, temos:

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathscr{E} = 0$$

ou

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E} \quad \text{(circuito } RL\text{)}. \tag{30-39}$$

A Eq. 30-39 é uma equação diferencial que envolve a variável i e sua derivada primeira di/dt. A solução deve ser uma função $i(t)$ tal que quando $i(t)$ e sua derivada primeira são substituídas na Eq. 30-39 a equação e a condição inicial $i(0) = 0$ são satisfeitas.

A Eq. 30-39 e sua condição inicial têm a mesma forma que a equação de um circuito RC, Eq. 27-32, com i no lugar de q, L no lugar de R e R no lugar de $1/C$. A solução da Eq. 30-39 tem, portanto, a forma da Eq. 27-33 com as mesmas substituições, o que nos dá

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \tag{30-40}$$

que pode ser escrita na forma

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad \text{(aumento da corrente)}. \tag{30-41}$$

onde τ_L, a **constante de tempo indutiva**, é dada por

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \text{(constante de tempo)}. \tag{30-42}$$

Vamos examinar a Eq. 30-41 em duas situações particulares: no instante em que a chave é fechada (ou seja, para $t = 0$) e um longo tempo após a chave ter sido fechada (ou seja, para $t \to \infty$). Fazendo $t = 0$ na Eq. 30-41, a exponencial se torna $e^{-0} = 1$. Logo, de acordo com a Eq. 30-41 a corrente é 0 no instante inicial. Fazendo $t \to \infty$, a exponencial se torna $e^{-\infty} = 0$. Logo, de acordo com a Eq. 30-41, para longos tempos a corrente tende para o valor final $\mathscr{E}/R$.

Podemos também examinar as diferenças de potencial no circuito. Assim, por exemplo, a Fig. 30-22 mostra a variação com o tempo das diferenças de potencial V_R ($= iR$) no resistor e V_L ($= L\,di/dt$) no indutor para valores particulares de $\mathscr{E}$, L e R. A figura correspondente para um circuito RC é a Fig. 27-18.

(a)

(b)

FIG. 30-22 Variação com o tempo (a) de V_R, a diferença de potencial entre os terminais do resistor da Fig. 30-21; (b) de V_L, a diferença de potencial entre os terminais do indutor. Os triângulos representam intervalos sucessivos de uma constante de tempo indutiva $\tau_L = L/R$. As curvas foram plotadas para $R = 2000\ \Omega$, $L = 4{,}0$ H e $\mathscr{E} = 10$ V.

Para mostrar que a constante τ_L ($= L/R$) tem dimensão de tempo, usamos as seguintes equivalências:

$$1\frac{\text{H}}{\Omega} = 1\frac{\text{H}}{\Omega}\left(\frac{1\ \text{V}\cdot\text{s}}{1\ \text{H}\cdot\text{A}}\right)\left(\frac{1\ \Omega\cdot\text{A}}{1\ \text{V}}\right) = 1\ \text{s}.$$

O primeiro fator entre parênteses é um fator de conversão baseado na Eq. 30-35, e o segundo é um fator de conversão baseado na relação $V = iR$.

Para compreender o significado físico da constante de tempo podemos usar a Eq. 30-41. Fazendo $t = \tau_L = L/R$ nessa equação, temos:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-1}) = 0{,}63\frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{30-43}$$

Assim, a constante de tempo τ_L é o tempo necessário para que a corrente no circuito atinja 63% do valor final $\mathscr{E}/R$. Como a diferença de potencial V_R no resistor é proporcional à corrente i, o gráfico da corrente em função do tempo tem a mesma forma que o gráfico de V_R da Fig. 30-22a.

Se a chave S da Fig. 30-20 é mantida na posição a por um tempo suficiente para que a corrente atinja o valor $\mathscr{E}/R$ e depois é deslocada para a posição b, o efeito é remover a fonte do circuito. (Para que não haja uma variação brusca de corrente é preciso que a ligação com o ponto b seja feita antes que a ligação com o ponto a seja interrompida; uma chave capaz de realizar esse tipo de operação é conhecida como chave *make-before-break*.) Na ausência de uma fonte a corrente no resistor cai para zero, mas não de forma instantânea. A equação diferencial que governa o decréscimo da corrente pode ser obtida fazendo $\mathscr{E} = 0$ na Eq. 30-39:

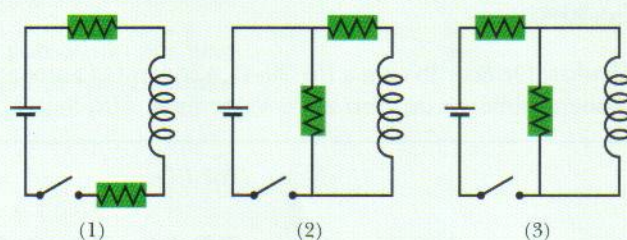
$$L\frac{di}{dt} + iR = 0. \tag{30-44}$$

Por analogia com as Eqs. 27-38 e 27-39, a solução dessa equação diferencial que satisfaz a condição inicial $i(0) = i_0 = \mathscr{E}/R$ é

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = i_0 e^{-t/\tau_L} \quad \text{(diminuição da corrente).} \tag{30-45}$$

Assim, tanto o aumento da corrente (Eq. 30-41) como a diminuição da corrente (Eq. 30-45) em um circuito RL são governados pela mesma constante de tempo indutiva τ_L.

Usamos i_0 na Eq. 30-45 para representar a corrente no instante $t = 0$. Nesse caso, o valor da corrente é $\mathscr{E}/R$, mas poderia ser qualquer outro valor inicial.

TESTE 6 A figura mostra três circuitos com fontes, indutores e resistores iguais. Coloque os circuitos na ordem da corrente que atravessa a fonte (a) logo depois que a chave é fechada e (b) muito tempo depois que a chave é fechada, começando pelo maior valor. (Se o leitor tiver dificuldade para responder, leia o exemplo a seguir e tente novamente.)

Exemplo 30-5

A Fig. 30-23a mostra um circuito que contém três resistores iguais de resistência $R = 9{,}0\ \Omega$, dois indutores iguais de indutância $L = 2{,}0$ mH e uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 18$ V.

(a) Qual é a corrente i que atravessa a fonte no instante em que a chave é fechada?

IDÉIA-CHAVE No momento em que a chave é fechada os indutores se opõem à variação da corrente que os atravessa.

Cálculos: Como antes de a chave ser fechada a corrente nos indutores é zero, a corrente continua a ser zero logo depois. Assim, logo depois que a chave é fechada os indutores se comportam como fios interrompidos, como mostra a Fig. 30-23b. Temos, portanto, um circuito de uma malha no qual, de acordo com a regra das malhas,

$$\mathscr{E} - iR = 0.$$

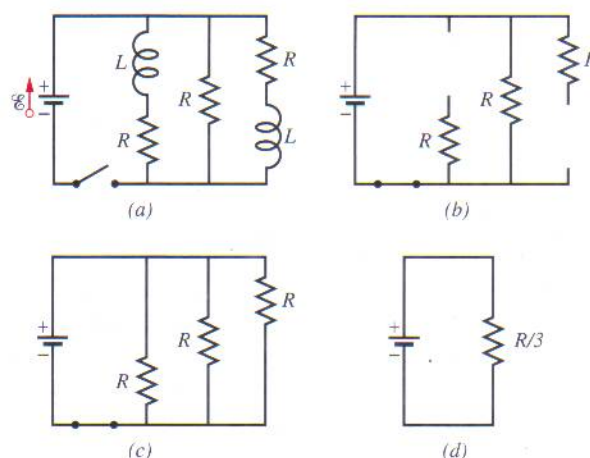



FIG. 30-23 (a) Circuito RL de várias malhas, com uma chave aberta. (b) O circuito equivalente logo depois que a chave é fechada. (c) O circuito equivalente muito tempo depois de a chave ter sido fechada. (d) Circuito de uma malha equivalente ao circuito (c).

Substituindo os valores dados, temos:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{18\ \text{V}}{9{,}0\ \Omega} = 2{,}0\ \text{A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a corrente i que atravessa a fonte depois que a chave permanece fechada por um longo tempo?

IDÉIA-CHAVE Depois que a chave permanece fechada por um longo tempo as correntes no circuito atingem os valores finais e os indutores passam a se comportar como simples fios de ligação, como mostra a Fig. 30-23*c*.

Cálculos: Temos, portanto, um circuito com três resistores iguais em paralelo; de acordo com a Eq. 27-23, a resistência equivalente é $R_{eq} = R/3 = (9{,}0\ \Omega)/3 = 3{,}0\ \Omega$. Aplicando a regra das malhas ao circuito equivalente da Fig. 30-23*d*, obtemos a equação $\mathscr{E} - iR_{eq} = 0$, donde

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{18\ \text{V}}{3{,}0\ \Omega} = 6{,}0\ \text{A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 30-6

Um solenóide tem uma indutância de 53 mH e uma resistência de 0,37 Ω. Se o solenóide é ligado a uma bateria, quanto tempo a corrente leva para atingir metade do valor final?

IDÉIA-CHAVE Podemos separar mentalmente o solenóide em uma resistência e uma indutância que estão ligadas em série a uma bateria, como na Fig. 30-21. Nesse caso, a aplicação da regra das malhas leva à Eq. 30-39, cuja solução é a Eq. 30-41.

Cálculos: De acordo com a Eq. 30-41, a corrente i aumenta exponencialmente de zero até o valor final, $\mathscr{E}/R$. Seja t_0 o tempo que a corrente i leva para atingir metade do valor final. Nesse caso, a Eq. 30-41 nos dá

$$\frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

Para determinar t_0 cancelamos $\mathscr{E}/R$, explicitamos a exponencial e tomamos o logaritmo natural de ambos os membros. O resultado é o seguinte:

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\ \text{H}}{0{,}37\ \Omega}\ln 2$$
$$= 0{,}10\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

30-10 | Energia Armazenada em um Campo Magnético

Quando afastamos duas partículas carregadas uma da outra podemos dizer que o aumento de energia potencial elétrica associado a esse afastamento fica armazenado no campo elétrico que existe nas vizinhanças das partículas. Podemos recuperar essa energia permitindo que as partículas se aproximem novamente. Da mesma forma, podemos dizer que existe uma energia armazenada no campo magnético criado por uma corrente.

Para obter uma expressão matemática para a energia armazenada no campo magnético considere novamente a Fig. 30-21, que mostra uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}$ ligada a um resistor R e a um indutor L. A Eq. 30-39, repetida aqui por conveniência,

$$\mathscr{E} = L\frac{di}{dt} + iR, \qquad (30\text{-}46)$$

é a equação diferencial que descreve o aumento da corrente no circuito. Como vimos, a equação é uma conseqüência direta da aplicação da regra das malhas que, por sua vez, é uma expressão da lei de conservação da energia em circuitos com uma única malha. Multiplicando por i ambos os membros da Eq. 30-46, obtemos:

$$\mathscr{E}i = Li\frac{di}{dt} + i^2R, \qquad (30\text{-}47)$$

que tem a seguinte interpretação em termos de trabalho e energia:

1. Se uma quantidade elementar de carga dq passa pela fonte de força eletromotriz $\mathscr{E}$ da Fig. 30-21 em um intervalo de tempo dt, a fonte realiza um trabalho

$(\mathscr{E}\,dq)/dt = \mathscr{E}i$. Assim, o lado esquerdo da Eq. 30-47 representa a taxa com a qual a fonte fornece energia ao resto do circuito.

2. O termo i^2R da Eq. 30-47 representa a taxa com a qual a energia é dissipada como energia térmica no resistor.
3. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia que é fornecida ao circuito e não é dissipada no resistor deve ser armazenada no campo magnético do indutor. Como a Eq. 30-47 representa a lei de conservação da energia para circuitos RL, o termo $Li\,di/dt$ deve representar a taxa dU_B/dt com a qual a energia potencial magnética U_B é armazenada no campo magnético.

Assim,

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}. \tag{30-48}$$

que pode ser escrita na forma

$$dU_B = Li\,di.$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di$$

ou $$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 \quad \text{(energia magnética)}, \tag{30-49}$$

que representa a energia total armazenada por um indutor L percorrido por uma corrente i. Note a semelhança entre essa expressão e a expressão da energia armazenada por um capacitor de capacitância C e carga q,

$$U_E = \frac{q^2}{2C}. \tag{30-50}$$

(A variável i^2 corresponde a q^2 e a constante L corresponde a $1/C$.)

Exemplo 30-7

Uma bobina tem uma indutância de 53 mH e uma resistência de 0,35 Ω.

(a) Se uma força eletromotriz de 12 V é aplicada à bobina, qual é a energia armazenada no campo magnético quando a corrente atinge o valor final?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 30-49 ($U_B = \frac{1}{2}Li^2$), a energia armazenada no campo magnético da bobina m qualquer instante é função da corrente que atravessa a bobina nesse instante.

Cálculos: Assim, para determinar a energia final U_B precisamos conhecer a corrente final. De acordo com a Eq. 30-41, essa corrente é dada por

$$i_\infty = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{0{,}35\ \Omega} = 34{,}3\ \text{A}. \tag{30-51}$$

Assim, temos:

$$U_{B\infty} = \tfrac{1}{2}Li_\infty^2 = (\tfrac{1}{2})(53 \times 10^{-3}\ \text{H})(34{,}3\ \text{A})^2$$
$$= 31\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Após quantas constantes de tempo metade da energia final está armazenada no campo magnético?

Cálculos: Agora estamos interessados em saber o seguinte: Em que instante de tempo t a relação

$$U_B = \tfrac{1}{2}U_{B\infty}$$

é satisfeita? Usando duas vezes a Eq. 30-49, podemos escrever essa equação na forma

$$\tfrac{1}{2}Li^2 = (\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}Li_\infty^2$$

ou $$i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i_\infty. \tag{30-52}$$

Entretanto, i é dada pela Eq. 30-41 e i_∞ (veja a Eq. 30-51) é igual a $\mathscr{E}/R$; assim, a Eq. 30-52 se torna

$$\frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}R}.$$

Cancelando $\mathscr{E}/R$ e reagrupando os termos, podemos escrever essa equação na forma

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}293,$$

o que nos dá

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0{,}293 = 1{,}23$$

ou

$$t \approx 1{,}2\tau_L. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a energia armazenada no campo magnético da bobina atinge metade do valor final 1,2 constantes de tempo após a força eletromotriz ser aplicada.

30-11 | Densidade de Energia de um Campo Magnético

Considere um segmento de comprimento l perto do centro de um solenóide longo de seção reta A percorrido por uma corrente i; o volume do segmento é Al. A energia U_B armazenada nesse trecho do solenóide deve estar toda no interior do solenóide, já que o campo magnético do lado de fora de um solenóide é praticamente zero. Além disso, a energia armazenada deve estar uniformemente distribuída, pois o campo magnético é (aproximadamente) uniforme no interior do solenóide.

Assim, a energia armazenada no campo por unidade de volume é

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

e como

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2,$$

temos

$$u_B = \frac{Li^2}{2Al} = \frac{L}{l}\frac{i^2}{2A},$$

onde L é a indutância do segmento do solenóide de comprimento l.

Substituindo L/l por seu valor, dado pela Eq. 30-31, temos:

$$u_B = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2, \qquad (30\text{-}53)$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento. Usando a Eq. 29-23 ($B = \mu_0 in$), podemos escrever a *densidade de energia* na forma

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \text{(densidade de energia magnética).} \qquad (30\text{-}54)$$

Esta equação fornece a densidade de energia armazenada em um ponto do espaço onde o módulo do campo magnético é B. Embora tenha sido demonstrada apenas para o caso especial de um solenóide, a Eq. 30-54 é válida para qualquer campo magnético, independentemente da forma como é produzido. Essa equação é análoga à Eq. 25-25,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad (30\text{-}55)$$

que fornece a densidade de energia armazenada (no vácuo) em um ponto do espaço onde o módulo do campo elétrico é E. Observe que u_B e u_E são proporcionais ao quadrado do módulo do campo correspondente, B ou E.

TESTE 7 A tabela mostra o número de espiras por unidade de comprimento, a corrente e a seção reta de três solenóides. Coloque os solenóides na ordem da densidade de energia magnética, começando pela maior.

Solenóide	Espiras por Unidade de Comprimento	Corrente	Área
a	$2n_1$	i_1	$2A_1$
b	n_1	$2i_1$	A_1
c	n_1	i_1	$6A_1$

Exemplo 30-8

Um cabo coaxial longo (Fig. 30-24) é formado por dois cilindros concêntricos de paredes finas e raios a e b. O cilindro interno conduz uma corrente constante i, e o cilindro externo constitui o caminho de retorno da mesma corrente. A corrente cria um campo magnético entre os dois cilindros.

(a) Calcule a energia armazenada no campo magnético em um segmento ℓ do cabo.

FIG. 30-24 Seção reta de um cabo coaxial longo formado por dois cilindros condutores de paredes finas e raios a e b.

IDÉIAS-CHAVE

1. Podemos calcular a energia (total) U_B armazenada no campo magnético a partir da densidade de energia u_B do campo.
2. A relação entre a densidade de energia e o módulo B do campo magnético é dada pela Eq. 30-54 ($u_B = B^2/2\mu_0$).
3. Devido à simetria circular do cabo, podemos determinar o valor de B usando a lei de Ampère e a corrente conhecida i.

Cálculo de B: Para aplicar essas idéias começamos pela lei de Ampère, usando uma amperiana circular de raio r tal que $a < r < b$ (o que coloca a amperiana entre os dois cilindros, como mostra a linha tracejada da Fig. 30-24). A única corrente envolvida por essa amperiana é a corrente i do cilindro interno. Assim, a lei de Ampère assume a forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i. \qquad (30\text{-}56)$$

Vamos agora simplificar a integral. Graças à simetria circular, sabemos que em todos os pontos da amperiana o campo $\vec{B}$ é tangente à curva e tem o mesmo módulo B. Vamos tomar o sentido de integração como sendo o sentido do campo magnético. Nesse caso, podemos substituir $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ por $B\,ds \cos 0 = B\,ds$ e passar o módulo B para fora do sinal de integral. A integral que resta é $\oint ds$, que nos dá simplesmente a circunferência $2\pi r$ da amperiana. Assim, a Eq. 30-56 se reduz a

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

ou

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}. \qquad (30\text{-}57)$$

Cálculo de u_B: Para obter a densidade de energia, substituímos a Eq. 30-57 na Eq. 30-54:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}. \qquad (30\text{-}58)$$

Cálculo de U_B: Observe que u_B não é uniforme na região entre os dois cilindros, mas varia com a distância radial r. Assim, para calcular a energia total U_B armazenada entre os dois cilindros devemos integrar u_B nesse volume.

Como o volume entre os dois cilindros possui simetria circular em relação ao eixo central do cabo, consideramos o elemento de volume dV de uma casca cilíndrica situada entre os dois cilindros. A casca tem raio interno r, raio externo $r + dr$ (Fig. 30-24) e comprimento ℓ. A área da seção reta da casca é o produto da circunferência $2\pi r$ pela espessura dr. Assim, o volume dV da casca é $(2\pi r)(dr)(\ell)$, ou seja, $dV = 2\pi r\ell\, dr$.

Como os pontos no interior dessa casca estão todos aproximadamente à mesma distância radial r do eixo central do cabo, todos possuem a mesma densidade de energia u_B. Assim, a energia total U_B contida em uma casca de volume dV é dada por

$$\text{energia} = \left(\begin{matrix}\text{energia por}\\ \text{unidade de volume}\end{matrix}\right)(\text{volume})$$

ou

$$dU_B = u_B\, dV.$$

Substituindo u_B pelo seu valor, dado pela Eq. 30-58, e dV por $2\pi r\ell\, dr$, temos:

$$dU_B = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r\ell)\, dr = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi}\frac{dr}{r}.$$

Para determinar a energia total contida entre os dois cilindros, integramos essa equação para o volume entre os cilindros:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \qquad \text{(Resposta)} \qquad (30\text{-}59)$$

A energia armazenada do lado de fora do cilindro externo e do lado de dentro do cilindro interno é zero, porque o campo magnético é zero nas duas regiões, como pode ser facilmente demonstrado usando a lei de Ampère.

(b) Qual é a energia armazenada por unidade de comprimento do cabo se a = 1,2 mm, b = 3,5 mm e i = 2,7 A?

Cálculo: De acordo com a Eq. 30-59, temos:

$$\frac{U_B}{\ell} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(2{,}7\ \text{A})^2}{4\pi} \ln \frac{3{,}5\ \text{mm}}{1{,}2\ \text{mm}}$$

$$= 7{,}8 \times 10^{-7}\ \text{J/m} = 780\ \text{nJ/m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

30-12 | Indução Mútua

Nesta seção vamos voltar ao caso de duas bobinas próximas, que foi discutido na Seção 30-2, e tratá-lo de modo mais formal. Como vimos, se duas bobinas estão próximas, como na Fig. 30-2, uma corrente i em uma das bobinas faz com que um fluxo magnético Φ atravesse a outra (*enlaçando* as duas bobinas). Se a corrente i varia com o tempo, uma força eletromotriz $\mathscr{E}$ dada pela lei de Faraday aparece na segunda bobina; o processo foi chamado de *indução*. Poderíamos ter usado a expressão **indução mútua**, para ressaltar o fato de que o processo envolve uma interação de duas bobinas e distingui-lo do processo de *auto-indução*, que envolve apenas uma bobina.

Vamos examinar o processo de indução mútua de modo quantitativo. A Fig. 30-25*a* mostra duas bobinas circulares compactas muito próximas, com o mesmo eixo central. Com o resistor variável ajustado para um certo valor R de resistência, a bateria produz uma corrente constante i_1 na bobina 1. A corrente cria um campo magnético representado pelas linhas de $\vec{B}_1$ na figura. O circuito da bobina 2 contém um amperímetro, mas não conta com uma bateria; um fluxo magnético Φ_{21} (o fluxo através da bobina 2 devido à corrente na bobina 1) enlaça as N_2 espiras da bobina 2.

A indutância mútua M_{21} da bobina 2 em relação à bobina 1 é definida pela relação

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}, \qquad (30\text{-}60)$$

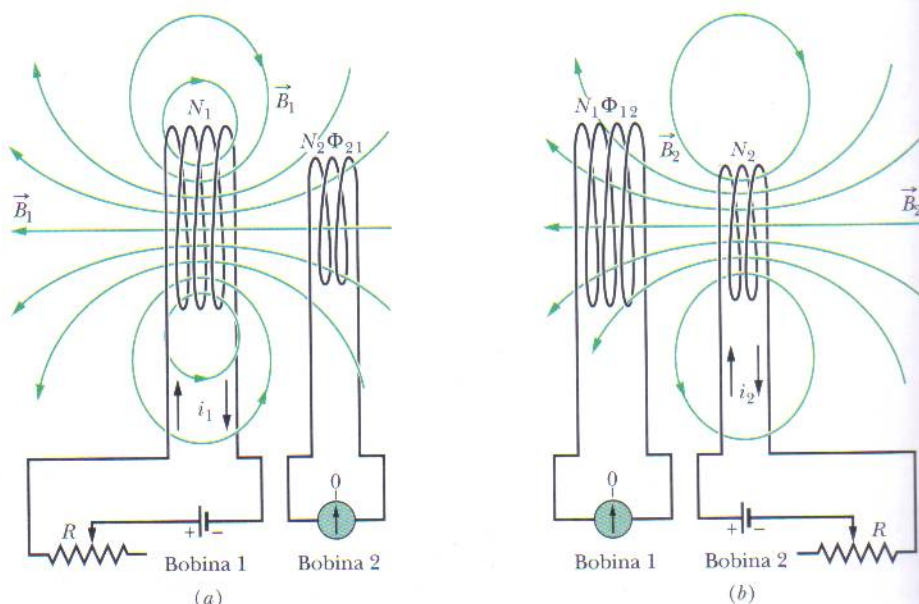



FIG. 30-25 Indução mútua. (*a*) O campo magnético $\vec{B}_1$ produzido pela corrente i_1 na bobina 1 atravessa as espiras da bobina 2. Quando se faz variar a corrente i_1 (fazendo variar a resistência R), uma força eletromotriz é induzida na bobina 2 e o amperímetro ligado à bobina 2 revela a passagem de uma corrente. (*b*) O mesmo sistema, com os papéis das bobinas 1 e 2 invertidos.

que tem a mesma forma que a Eq. 30-28 ($L = N\Phi/i$), a definição de indutância. Podemos escrever a Eq. 30-60 na forma

$$M_{21}i_1 = N_2\Phi_{21}.$$

Se fizermos i_1 variar com o tempo variando R, teremos

$$M_{21}\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

De acordo com a lei de Faraday, o lado direito dessa equação é igual em valor absoluto à força eletromotriz $\mathscr{E}_2$ que aparece na bobina 2 devido à variação da corrente na bobina 1. Assim, com um sinal negativo para indicar a polaridade de $\mathscr{E}_2$, temos:

$$\mathscr{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt}, \quad (30\text{-}61)$$

que tem a mesma forma que a Eq. 30-35 para a auto-indução ($\mathscr{E} = -L\,di/dt$).

Vamos agora inverter os papéis das bobinas 1 e 2, como na Fig. 30-25*b*; em outras palavras, vamos produzir uma corrente na bobina 2 com o auxílio de uma bateria e produzir um fluxo magnético Φ_{12} que enlace a bobina 1. Se fizermos i_2 variar com o tempo variando R, teremos:

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12}\frac{di_2}{dt}. \quad (30\text{-}62)$$

Assim, a força eletromotriz produzida em uma das bobinas é proporcional à taxa de variação da corrente na outra. É possível demonstrar que as constantes de proporcionalidade M_{21} e M_{12} são iguais, o que nos permite escrever

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (30\text{-}63)$$

caso em que as Eqs. 30-61 e 30-62 se tornam

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad (30\text{-}64)$$

e

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}. \quad (30\text{-}65)$$

Exemplo 30-9

A Fig. 30-26 mostra duas bobinas circulares compactas, coplanares, coaxiais, a menor de raio R_2 com N_2 espiras e a maior de raio R_1 com N_1 espiras.

(a) Escreva uma expressão para a indutância mútua M para esse arranjo de bobinas, supondo que $R_1 \gg R_2$.

IDÉIA-CHAVE A indutância mútua das bobinas é a razão entre o enlaçamento de fluxo ($N\Phi$) através de uma das bobinas e a corrente i na outra bobina. Assim, precisamos supor que existe uma corrente em uma bobina e calcular o fluxo magnético que atravessa a outra bobina devido a essa corrente.

Cálculos: Tanto o módulo como a direção do campo magnético produzido pela bobina menor variam de ponto para ponto no interior da bobina maior; assim, o fluxo magnético que atravessa a bobina maior é difícil de calcular. Por outro lado, como estamos supondo que o raio da bobina menor é muito menor que o raio da bobina maior, podemos supor que o campo magnético criado pela bobina maior é aproximadamente uniforme no interior da bobina menor. Assim, para calcular M supomos que a bobina maior é percorrida por uma corrente i_1 e calculamos o enlaçamento de fluxo $N_2\Phi_{21}$ na bobina menor:

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}. \quad (30\text{-}66)$$

De acordo com a Eq. 30-2, o fluxo Φ_{21} através de cada espira da bobina menor é dado por

$$\Phi_{21} = B_1A_2,$$

onde B_1 é o módulo do campo magnético no interior da bobina menor, devido à corrente na bobina maior, e A_2

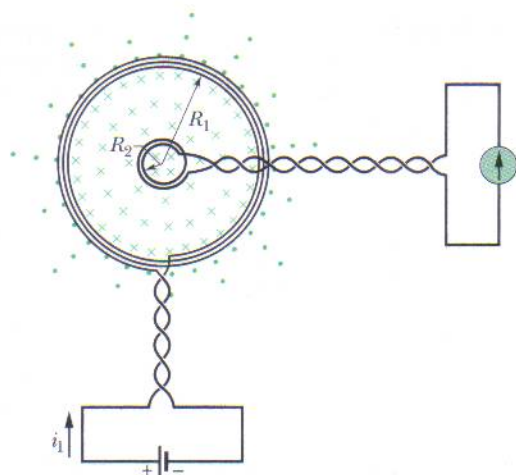



FIG. 30-26 Uma pequena bobina no centro de uma bobina maior. A indutância mútua das bobinas pode ser determinada fazendo passar uma corrente i_1 na bobina maior.

$(= \pi R_2^2)$ é a área de uma espira. Assim, o enlaçamento de fluxo na bobina menor (que possui N_2 espiras) é dado por

$$N_2\Phi_{21} = N_2 B_1 A_2. \qquad (30\text{-}67)$$

Para determinar o campo B_1 no interior da bobina menor podemos usar a Eq. 29-26,

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

onde podemos fazer $z = 0$ porque a bobina menor está no mesmo plano que a bobina maior. De acordo com essa equação cada espira da bobina maior produz um campo magnético de módulo $\mu_0 i_1/2R_1$ no interior da bobina menor. Assim, a bobina maior (que possui N_1 espiras) produz um campo magnético total de módulo

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 i_1}{2R_1} \qquad (30\text{-}68)$$

no interior da bobina menor.

Substituindo os valores de B_1 (dados pela Eq. 30-68) e $A_2\ (= \pi R_2^2)$ na Eq. 30-67, temos:

$$N_2\Phi_{21} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2 i_1}{2R_1}.$$

Substituindo esse resultado na Eq. 30-66, obtemos

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}. \quad \text{(Resposta)} \qquad (30\text{-}69)$$

(b) Qual é o valor de M para $N_1 = N_2 = 1200$ espiras, $R_2 = 1{,}1$ cm e $R_1 = 15$ cm?

Cálculos: De acordo com a Eq. 30-69, temos:

$$M = \frac{(\pi)(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(1200)(1200)(0{,}011\ \text{m})^2}{(2)(0{,}15\ \text{m})}$$

$$= 2{,}29 \times 10^{-3}\ \text{H} \approx 2{,}3\ \text{mH}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Suponha que os papéis das duas bobinas sejam invertidos, ou seja, que partimos de uma corrente i_2 na bobina menor e tentamos determinar o valor de M usando a Eq. 30-60 na forma

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}.$$

Não é fácil calcular Φ_{12}, o fluxo do campo produzido pela bobina menor através da bobina maior, já que, como dissemos, nesse caso não podemos supor que o campo é uniforme. Entretanto, se executarmos o cálculo em um computador encontraremos o mesmo valor, $M = 2{,}3$ mH! Assim, a Eq. 30-63 ($M_{21} = M_{12} = M$), embora não seja óbvia, é sempre verdadeira.

REVISÃO E RESUMO

Fluxo Magnético O *fluxo magnético* Φ_B de um campo magnético $\vec{B}$ através de uma área A é definido através da equação

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \qquad (30\text{-}1)$$

onde a integral é calculada para toda a área. A unidade de fluxo magnético no SI é o weber (Wb); 1 Wb = 1 T · m². Se $\vec{B}$ é uniforme e perpendicular à área de integração, a Eq. 30-1 se torna

$$\Phi_B = BA \qquad (\vec{B} \perp A,\ \vec{B}\ \text{uniforme}). \qquad (30\text{-}2)$$

Lei de Indução de Faraday Se o fluxo magnético Φ_B através de uma área limitada por uma espira condutora fechada varia com o tempo, uma corrente e uma força eletromotriz são produzidas na espira; esse processo recebe o nome de *indução*. A força eletromotriz induzida é

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(lei de Faraday)}. \qquad (30\text{-}4)$$

Se a espira é substituída por uma bobina compacta de N espiras, a força eletromotriz se torna

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (30\text{-}5)$$

Lei de Lenz O sentido de uma corrente induzida é tal que o campo magnético *produzido pela corrente* se opõe à variação do fluxo magnético que induziu a corrente. A força eletromotriz induzida tem o mesmo sentido que a corrente induzida.

Força Eletromotriz e Campo Elétrico Induzido Uma força eletromotriz é induzida por um campo magnético variável mesmo que a espira através da qual o fluxo magnético está va-

riando seja apenas uma curva imaginária. O campo magnético variável induz um campo elétrico $\vec{E}$ em todos os pontos da curva; a força eletromotriz induzida e o campo elétrico induzido estão relacionados através da equação

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}, \tag{30-19}$$

onde a integração é executada ao longo da curva. De acordo com a Eq. 30-19, a lei de Faraday pode ser escrita na forma mais geral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(lei de Faraday).} \tag{30-20}$$

De acordo com esta lei, *um campo magnético variável induz um campo elétrico* $\vec{E}$.

Indutores O **indutor** é um dispositivo que pode ser usado para produzir um campo magnético conhecido em uma certa região do espaço. Se uma corrente i atravessa as N espiras de um indutor, um fluxo magnético Φ_B enlaça essas espiras. A **indutância** L do indutor é dada por

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad \text{(definição de indutância).} \tag{30-28}$$

A unidade de indutância no SI é o **henry** (H); 1 H = 1 T · m²/A. A indutância por unidade de comprimento perto do centro de um solenóide longo de área A e n espiras por unidade de comprimento é dada por

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \quad \text{(solenóide).} \tag{30-31}$$

Auto-indução Se uma corrente i em uma bobina varia com o tempo, uma força eletromotriz é induzida na bobina. Essa força eletromotriz auto-induzida é dada por

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt}. \tag{30-35}$$

O sentido de $\mathscr{E}_L$ é dado pela lei de Lenz: a força eletromotriz auto-induzida se opõe à variação que a produz.

Circuitos *RL* Série Se uma força eletromotriz constante $\mathscr{E}$ é aplicada a um circuito com uma única malha constituído por uma resistência R e uma indutância L, a corrente tende para um valor final $\mathscr{E}/R$ de acordo com a equação

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad \text{(aumento da corrente),} \tag{30-41}$$

onde τ_L (= L/R) governa a taxa de aumento da corrente e é chamada de **constante de tempo indutiva** do circuito. Quando a fonte de força eletromotriz constante é removida, a corrente diminui para zero a partir de um valor inicial i_0 de acordo com a equação

$$i = i_0 e^{-t/\tau_L} \quad \text{(diminuição da corrente).} \tag{30-45}$$

Energia Magnética Se um indutor L conduz uma corrente i, o campo magnético do indutor armazena uma energia dada por

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 \quad \text{(energia magnética).} \tag{30-49}$$

Se B é o módulo do campo magnético (criado por um indutor ou por qualquer outro meio) em um ponto do espaço, a densidade de energia magnética armazenada nesse ponto é dada por

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{(densidade de energia magnética).} \tag{30-54}$$

Indução Mútua Se existem duas bobinas 1 e 2 próximas uma da outra, a variação da corrente em uma das bobinas pode induzir uma força eletromotriz na outra. Essa indução mútua é descrita pelas equações

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \tag{30-64}$$

e

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}, \tag{30-65}$$

onde M (medida em henrys) é a indutância mútua das bobinas.

PERGUNTAS

1 Na Fig. 30-27 um fio retilíneo longo percorrido por uma corrente i passa (sem fazer contato) por três espiras retangulares de lados L, $1{,}5L$ e $2L$. A distância entre as espiras é relativamente grande (o suficiente para que não interajam). As espiras 1 e 3 são simétricas em relação ao fio. Coloque as espiras na ordem do valor absoluto da corrente induzida (a) se a corrente i for constante e (b) se a corrente i estiver aumentando, começando pelo maior valor.

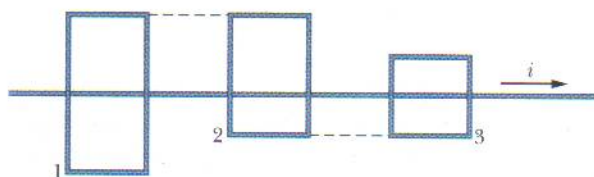



FIG. 30-27 Pergunta 1.

2 A Fig. 30-28 mostra dois circuitos nos quais uma barra condutora desliza com a mesma velocidade escalar v na presença do mesmo campo magnético uniforme, ao longo de um fio em forma de U. Os segmentos paralelos do fio estão separados por uma distância $2L$ no circuito 1 e por uma distância L no circuito 2. A corrente induzida no circuito 1 tem o sentido anti-horário. (a) O sentido do campo magnético é para dentro ou para fora do papel? (b) A corrente induzida no circuito 2 tem o sentido horário ou ou o sentido anti-horário? (c) A força eletromotriz induzida no circuito 1 é maior, menor ou igual à força eletromotriz induzida no circuito 2?

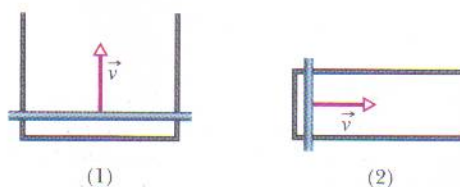



FIG. 30-28 Pergunta 2.

3 Se o condutor circular da Fig. 30-29 sofre uma expansão térmica na presença de um campo magnético uniforme, uma corrente é induzida no sentido horário. O sentido do campo magnético é para dentro ou para fora do papel?

FIG. 30-29 Pergunta 3.

4 A espira da Fig. 30-30a é submetida, sucessivamente, a seis campos magnéticos uniformes, todos paralelos ao eixo z. A Fig. 30-30b mostra os módulos B_z desses campos em função do tempo t. (As retas 1 e 3 e as retas 4 e 6 são paralelas.) Coloque os seis campos na ordem da força eletromotriz induzida na espira, começando pela maior no sentido horário e terminando com a maior no sentido anti-horário.

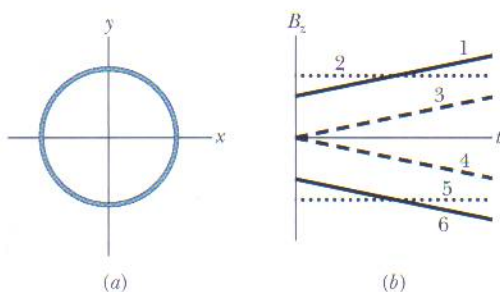



FIG. 30-30 Pergunta 4.

5 A Fig. 30-31 mostra uma região circular na qual existem um campo magnético uniforme decrescente orientado para fora do papel e quatro trajetórias circulares concêntricas. Coloque as trajetórias na ordem do valor absoluto de $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, começando pelo maior.

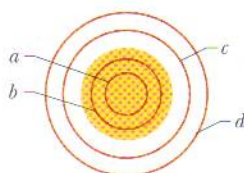



FIG. 30-31 Pergunta 5.

6 Na Fig. 30-32 uma espira é feita de três segmentos: bc (um segmento em forma de quarto de circunferência), ac (dois segmentos retilíneos formando um ângulo reto) e ab (um segmento retilíneo). A espira pode ser submetida a três campos magnéticos:

(1) $\vec{B}_1 = 3\hat{\text{i}} + 7\hat{\text{j}} - 5t\hat{\text{k}}$,
(2) $\vec{B}_2 = 5t\hat{\text{i}} - 4\hat{\text{j}} - 15\hat{\text{k}}$,
(3) $\vec{B}_3 = 2\hat{\text{i}} - 5t\hat{\text{j}} - 12\hat{\text{k}}$,

onde $\vec{B}$ está em militeslas e t em segundos. Sem fazer nenhum cálculo no papel, coloque os campos magnéticos na ordem (a) do trabalho executado por unidade de carga para criar a corrente induzida e (b) do valor absoluto da corrente induzida, começando pelo maior. (c) Qual é o sentido da corrente induzida para cada um dos campos magnéticos?

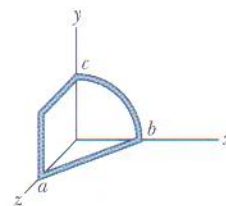



FIG. 30-32 Pergunta 6.

7 A Fig. 30-33 mostra três circuitos com fontes, indutores e resistores iguais. Coloque os circuitos na ordem da corrente no resistor R, começando pela maior, (a) muito tempo depois que a chave é fechada; (b) logo depois que a chave é aberta, depois de permanecer fechada por muito tempo; (c) muito tempo depois que a chave é aberta, depois de permanecer fechada por muito tempo.

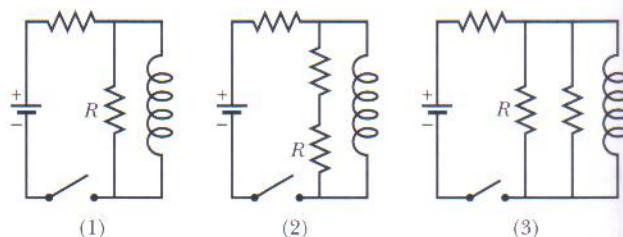



FIG. 30-33 Pergunta 7.

8 A Fig. 30-34 mostra a variação com o tempo da diferença de potencial V_R entre os terminais de um resistor em três circuitos como a da Fig. 30-21. A resistência R e a força eletromotriz $\mathscr{E}$ da fonte são iguais nos três circuitos, mas as indutâncias L são diferentes. Coloque os circuitos na ordem do valor de L, começando pelo maior.

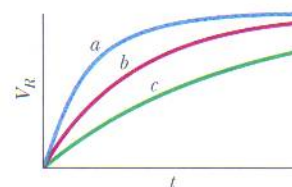



FIG. 30-34 Pergunta 8.

9 A Fig. 30-35 mostra um circuito com dois resistores iguais e um indutor ideal. A corrente no resistor do meio é maior, menor ou igual à corrente no outro resistor (a) logo depois que a chave S é fechada; (b) muito tempo depois que a chave S é fechada; (c) logo depois que a chave é aberta depois de permanecer fechada por muito tempo; (d) muito tempo depois que a chave é aberta depois de permanecer fechada por muito tempo?

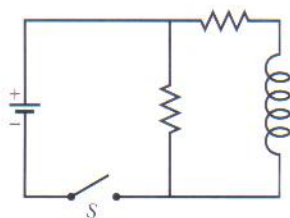



FIG. 30-35 Pergunta 9.

10 A chave do circuito da Fig. 30-20 permaneceu na posição *a* por muito tempo, e depois foi deslocada para a posição *b*. A Fig. 30-36 mostra a corrente no indutor para quatro conjuntos de valores da resistência R e da indutância L: (1) R_0 e L_0; (2) $2R_0$ e L_0; (3) R_0 e $2L_0$; (4) $2R_0$ e $2L_0$. Qual é a curva correspondente a cada conjunto?

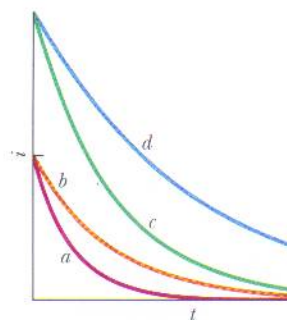



FIG. 30-36 Pergunta 10.

PROBLEMAS

 O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 30-4 A Lei de Lenz

•**1** Na Fig. 30-37 o fluxo de campo magnético na espira aumenta de acordo com a equação $\Phi_B = 6{,}0t^2 + 7{,}0t$, onde Φ_B está em miliwebers e t em segundos. (a) Qual é o módulo da força eletromotriz induzida na espira no instante $t = 2{,}0$ s? (b) O sentido da corrente no resistor R é para a direita ou para a esquerda?

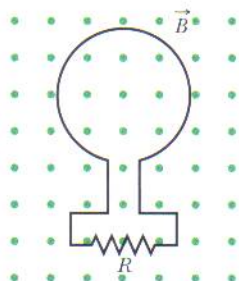



FIG. 30-37 Problema 1.

•**2** Uma espira com 12 cm de raio e uma resistência de 8,5 Ω é submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ cujo módulo varia de acordo com a Fig. 30-38. A escala do eixo vertical é definida por $B_s = 0{,}50$ T, e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 6{,}00$ s. O plano da espira é perpendicular a $\vec{B}$. Determine a força eletromotriz induzida na espira durante os intervalos de tempo (a) $0 < t < 2{,}0$ s; (b) $2{,}0\text{ s} < t < 4{,}0$ s; (c) $4{,}0\text{ s} < t < 6{,}0$ s.

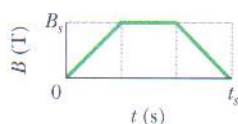



FIG. 30-38 Problema 2.

•**3** Uma pequena espira com 6,8 mm² de área é colocada no interior de um solenóide longo com 854 espiras/cm, percorrido por uma corrente senoidal i com 1,28 A de amplitude e uma freqüência angular de 212 rad/s. Os eixos centrais da espira e do solenóide coincidem. Qual é a amplitude da força eletromotriz induzida na espira?

•**4** Um material condutor elástico é esticado e usado para fazer uma espira circular com 12,0 cm de raio, que é submetida a um campo magnético uniforme de 0,800 T perpendicular ao plano da espira. Ao ser liberada a espira começa a se contrair, e seu raio diminui inicialmente à taxa de 75,0 cm/s. Qual é a força eletromotriz induzida na espira durante a contração?

•**5** Na Fig. 30-39 uma bobina de 120 espiras, com 1,8 cm de raio e uma resistência de 5,3 Ω, é coaxial com um solenóide de 220 espiras/cm e 3,2 cm de diâmetro. A corrente no solenóide diminui de 1,5 A para zero em um intervalo de tempo $\Delta t = 25$ ms. Qual é a corrente induzida na bobina no intervalo Δt?

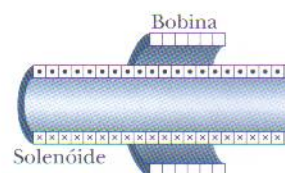



FIG. 30-39 Problema 5.

•**6** Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é perpendicular ao plano de uma espira circular com 10 cm de diâmetro, formada por um fio com 2,5 mm de diâmetro e uma resistividade de $1{,}69 \times 10^{-8}$ Ω · m. Qual deve ser a taxa de variação de $\vec{B}$ para que uma corrente de 10 A seja induzida na espira?

•**7** Na Fig. 30-40 um fio forma uma espira circular de raio $R = 2{,}0$ m e uma resistência de 4,0 Ω. Um fio retilíneo longo passa pelo centro da espira; no instante $t = 0$ a corrente no fio é 5,0 A para a direita. Para $t > 0$, a corrente varia de acordo com a equação $i = 5{,}0\text{ A} - (2{,}0\text{ A/s}^2)t^2$. (Como o fio é isolado, não há contato entre o fio e a espira.) Qual é o valor absoluto da corrente induzida na espira para $t > 0$?

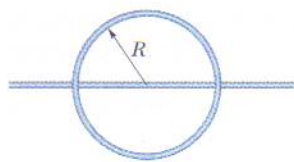



FIG. 30-40 Problema 7.

•8 A Fig. 30-41a mostra um circuito formado por uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 6{,}00\ \mu V$, uma resistência R e uma pequena espira com 5,0 cm² de área. Um campo magnético externo é aplicado à espira durante o intervalo de $t = 10$ s a $t = 20$ s. O campo é uniforme, dirigido para dentro do papel na Fig. 30-41a, e o módulo do campo é dado por $B = at$, onde B está em teslas, a é uma constante e t está em segundos. A Fig. 30-41b mostra a corrente i no circuito antes, durante e depois da aplicação do campo. A escala do eixo vertical é definida por $i_s = 2{,}0$ mA. Determine o valor da constante a na equação do módulo do campo.

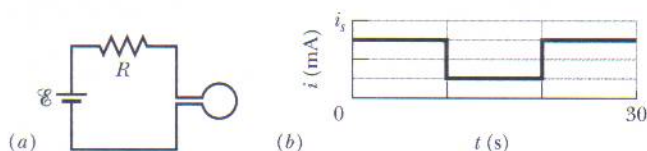



FIG. 30-41 Problema 8.

•9 Na Fig. 30-42 uma espira circular com 10 cm de diâmetro (vista de perfil) é posicionada com a normal $\vec{N}$ fazendo um ângulo $\theta = 30°$ com a direção de um campo magnético uniforme $\vec{B}$ cujo módulo é 0,50 T. A espira começa a girar de tal forma que $\vec{N}$ descreve um cone em torno da direção do campo à taxa de 100 revoluções por minuto; o ângulo θ permanece constante durante o processo. Qual é a força eletromotriz induzida na espira?

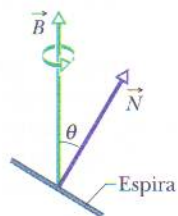



FIG. 30-42 Problema 9.

••10 Na Fig. 30-43a o módulo do campo magnético uniforme $\vec{B}$ aumenta com o tempo de acordo com o gráfico da Fig. 30-43b, onde a escala do eixo vertical é definida por $B_s = 9{,}0$ mT e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 3{,}0$ s. Uma espira circular com uma área de $8{,}0 \times 10^{-4}$ m², no plano do papel, é submetida ao campo. A Fig. 30-43c mostra a carga q que passa pelo ponto A da espira em função do tempo t, com a escala do eixo vertical definida por $q_s = 6{,}0$ mC, e a escala do eixo horizontal definida por $t_s = 3{,}0$ s. Qual é a resistência da espira?

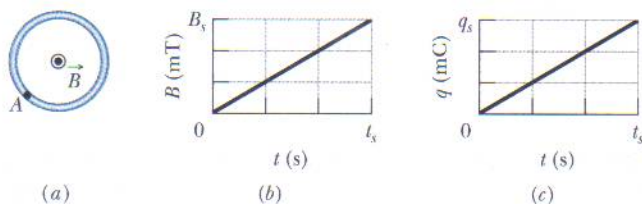



FIG. 30-43 Problema 10.

••11 Uma espira quadrada com 2,00 m de lado é mantida perpendicular a um campo magnético uniforme, com metade da área da espira na região em que existe campo, como mostra a Fig. 30-44. A espira contém uma fonte ideal de força eletromotriz $\mathscr{E} = 20{,}0$ V. Se o módulo do campo varia com o tempo de acordo com a equação $B = 0{,}0420 - 0{,}870t$, com B em teslas e t em segundos, determine (a) a força eletromotriz total aplicada à espira; (b) o sentido da corrente (total) na espira.

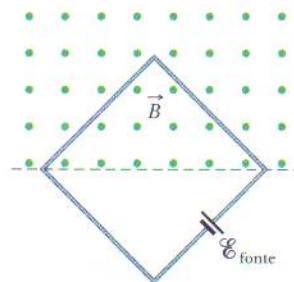



FIG. 30-44 Problema 11.

••12 A Fig. 30-45a mostra um fio que forma um retângulo ($W = 20$ cm, $H = 30$ cm) e tem uma resistência de 5,0 mΩ. O interior do retângulo é dividido em três partes iguais, que são submetidas a campos magnéticos $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_3$. Os campos são uniformes dentro de cada região e orientados para fora do papel. A Fig. 30-45b mostra a variação das componentes B_z dos três campos com o tempo t; a escala do eixo vertical é definida por $B_s = 4{,}0$ μT e $B_b = 2{,}5B_s$, e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 2{,}0$ s. Determine (a) o módulo e (b) o sentido da corrente induzida no fio.

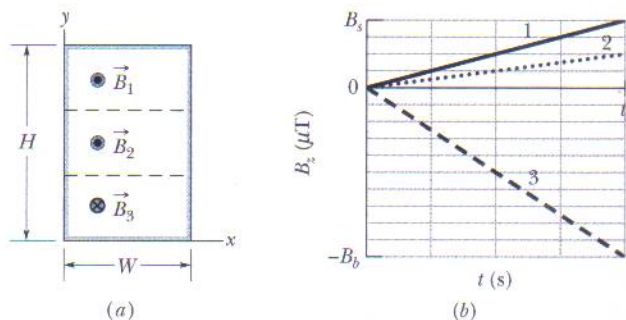



FIG. 30-45 Problema 12.

••13 Uma bobina retangular de comprimento a e largura b, com N espiras, gira com freqüência f na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$, como mostra a Fig. 30-46. A bobina está ligada a cilindros metálicos que giram solidariamente a ela e nos quais estão apoiadas escovas metálicas que fazem contato com um circuito externo. (a) Mostre que a força eletromotriz induzida na bobina é dada (em função do tempo t) pela equação

$$\mathscr{E} = 2\pi fNabB\,\text{sen}(2\pi ft) = \mathscr{E}_0\,\text{sen}(2\pi ft).$$

Este é o princípio de funcionamento dos geradores comerciais de corrente alternada. (b) Para que valor de Nab a força eletromotriz gerada tem uma amplitude $\mathscr{E}_0 = 150$ V quando a bobina gira com uma freqüência de 60,0 revoluções por segundo em um campo magnético uniforme de 0,500 T?

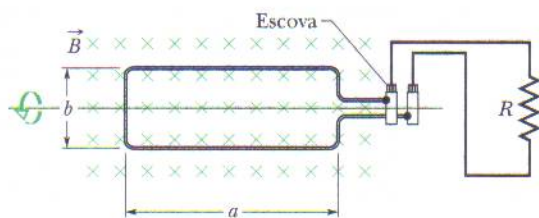



FIG. 30-46 Problema 13.

••14 A Fig. 30-47 mostra uma espira formada por um par de semicircunferências de 3,7 cm de raio situadas em planos mutuamente perpendiculares. A espira foi formada dobrando uma espira plana ao longo de um diâmetro até que as duas metades ficassem perpendiculares. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 76 mT é aplicado perpendicularmente ao diâmetro da dobra, fazendo ângulos iguais (de 45°) com os planos das semicircunferências. O campo magnético é reduzido para zero a uma taxa uniforme durante um intervalo de tempo de 4,5 ms. Durante esse intervalo, determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (horário ou anti-horário, do ponto de vista do sentido de incidência de $\vec{B}$) da força eletromotriz induzida na espira.

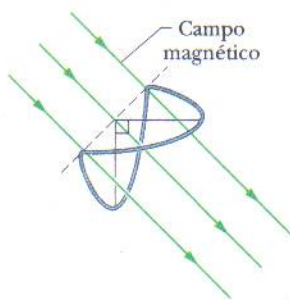



FIG. 30-47 Problema 14.

••15 Na Fig. 30-48 uma semicircunferência de fio de raio a = 2,00 cm gira com uma velocidade angular constante de 40 revoluções por segundo na presença de um campo magnético uniforme de 20 mT. Determine (a) a freqüência e (b) a amplitude da força eletromotriz induzida no circuito.

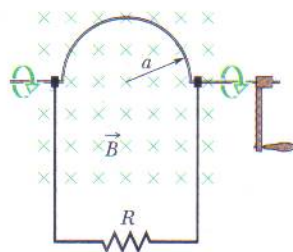



FIG. 30-48 Problema 15.

••16 Em uma certa localidade o campo magnético da Terra tem módulo B = 0,590 gauss e uma inclinação para baixo de 70,0° em relação à horizontal. Uma bobina plana horizontal tem 10,0 cm de raio, 1000 espiras e uma resistência total de 85,0 Ω e está ligada em série com um medidor com 140 Ω de resistência. A bobina descreve meia revolução em torno de um diâmetro. Qual é a carga que atravessa o medidor durante o movimento?

••17 Um gerador elétrico contém uma bobina de 100 espiras retangulares de 50,0 cm por 30,0 cm. A bobina é submetida a um campo magnético uniforme de módulo B = 3,50 T com $\vec{B}$ inicialmente perpendicular ao plano da bobina. Qual é o valor máximo da força eletromotriz produzida quando a bobina gira a 1000 revoluções por minuto em torno de um eixo perpendicular a $\vec{B}$?

••18 Na Fig. 30-49 uma espira retangular de dimensões L = 40,0 cm e W = 25,0 cm é submetida a um campo magnético $\vec{B}$. Determine (a) o módulo $\mathscr{E}$ e (b) o sentido (horário, anti-horário ou "nenhum", se $\mathscr{E}$ = 0) da força eletromotriz induzida na espira se $\vec{B} = (4{,}00 \times 10^{-2}\ \text{T/m})y\hat{k}$. Determine (c) $\mathscr{E}$ e (d) o sentido de $\mathscr{E}$ se $\vec{B} = (6{,}00 \times 10^{-2}\ \text{T/s})t\hat{k}$. Determine (e) $\mathscr{E}$ e (f) o sentido de $\mathscr{E}$ se $\vec{B} = (8{,}00 \times 10^{-2}\ \text{T/m})yt\hat{k}$. Determine (g) $\mathscr{E}$ e (h) o sentido de $\mathscr{E}$ se $\vec{B} = (3{,}00 \times 10^{-2}\ \text{T/m})xt\hat{j}$. Determine (i) $\mathscr{E}$ e (j) o sentido de $\mathscr{E}$ se $\vec{B} = (5{,}00 \times 10^{-2}\ \text{T/m} \cdot \text{s})yt\hat{i}$.

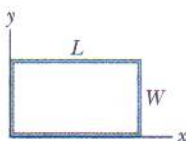



FIG. 30-49 Problema 18.

••19 Cem espiras de fio de cobre (isolado) são enroladas em um núcleo cilíndrico de madeira com uma seção reta de $1{,}20 \times 10^{-3}$ m². As duas extremidades do fio são ligadas a um resistor. A resistência total do circuito é 13,0 Ω. Se um campo magnético longitudinal uniforme aplicado ao núcleo muda de 1,60 T em um sentido para 1,60 T no sentido oposto, qual é a carga que passa por um ponto do circuito durante a mudança?

••20 Uma espira retangular, como uma área de 0,15 m², está girando na presença de um campo magnético uniforme de módulo B = 0,20 T. Quando o ângulo entre o campo e a normal ao plano da espira é $\pi/2$ e está aumentando à taxa de 0,60 rad/s, qual é a força eletromotriz induzida na espira?

••21 A Fig. 30-50 mostra duas espiras paralelas com um eixo comum. A espira menor (de raio r) está acima da espira maior (de raio R) a uma distância $x \gg R$. Em conseqüência, o campo magnético produzido por uma corrente i que atravessa a espira maior no sentido anti-horário é praticamente uniforme na região limitada pela espira menor. A distância x está aumentando a uma taxa constante $dx/dt = v$. (a) Escreva uma expressão para o fluxo magnético através da bobina menor em função de x. (*Sugestão:* Veja a Eq. 29-27.) (b) Escreva uma expressão para a força eletromotriz induzida na espira menor. (c) Determine o sentido da corrente induzida na espira menor.

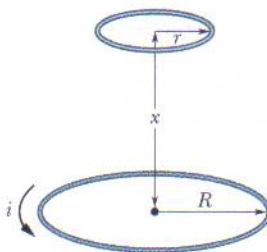



FIG. 30-50 Problema 21.

••22 Uma espira é formada por três segmentos circulares, todos de raio r = 10 cm, como mostra a Fig. 30-51. Cada segmento é um quarto de circunferência: ab está no plano xy, bc no plano yz e ca no plano zx. (a) Se um campo magnético uniforme $\vec{B}$ aponta

no sentido positivo do eixo x, qual é o valor absoluto da força eletromotriz que aparece na espira quando B aumenta à taxa de 3,0 mT/s? (b) Qual é o sentido da corrente no segmento bc?

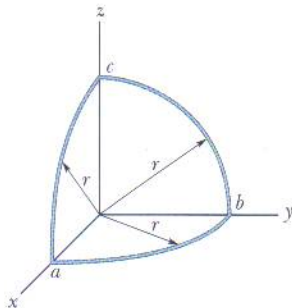



FIG. 30-51 Problema 22.

••23 Uma pequena espira circular com 2,00 cm² de área é concêntrica e coplanar com uma espira circular muito maior, com 1,00 m de raio. A corrente na espira maior varia a uma taxa constante de 200 A para −200 A (ou seja, troca de sentido) em um intervalo de 1,00 s, começando no instante $t = 0$. Determine o módulo do campo magnético $\vec{B}$ no centro da espira menor devido à corrente na espira menor (a) em $t = 0$; (b) em $t = 0{,}500$ s; (c) em $t = 1{,}00$ s. (d) O campo $\vec{B}$ troca de sentido no intervalo $0 < t < 1{,}00$ s? Como a espira menor é pequena, suponha que $\vec{B}$ é uniforme no seu interior. (e) Determine a força eletromotriz induzida na espira menor no instante $t = 0{,}500$ s.

•••24 No sistema da Fig. 30-52 $a = 12{,}0$ cm e $b = 16{,}0$ cm. A corrente no fio retilíneo longo é dada por $i = 4{,}50t^2 - 10{,}0t$, onde i está em ampères e t em segundos. (a) Determine a força eletromotriz na espira quadrada no instante $t = 3{,}00$ s. (b) Qual é o sentido da corrente induzida na espira?

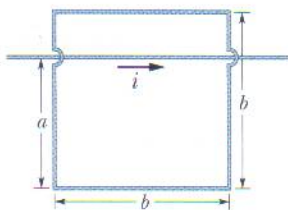



FIG. 30-52 Problema 24.

•••25 Na Fig. 30-53 uma espira quadrada com 2,0 cm de lado é submetida a um campo magnético, dirigido para fora do papel, cujo módulo é dado por $B = 4{,}0t^2y$, onde B está em teslas, t em segundos e y em metros. No instante $t = 2{,}5$ s, determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido da força eletromotriz induzida na espira.

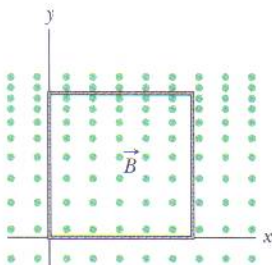



FIG. 30-53 Problema 25.

•••26 Na Fig. 30-54 uma espira retangular de comprimento $a = 2{,}2$ cm, largura $b = 0{,}80$ cm e resistência $R = 0{,}40$ mΩ é colocada nas vizinhanças de um fio infinitamente longo percorrido por uma corrente $i = 4{,}7$ A. Em seguida, a espira é afastada do fio com uma velocidade constante $v = 3{,}2$ mm/s. Quando o centro da espira está a uma distância $r = 1{,}5b$ do fio, determine (a) o valor absoluto do fluxo magnético que atravessa a espira; (b) a corrente induzida na espira.

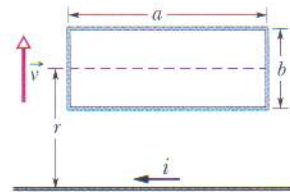



FIG. 30-54 Problema 26.

•••27 Dois fios longos e paralelos de cobre, com 2,5 mm de diâmetro, conduzem correntes de 10 A em sentidos opostos. (a) Se os eixos centrais dos fios estão separados por uma distância de 20 mm, determine o fluxo magnético por metro de fio que existe no espaço entre os fios. (b) Que porcentagem desse fluxo está no interior dos fios? (c) Repita o item (a) supondo que as correntes têm o mesmo sentido.

seção 30-5 Indução e Transferências de Energia

•28 Na Fig. 30-55a uma espira circular é concêntrica com um solenóide e está em um plano perpendicular ao eixo central do solenóide. A espira tem 6,00 cm de raio. O solenóide tem um raio de 2,00 cm, possui 8000 espiras/cm e sua corrente i_{sol} varia com o tempo t da forma indicada na Fig. 30-55b, onde a escala do eixo vertical é definida por $i_s = 1{,}00$ A e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 2{,}0$ s. A Fig. 30-55c mostra, em função do tempo, a energia E_t que é transformada em energia térmica na espira; a escala do eixo vertical é definida por $E_s = 100{,}0$ nJ. Qual é a resistência da espira?

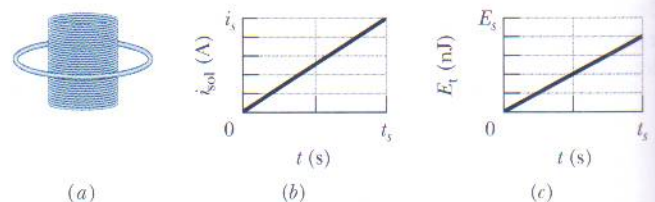



FIG. 30-55 Problema 28.

•29 Se 50,0 cm de um fio de cobre com 1,00 mm de diâmetro são usados para formar uma espira circular, que é mantida perpendicular a um campo magnético uniforme que está aumentando a uma taxa constante de 10,0 mT/s, qual é a taxa com a qual é gerada energia térmica na espira?

•30 Uma antena em forma de espira, com uma área de 2,00 cm² e uma resistência de 5,21 μΩ, é mantida perpendicular a um campo magnético uniforme de módulo 17,0 μT. O módulo do campo diminui para zero em 2,96 ms. Qual é a energia térmica produzida na espira pela variação do campo?

•31 Na Fig. 30-56 uma barra de metal é forçada a se mover com velocidade constante $\vec{v}$ ao longo de dois trilhos paralelos liga-

dos em uma das extremidades por uma fita de metal. Um campo magnético de módulo $B = 0{,}350$ T aponta para fora do papel. (a) Se a distância entre os trilhos é 25,0 cm e a velocidade escalar da barra é 55,0 cm/s, qual é o valor absoluto da força eletromotriz gerada? (b) Se a barra tem uma resistência de 18,0 Ω e a resistência dos trilhos e da fita de ligação é desprezível, qual é a corrente na barra? (c) Qual é a taxa com a qual a energia é transformada em energia térmica?

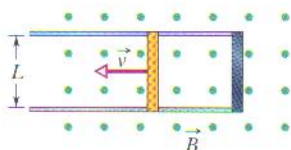



FIG. 30-56 Problema 31.

••32 Na Fig. 30-57 dois trilhos condutores retilíneos formam um ângulo reto. Uma barra condutora em contato com os trilhos parte do vértice no instante $t = 0$ com uma velocidade escalar constante de 5,20 m/s e passa a se mover entre os trilhos. Há um campo magnético $B = 0{,}350$ T, dirigido para fora da página, em toda a região. Determine (a) o fluxo magnético através do triângulo formado pelos trilhos e a barra no instante $t = 3{,}00$ s e (b) a força eletromotriz aplicada ao triângulo nesse instante. (c) Se a força eletromotriz é dada por $\mathscr{E} = at^n$, onde a e n são constantes, determine o valor de n.

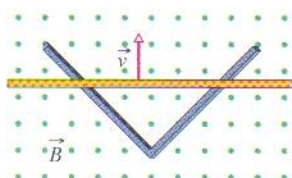



FIG. 30-57 Problema 32.

••33 A barra condutora da Fig. 30-56 tem comprimento L e está sendo puxada sobre trilhos horizontais condutores, sem atrito, com velocidade constante $\vec{v}$. Os trilhos estão ligados em uma das extremidades por uma fita condutora. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$, orientado para fora do papel, ocupa a região na qual se move a barra. Suponha que $L = 10$ cm, $v = 5{,}0$ m/s e $B = 1{,}2$ T. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força eletromotriz induzida na barra. Determine também (c) o valor absoluto e (d) o sentido da corrente na espira formada pela barra, os trilhos e a fita. Suponha que a resistência da barra é 0,40 Ω e que a resistência dos trilhos e da fita é desprezível. (e) Qual é a taxa com a qual a energia é dissipada na barra em forma de calor? (f) Qual é o módulo da força externa que deve ser aplicada à barra para que ela continue a se mover com velocidade v? (g) Qual é a taxa com a qual esta força executa trabalho sobre a barra?

••34 Na Fig. 30-58 uma espira retangular muito longa, de largura L, resistência R e massa m, está inicialmente suspensa na presença de um campo magnético horizontal uniforme $\vec{B}$ orientado para dentro do papel, que existe apenas acima da reta aa. Deixa-se cair a espira, que acelera sob a ação da gravidade até atingir uma certa velocidade terminal v_t. Escreva uma expressão para v_t, ignorando a resistência do ar.

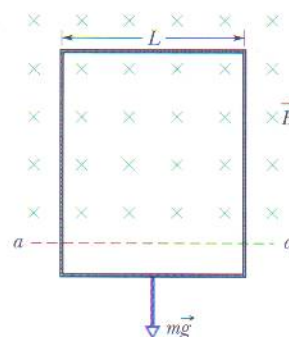



FIG. 30-58 Problema 34.

••35 A Fig. 30-59 mostra uma barra de comprimento $L = 10{,}0$ cm que é forçada a se mover com velocidade escalar constante $v = 5{,}00$ m/s ao longo de trilhos horizontais. A barra, os trilhos e a fita metálica na extremidade direita dos trilhos formam uma espira condutora. A barra tem uma resistência de 0,400 Ω; a resistência do resto da espira é desprezível. Uma corrente $i = 100$ A que percorre um fio longo situado a uma distância $a = 10{,}0$ mm da espira produz um campo magnético (não-uniforme) que atravessa a espira. Determine (a) a força eletromotriz e (b) a corrente induzida da espira. (c) Qual é a potência dissipada na espira? (d) Qual é o módulo da força que deve ser aplicada à espira para que se mova com velocidade constante? (e) Qual é a taxa com a qual essa força executa trabalho sobre a espira?

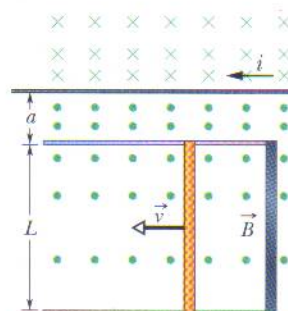



FIG. 30-59 Problema 35.

seção 30-6 Campos Elétricos Induzidos

•36 A Fig. 30-60 mostra duas regiões circulares, R_1 e R_2, de raios $r_1 = 20{,}0$ cm e $r_2 = 30{,}0$ cm. Em R_1 existe um campo magnético uniforme de módulo $B_1 = 50{,}0$ mT dirigido para dentro do papel, e em R_2 existe um campo magnético uniforme de módulo $B_2 = 75{,}0$ mT dirigido para fora do papel (ignore os efeitos de borda). Os dois campos estão diminuindo à taxa de 8,50 mT/s. Calcule o valor de $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (a) para a trajetória 1; (b) para a trajetória 2; (c) para a trajetória 3.

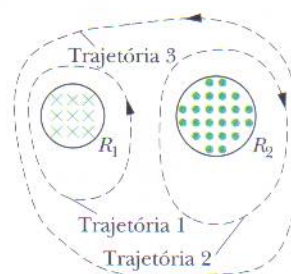



FIG. 30-60 Problema 36.

•37 Um solenóide longo tem um diâmetro de 12,0 cm. Quando o solenóide é percorrido por uma corrente i um campo magnético uniforme de módulo B = 30,0 mT é produzido no seu interior. Através de uma diminuição da corrente i o campo magnético é reduzido a uma taxa de 6,50 mT/s. Determine o módulo do campo elétrico induzido (a) a 2,20 cm e (b) a 8,20 cm de distância do eixo do solenóide.

••38 Uma região circular no plano xy é atravessada por um campo magnético uniforme orientado no sentido positivo do eixo z. O módulo B do campo (em teslas) aumenta com o tempo t (em segundos) de acordo com a equação $B = at$, onde a é uma constante. A Fig. 30-61 mostra o módulo E do campo elétrico criado por esse aumento do campo magnético em função da distância radial r; a escala do eixo vertical é definida por E_s = 300 μN/C, e a escala do eixo horizontal é definida por r_s = 4,00 cm. Determine o valor de a.

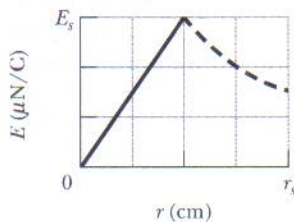



FIG. 30-61 Problema 38.

••39 O campo magnético de um ímã cilíndrico com 3,3 cm de diâmetro varia senoidalmente entre 29,6 T e 30,0 T com uma freqüência de 15 Hz. Qual é a amplitude do campo elétrico induzido por essa variação a uma distância de 1,6 cm do eixo do cilindro?

seção 30-7 Indutores e Indutância

•40 A indutância de uma bobina compacta de 400 espiras é 8,0 mH. Calcule o fluxo magnético através da bobina quando a corrente é 5,0 mA.

•41 Uma bobina circular tem 10,0 cm de raio e 30,0 espiras compactas. Um campo magnético externo de módulo 2,60 mT é aplicado perpendicularmente ao plano da bobina. (a) Se a corrente na bobina é zero, qual é o fluxo magnético que enlaça as espiras? (b) Quando a corrente na bobina é 3,80 A em um certo sentido, o fluxo magnético através da bobina é zero. Qual é a indutância da bobina?

••42 A Fig. 30-62 mostra uma fita de cobre de largura W = 16,0 cm que foi enrolada para formar um tubo de raio R = 1,8 cm com duas extensões planas. Uma corrente i = 35 mA está distribuída uniformemente na fita, fazendo com que o tubo se comporte como um solenóide de uma espira. Suponha que o campo magnético do lado de fora do tubo é desprezível e que o campo magnético no interior do tubo é uniforme. Determine (a) o módulo do campo magnético no interior do tubo; (b) a indutância do tubo (desprezando as extensões planas).

FIG. 30-62 Problema 42.

••43 Dois fios longos iguais, de raio a = 1,53 mm, são paralelos e conduzem correntes iguais em sentidos opostos. A distância entre os eixos centrais dos fios é d = 14,2 cm. Despreze o fluxo no interior dos fios, mas considere o fluxo na região entre os fios. Qual é a indutância dos fios por unidade de comprimento?

seção 30-8 Auto-indução

•44 Um indutor de 12 H conduz uma corrente de 2,0 A. Qual deve ser a taxa de variação da corrente para que a força eletromotriz induzida no indutor seja 60 V?

•45 Em um certo instante a corrente e a força eletromotriz auto-induzida em um indutor têm os sentidos indicados na Fig. 30-63. (a) A corrente está aumentando ou diminuindo? (b) A força eletromotriz induzida é 17 V e a taxa de variação da corrente é 25 kA/s; determine a indutância.

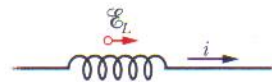



FIG. 30-63 Problema 45.

••46 A corrente i em um indutor de 4,6 H varia com o tempo t de acordo com o gráfico da Fig. 30-64, onde a escala do eixo vertical é definida por i_s = 8,0 A e a escala do eixo horizontal é definida por t_s = 6,0 ms. O indutor tem uma resistência de 12 Ω. Determine o módulo da força eletromotriz induzida $\mathscr{E}$ (a) para $0 < t < 2$ ms; (b) para 2 ms $< t <$ 5 ms; (c) para 5 ms $< t <$ 6 ms.

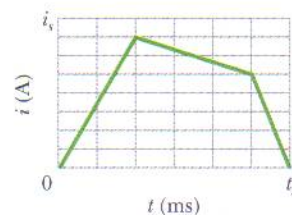



FIG. 30-64 Problema 46.

••47 *Indutores em série.* Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em série e estão separados por uma distância tão grande que o campo magnético de um não pode afetar o outro. (a) Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$L_{eq} = L_1 + L_2.$$

(*Sugestão:* Estude novamente as seções que tratam de resistores em série e capacitores em série. Qual é a situação mais semelhante ao caso atual?) (b) Qual é a generalização da expressão do item (a) para N indutores em série?

••48 *Indutores em paralelo.* Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em paralelo e estão separados por uma distância tão grande que o campo magnético de um não pode afetar o outro. (a) Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(*Sugestão:* Estude novamente as seções que tratam de resistores em série e capacitores em paralelo. Qual é a situação mais semelhante ao caso atual?) (b) Qual é a generalização da expressão do item (a) para N indutores em paralelo?

••49 O circuito de indutores da Fig. 30-65, com L_1 = 30,0 mH, L_2 = 50,0 mH, L_3 = 20,0 mH e L_4 = 15,0 mH, é ligado a uma fonte de corrente alternada. Qual é a indutância equivalente do circuito? (*Sugestão:* Veja os Problemas 47 e 48.)

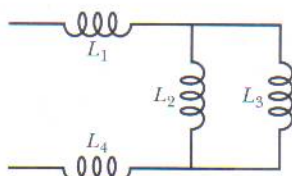



FIG. 30-65 Problema 49.

seção 30-9 Circuitos *RL*

•50 A chave da Fig. 30-20 é colocada na posição *a* no instante $t = 0$. Determine a razão $\mathscr{E}_L/\mathscr{E}$ entre a força eletromotriz auto-induzida no indutor e a força eletromotriz da fonte (a) logo após o instante $t = 0$; (b) no instante $t = 2{,}00\tau_L$. (c) Para que múltiplo de τ_L temos $\mathscr{E}_L/\mathscr{E} = 0{,}500$?

•51 Uma bateria é ligada a um circuito *RL* série no instante $t = 0$. Para que múltiplo de τ_L a corrente atinge um valor 0,100% menor que o valor final?

•52 A corrente em um circuito *RL* aumenta para um terço do valor final em 5,00 s. Determine a constante de tempo indutiva.

•53 A corrente em um circuito RL diminui de 1,0 A para 10 mA no primeiro segundo depois que a fonte é removida do circuito. Se $L = 10$ H, determine a resistência R do circuito.

•54 Na Fig. 30-66 o indutor tem 25 espiras e a fonte ideal tem uma força eletromotriz de 16 V. A Fig. 30-67 mostra o fluxo magnético Φ nas espiras do indutor em função da corrente *i*. A escala do eixo vertical é definida por $\Phi_s = 4{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{T \cdot m^2}$, e a escala do eixo horizontal é definida por $i_s = 2{,}00$ A. Se a chave S é fechada na instante $t = 0$, qual é a taxa de variação da corrente, di/dt, no instante $t = 1{,}5\tau_L$?

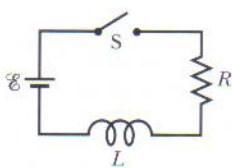



FIG. 30-66 Problemas 54, 83, 87, 94 e 99.

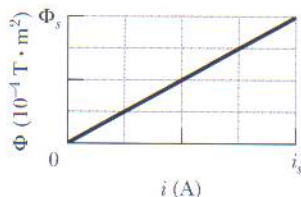



FIG. 30-67 Problema 54.

•55 Um solenóide com uma indutância de 6,30 μH é ligado em série com um resistor de 1,20 kΩ. (a) Se uma bateria de 14,0 V é ligada ao par de componentes, quanto tempo é necessário para que a corrente no resistor atinja 80,0% do valor final? (b) Qual é a corrente no resistor no instante $t = 1{,}0\tau_L$?

•56 Na Fig. 30-68 $\mathscr{E} = 100$ V, $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 20{,}0\ \Omega$, $R_3 = 30{,}0\ \Omega$ e $L = 2{,}00$ H. Determine os valores de (a) i_1 e (b) i_2 logo depois que a chave S é fechada. (Tome as correntes nos sentidos indicados na figura como sendo positivas, e as correntes no sentido oposto como sendo negativas.) Determine também os valores de (c) i_1 e (d) i_2 muito tempo depois de a chave ter sido fechada. A chave é aberta depois de ter permanecido fechada por muito tempo. Determine os valores de (e) i_1 e (f) i_2 logo depois de a chave ser novamente aberta. Determine também os valores de (g) i_1 e (h) i_2 muito tempo depois de a chave ser novamente aberta.

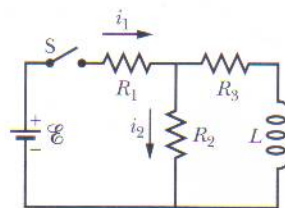



FIG. 30-68 Problema 56.

••57 Na Fig. 30-69 $R = 15\ \Omega$, $L = 5{,}0$ H, a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 10$ V e o fusível do ramo superior é um fusível ideal de 3,0 A. A resistência do fusível é zero enquanto a corrente que o atravessa permanece abaixo de 3,0 A. Quando atinge o valor de 3,0 A o fusível "queima" e passa a apresentar uma resistência infinita. A chave S é fechada no instante $t = 0$. (a) Em que instante o fusível queima? (*Sugestão:* A Eq. 30-41 não se aplica; use a Eq. 30-39.) (b) Faça um gráfico da corrente *i* no indutor em função do tempo e assinale o instante em que o fusível queima.

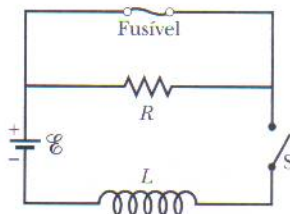



FIG. 30-69 Problema 57.

••58 A força eletromotriz da fonte do circuito da Fig. 30-21 varia com o tempo de tal forma que a corrente é dada por $i(t) = 3{,}0 + 5{,}0t$, onde *i* está em ampères e *t* em segundos. Suponha que $R = 4{,}0\ \Omega$ e $L = 6{,}0$ H e escreva uma expressão para a força eletromotriz da fonte em função de *t*. (*Sugestão:* Use a regra das malhas.)

•••59 Na Fig. 30-70, depois que a chave S é fechada no instante $t = 0$, a força eletromotriz da fonte é ajustada automaticamente para manter uma corrente constante *i* passando pela chave. (a) Determine a corrente no indutor em função do tempo. (b) Em que instante a corrente no resistor é igual à corrente no indutor?

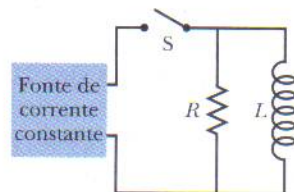



FIG. 30-70 Problema 59.

•••60 Um núcleo toroidal de madeira, de seção reta quadrada, possui um raio interno de 10 cm e um raio externo de 12 cm. Em torno desse núcleo é enrolada uma camada de espiras. O fio tem 1,0 mm de diâmetro e uma resistência de 0,020 Ω/m. Determine (a) a indutância; (b) a constante de tempo indutiva do conjunto. Ignore a espessura do isolamento do fio.

seção 30-10 Energia Armazenada em um Campo Magnético

•61 No instante $t = 0$ uma bateria é ligada em série a um resistor e a um indutor. Se a constante de tempo indutiva é 37,0 ms, em que instante a taxa com a qual a energia é dissipada no resistor é igual à taxa com a qual a energia é armazenada no campo magnético do indutor?

•62 No instante $t = 0$ uma bateria é ligada em série com um resistor e um indutor. Para que múltiplo da constante de tempo indutiva a energia armazenada no campo magnético do indutor é 0,500 vez o valor final?

•63 Uma bobina é ligada em série com um resistor de 10,0 kΩ. Uma fonte ideal de 50,0 V é ligada em série com os dois componentes e a corrente atinge um valor de 2,00 mA após 5,00 ms. (a) Determine a indutância da bobina. (b) Determine a energia armazenada na bobina nesse instante.

•64 Uma bobina com uma indutância de 2,0 H e uma resistência de 10 Ω são ligadas bruscamente a uma fonte ideal com $\mathscr{E}$ = 100 V. Um décimo de segundo após ser feita a ligação determine (a) a taxa com a qual a energia está sendo armazenada no campo magnético da bobina; (b) a potência dissipada na resistência; (c) a potência fornecida pela fonte.

••65 No circuito da Fig. 30-21, suponha que $\mathscr{E}$ = 10,0 V, R = 6,70 Ω e L = 5,50 H. A fonte ideal é ligada no instante $t = 0$. (a) Qual é a energia fornecida pela fonte durante os primeiros 2,00 s? (b) Qual é a energia armazenada no campo magnético do indutor nesse mesmo intervalo? (c) Qual é a energia dissipada no resistor nesse mesmo intervalo?

••66 A Fig. 30-71*a* mostra, em seção reta, dois fios retilíneos, paralelos e muito compridos. A razão i_1/i_2 entre a corrente no fio 1 e a corrente no fio 2 é 1/3. O fio 1 é mantido fixo no lugar. O fio 2 pode ser deslocado ao longo do semi-eixo x positivo, o que faz variar a densidade de energia magnética u_B criada pelas duas correntes na origem. A Fig. 30-71*b* mostra um gráfico de u_B em função da posição x do fio 2. A curva tem uma assíntota u_B = 1,96 nJ/m³ para $x \to \infty$ e a escala do eixo horizontal é definida por x_s = 60,0 cm. Determine os valores de (a) i_1 e (b) i_2.

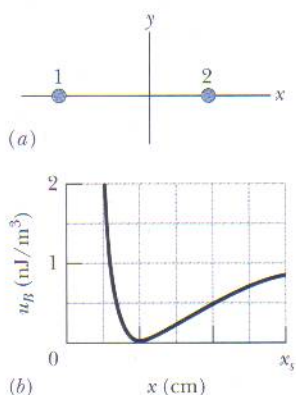



FIG. 30-71 Problema 66.

seção 30-11 Densidade de Energia de um Campo Magnético

•67 Qual deve ser o módulo de um campo elétrico uniforme para que possua a mesma densidade de energia que um campo magnético de 0,50 T?

•68 Um indutor toroidal com uma indutância de 90,0 mH envolve um volume de 0,0200 m³. Se a densidade de energia média no toróide é 70,0 J/m³, qual é a corrente no indutor?

•69 Um solenóide tem 85,0 cm de comprimento, uma seção reta de 17,0 cm², 950 espiras e é percorrido por uma corrente de 6,60 A. (a) Calcule a densidade de energia do campo magnético no interior do solenóide. (b) Determine a energia total armazenada no campo magnético, desprezando os efeitos de borda.

•70 Uma espira circular com 50 mm de raio conduz uma corrente de 100 A. Determine (a) a intensidade do campo magnético e (b) a densidade de energia no centro da espira.

••71 Um fio de cobre conduz uma corrente de 10 A uniformemente distribuída em sua seção reta. Calcule a densidade de energia (a) do campo magnético e (b) do campo elétrico na superfície do fio. O diâmetro do fio é 2,5 mm e a resistência é 3,3 Ω/km.

seção 30-12 Indução Mútua

•72 Dois solenóides fazem parte do circuito de ignição de um automóvel. Quando a corrente em um dos solenóides diminui de 6,0 A para zero em 2,5 ms uma força eletromotriz de 30 kV é induzida no outro solenóide. Qual é a indutância mútua M dos solenóides?

•73 Duas bobinas são mantidas fixas no espaço. Quando a corrente na bobina 1 é zero e a corrente na bobina 2 aumenta à taxa de 15,0 A/s a força eletromotriz na bobina 1 é 25,0 mV. (a) Qual é a indutância mútua das duas bobinas? (b) Quando a corrente na bobina 2 é zero e a corrente na bobina 1 é 3,60 A, qual é o enlaçamento de fluxo da bobina 2?

•74 A bobina 1 tem L_1 = 25 mH e N_1 = 100 espiras. A bobina 2 tem L_2 = 40 mH e N_2 = 200 espiras. As bobinas são mantidas fixas no espaço; a indutância mútua é 3,0 mH. Uma corrente de 6,0 mA na bobina 1 está variando à taxa de 4,0 A/s. Determine (a) o enlaçamento de fluxo magnético Φ_{12} da bobina 1; (b) a força eletromotriz auto-induzida na bobina 1; (c) o enlaçamento de fluxo magnético Φ_{21} na bobina 2; (d) a força eletromotriz auto-induzida na bobina 2.

••75 As duas bobinas da Fig. 30-72 têm indutâncias L_1 e L_2 quando estão muito afastadas. A indutância mútua é M. (a) Mostre que a combinação que aparece na figura pode ser substituída por uma indutância equivalente dada por

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M.$$

(b) De que forma as bobinas da Fig. 30-72 podem ser ligadas para que a indutância equivalente seja

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M?$$

(Este problema é uma extensão do Problema 47, na qual a condição de que as bobinas estejam muito afastadas foi suprimida.)

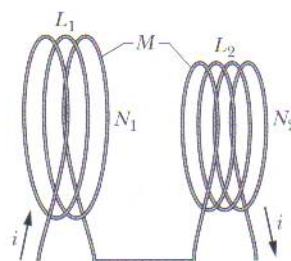



FIG. 30-72 Problema 75.

••76 Uma bobina C de N espiras envolve um solenóide longo S de raio R e n espiras por unidade de comprimento, como na Fig. 30-73. (a) Mostre que a indutância mútua da combinação bobina-solenóide é dada por $M = \mu_0 \pi R^2 nN$. (b) Explique por que M não depende da forma, do tamanho ou da possível falta de compactação da bobina.

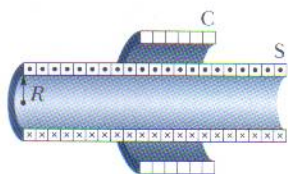



FIG. 30-73 Problema 76.

••**77** Uma bobina retangular com N espiras compactas é colocada nas proximidades de um fio retilíneo longo, como mostra a Fig. 30-74. Qual é a indutância mútua M da combinação fio-bobina para $N = 100$, $a = 1{,}0$ cm, $b = 8{,}0$ cm e $l = 30$ cm?

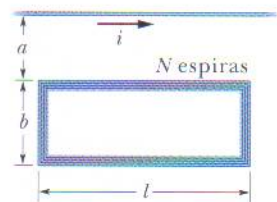



FIG. 30-74 Problema 77.

Problemas Adicionais

78 A Fig. 30-75a mostra duas regiões circulares concêntricas nas quais campos magnéticos uniformes podem variar. A região 1, com um raio $r_1 = 1{,}0$ cm, possui um campo magnético $\vec{B}_1$ dirigido para fora do papel cujo módulo está aumentando. A região 2, com um raio $r_2 = 2{,}0$ cm, possui um campo magnético $\vec{B}_2$ dirigido para fora do papel que também pode estar variando. Um anel condutor de raio R é colocado entre as duas regiões, e a força eletromotriz no anel é medida. A Fig. 30-75b mostra a força eletromotriz $\mathscr{E}$ em função do quadrado R^2 do raio do anel, entre o centro comum das regiões e a extremidade externa da região 2. A escala do eixo vertical é definida por $\mathscr{E}_s = 20{,}0$ nV. Determine os valores das taxas (a) dB_1/dt e (b) dB_2/dt. (c) O módulo de $\vec{B}_2$ está aumentando, diminuindo ou permanece constante?

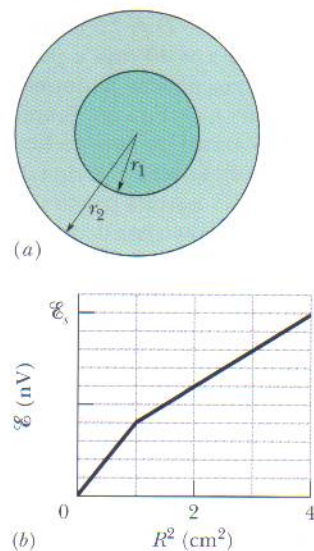



FIG. 30-75 Problema 78.

79 A Fig. 30-76 mostra um campo magnético uniforme $\vec{B}$ confinado a um volume cilíndrico de raio R. O módulo de $\vec{B}$ está diminuindo a uma taxa constante de 10 mT/s. Em termos dos vetores unitários, determine a aceleração inicial de um elétron liberado (a) no ponto a (a uma distância radial $r = 5{,}0$ cm); (b) no ponto b ($r = 0$); (c) no ponto c ($r = 5{,}0$ cm).

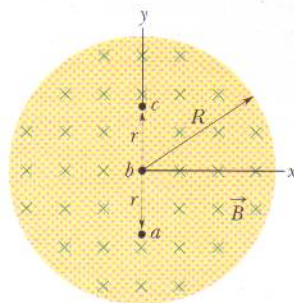



FIG. 30-76 Problema 79.

80 A indutância de uma bobina compacta é tal que uma força eletromotriz de 3,00 mV é induzida quando a corrente varia à taxa de 5,00 A/s. Uma corrente constante de 8,00 A produz um fluxo magnético de 40,0 μWb através das espiras da bobina. (a) Calcule a indutância da bobina. (b) Determine o número de espiras da bobina.

81 Uma espira quadrada com 20 cm de lado e uma resistência de 20 mΩ é mantida perpendicular a um campo magnético uniforme de módulo $B = 2{,}0$ T. Quando dois lados da espira são afastados um do outro os outros dois lados automaticamente se aproximam, reduzindo a área envolvida pela espira. Se a área se reduz a zero em um intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}20$ s, determine (a) a força eletromotriz média e (b) a corrente média induzida no circuito no intervalo de tempo Δt.

82 Uma espira quadrada é mantida em um campo magnético uniforme de 0,24 T perpendicular ao plano da espira. O comprimento dos lados do quadrado está diminuindo a uma taxa constante de 5,0 cm/s. Qual é a força eletromotriz induzida na espira quando o comprimento dos lados é 12 cm?

83 Na Fig. 30-66 uma fonte ideal de 12,0 V, um resistor de 20,0 Ω e um indutor são ligados por uma chave no instante $t = 0$. Qual é a taxa com a qual a fonte transfere energia para o campo magnético do indutor no instante $t = 1{,}61\tau_L$?

84 Quando tempo é necessário, depois que a fonte é removida, para que a diferença de potencial entre os terminais do resistor de um circuito RL com $L = 2{,}00$ H e $R = 3{,}00$ Ω diminua para 10,0% do valor inicial?

85 Na Fig. 30-77 a fonte é ideal, $\mathscr{E} = 10$ V, $R_1 = 5{,}0$ Ω, $R_2 = 10$ Ω e $L = 5{,}0$ H. A chave S é fechada no instante $t = 0$. Determine, logo depois do fechamento da chave, (a) i_1; (b) i_2; (c) a corrente i_S na chave; (d) a diferença de potencial V_2 entre os terminais do resistor 2; (e) a diferença de potencial V_L entre os terminais do indutor; (f) a taxa de variação di_2/dt. Determine também, muito tempo após o fechamento da chave, (g) i_1; (h) i_2; (i) i_S; (j) V_2; (k) V_L; (l) di_2/dt.

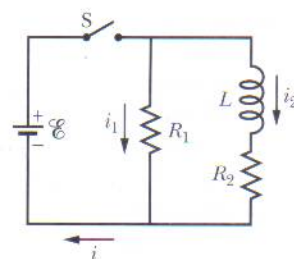



FIG. 30-77 Problema 85.

86 Na Fig. 30-78*a* a chave S permaneceu na posição *A* por um tempo suficiente para que a corrente no indutor de indutância $L_1 = 5{,}00$ mH e o resistor de resistência $R_1 = 25{,}0\ \Omega$ se estabilizassem. Da mesma forma, na Fig. 30-78*b* a chave S permaneceu na posição *A* por um tempo suficiente para que a corrente no indutor de indutância $L_2 = 3{,}00$ mH e o resistor de resistência $R_2 = 30{,}0\ \Omega$ se estabilizassem. A razão Φ_{02}/Φ_{01} entre o fluxo magnético através de uma das espiras do indutor 2 e o fluxo magnético através de uma das espiras do indutor 1 é 1,50. No instante $t = 0$ as duas chaves são deslocadas para a posição *B*. Em que instante de tempo os fluxos magnéticos através de uma espira dos dois indutores são iguais?

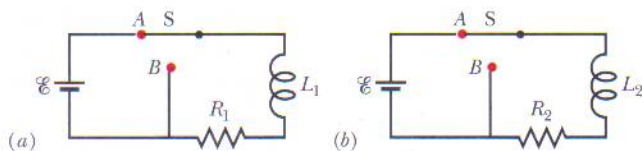



FIG. 30-78 Problema 86.

87 A chave S da Fig. 30-66 é fechada no instante $t = 0$, fazendo com que a corrente comece a aumentar no indutor de 15,0 mH e no resistor de 20,0 Ω. Em que instante a força eletromotriz entre os terminais do indutor é igual à diferença de potencial entre os terminais do resistor?

88 No instante $t = 0$ uma diferença de potencial de 12,0 V é aplicada bruscamente a uma bobina que possui uma indutância de 23,0 mH e uma resistência desconhecida *R*. No instante $t = 0{,}150$ ms a corrente na bobina está variando a uma taxa de 280 A/s. Determine o valor de *R*.

89 No instante $t = 0$ uma diferença de potencial de 45 V é aplicada bruscamente a uma bobina com uma indutância $L = 50$ mH e uma resistência $R = 180\ \Omega$. Com que taxa a corrente na bobina está aumentando no instante $t = 1{,}2$ ms?

90 Uma bobina com 150 espiras está submetida a um fluxo magnético de 50,0 nT · m² através de cada espira quando a corrente é 2,00 mA. (a) Qual é a indutância da bobina? Determine (b) a indutância e (c) o fluxo através de cada espira quando a corrente aumenta para 4,00 mA. (d) Qual é a força eletromotriz máxima $\mathscr{E}$ entre os terminais da bobina quando a corrente é dada por $i = (3{,}00 \text{ mA}) \cos(377t)$, com *t* em segundos?

91 Uma bobina com uma indutância de 2,0 H e uma resistência de 10 Ω é ligada bruscamente a uma fonte ideal com $\mathscr{E} = 100$ V. (a) Qual é a corrente final? (b) Qual é a energia armazenada no campo magnético quando a corrente do item (a) atravessa a bobina?

92 Um solenóide cilíndrico longo com 100 espiras/cm tem um raio de 1,6 cm. Suponha que o campo magnético produzido no interior do solenóide é uniforme e paralelo ao eixo do solenóide. (a) Qual é a indutância do solenóide por unidade de comprimento? (b) Se a corrente varia à taxa de 13 A/s, qual é a força eletromotriz induzida por metro?

93 Na Fig. 30-79 $R_1 = 8{,}0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L_1 = 0{,}30$ H, $L_2 = 0{,}20$ H e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 6{,}0$ V. (a) Logo depois que a chave S é fechada, qual é a taxa de variação da corrente no indutor 1? (b) Qual é a corrente no indutor 1 depois que o circuito atinge o regime estacionário?

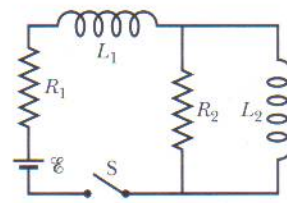



FIG. 30-79 Problema 93.

94 Na Fig. 30-66 $R = 4{,}0$ kΩ, $L = 8{,}0\ \mu$H e a força eletromotriz da fonte ideal é $\mathscr{E} = 20$ V. Quando tempo após a chave ser fechada a corrente atinge o valor de 2,0 mA?

95 No circuito da Fig. 30-81 $R_1 = 20$ kΩ, $R_2 = 20\ \Omega$, $L = 50$ mH e a fonte ideal tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 40$ V. A chave S permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada em $t = 0$. Logo depois que a chave é fechada, determine (a) a corrente no fonte i_{fonte}; (b) a taxa de variação da corrente na fonte di_{fonte}/dt. Para $t = 3{,}0\ \mu$s, determine (c) i_{fonte} e (d) di_{fonte}/dt. Muito depois de a chave ter sido fechada, determine (e) i_{fonte} e (f) di_{fonte}/dt.

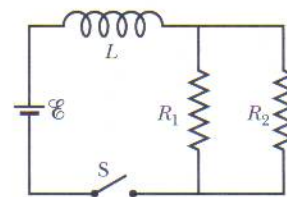



FIG. 30-80 Problema 95.

96 O enlaçamento de fluxo em uma certa bobina com uma resistência de 0,75 Ω é 26 mWb quando uma corrente de 5,5 A atravessa a bobina. (a) Calcule a indutância da bobina. (b) Se uma fonte ideal de 6,0 V é ligada bruscamente à bobina, quanto tempo é necessário para que a corrente aumente de 0 para 2,5 A?

97 A Fig. 30-81*a* mostra uma espira retangular de resistência $R = 0{,}020\ \Omega$, altura $H = 1{,}5$ cm e comprimento $D = 2{,}5$ cm que é puxada com velocidade escalar constante $v = 40$ cm/s e passa por duas regiões onde existem campos magnéticos uniformes. A Fig. 30-81*b* mostra a corrente *i* induzida na espira em função da posição *x* do lado direito da espira. A escala do eixo vertical é definida por $i_s = 3{,}0\ \mu$A. Assim, por exemplo, uma corrente de 3,0 μA no sentido horário é induzida quando a espira penetra na região 1. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora do papel) do campo magnético na região 1. Determine também (c) o módulo e (d) o sentido do campo magnético na região 2.

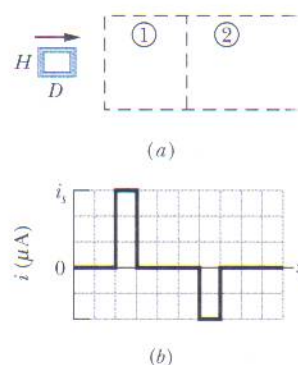



FIG. 30-81 Problema 97.

98 A energia potencial magnética armazenada em um certo indutor é 25,0 mJ quando a corrente no indutor é 60,0 mA. (a) Calcule a indutância. (b) Qual deve ser a corrente no indutor pra que a energia armazenada seja 100 mJ?

99 Depois que a chave S da Fig. 30-66 é fechada, o tempo necessário para que a corrente atinja um certo valor depende, entre outras coisas, do valor da resistência R. Suponha que a força eletromotriz $\mathscr{E}$ da fonte ideal é 12 V e que a indutância do indutor ideal (sem resistência) é 18 mH. Qual é o tempo necessário para que a corrente atinja o valor de 2,00 A se (a) $R = 1,00\ \Omega$; (b) $R = 5,00\ \Omega$; (c) $R = 6,00\ \Omega$? (d) Para que valor de R o tempo necessário para que a corrente atinja o valor de 2,00 A é o menor possível? (e) Qual é este tempo? (*Sugestão:* Use a Eq. 30-39.)

100 Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é perpendicular ao plano de uma espira circular de raio r. O módulo do campo varia com o tempo de acordo com a equação $B = B_0 e^{-t/\tau}$, onde B_0 e τ são constantes. Escreva uma expressão para a força eletromotriz na espira em função do tempo.

101 No circuito da Fig. 30-82 a fonte é ideal, $\mathscr{E} = 12,0$ V, $L = 10,0$ mH, $R_1 = 10,0\ \Omega$ e $R_2 = 20,0\ \Omega$. A chave permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Qual é a taxa de variação da corrente (a) logo depois que a chave é fechada e (b) quando a corrente na fonte é 0,50 A? (c) Qual é a corrente na fonte quando o circuito atinge o regime estacionário?

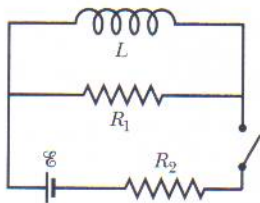



FIG. 30-82 Problema 101.

102 A Fig. 30-83 mostra uma bobina de N_2 espiras enrolada em parte de um toróide de N_1 espiras. O raio interno do toróide é a, o raio externo é b e a altura é h. Mostre que a indutância mútua M da combinação toróide-espira é dada por

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

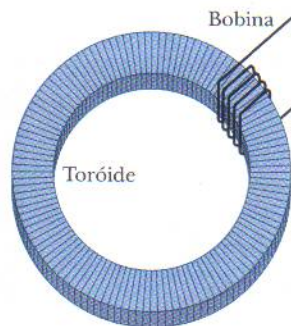
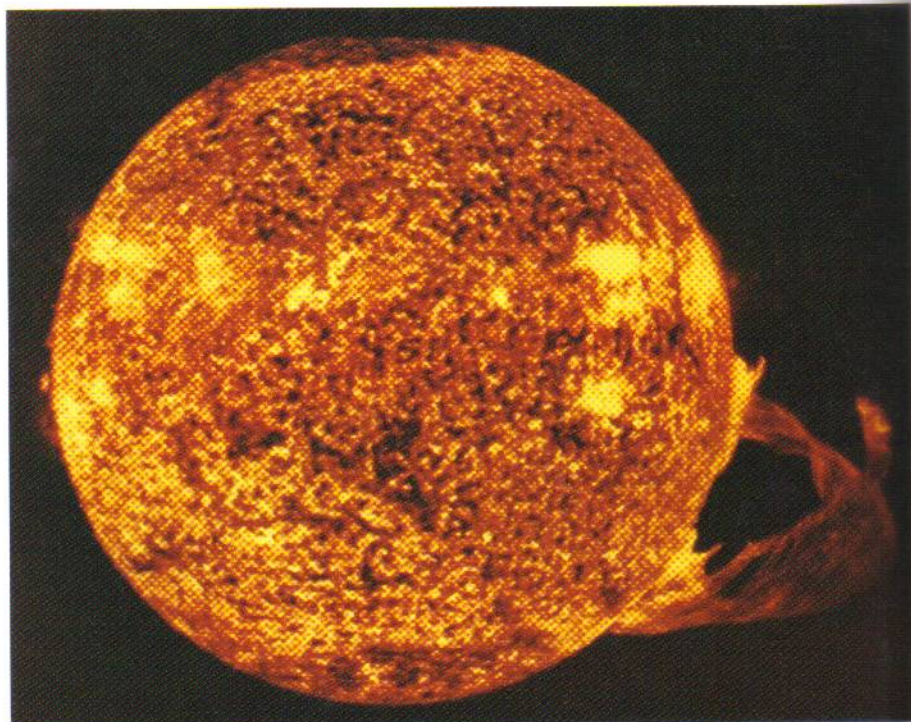



FIG. 30-83 Problema 102.

103 Uma espira circular, com 14 cm de raio, é submetida a um campo magnético uniforme que faz um ângulo de 30° com a normal ao plano da espira. O módulo do campo aumenta, a uma taxa constante, de 30 mT para 60 mT em 15 ms. Se a espira possui uma resistência de 5,0 Ω, qual é o valor absoluto da corrente induzida na espira quando o módulo do campo é 50 mT?

104 Uma bobina circular de 50 espiras e 15 cm de raio, com uma resistência total de 4,0 Ω, é submetida a um campo magnético uniforme perpendicular ao plano da espira. O módulo do campo varia com o tempo de acordo com a equação $B = A\ \mathrm{sen}(\omega t)$, onde $A = 80\ \mu$T e $\omega = 50\pi$ rad/s. Qual é o módulo da corrente induzida na bobina em $t = 20$ ms?

31 Oscilações Eletromagnéticas e Corrente Alternada

Cortesia da NASA/JSC

Às 2h45min de 13 de março de 1989 todo o sistema de distribuição de energia elétrica da província canadense de Quebec entrou em colapso, deixando milhões de pessoas sem energia na noite fria. Na verdade, muitos sistemas de distribuição do Hemisfério Norte tiveram problemas naquela noite, criando uma situação de pesadelo para os engenheiros de manutenção. A causa não foi um aumento súbito da demanda ou o envelhecimento dos equipamentos, mas uma explosão que havia ocorrido três dias antes na superfície do Sol.

Como pode uma explosão solar afetar um sistema de distribuição de energia elétrica na Terra?

A resposta está neste capítulo.

31-1 O QUE É FÍSICA?

Já discutimos a física básica dos campos elétricos e magnéticos e o modo como é possível armazenar energia em capacitores e indutores; vamos agora examinar a física aplicada associada, na qual a energia armazenada em um certo local pode ser transferida para outro local e utilizada. Assim, por exemplo, a energia produzida em uma usina de energia elétrica pode chegar até a casa do leitor e ser usada para alimentar um computador. O valor total dessa física aplicada é hoje em dia tão elevado que é quase impossível estimá-lo. Na verdade, a civilização moderna seria impossível sem essa física aplicada.

Em quase todo o mundo a energia elétrica é transferida, não como uma corrente contínua, mas como uma corrente que varia senoidalmente com o tempo (corrente alternada, ou ca). O desafio para os cientistas e engenheiros é projetar sistemas de ca que transfiram energia de forma eficiente e construir aparelhos capazes de utilizar essa energia.

Em nossa discussão de sistemas alternados deste capítulo nosso primeiro passo será examinar as oscilações em um circuito simples, constituído por uma indutância L e uma capacitância C.

31-2 | Oscilações em um Circuito *LC*: Análise Qualitativa

Dos três elementos básicos dos circuitos, resistência R, capacitância C e indutância L, discutimos até agora as combinações em série RC (Seção 27-9) e RL (Seção 30-9). Nesses dois tipos de circuito descobrimos que a carga, a corrente e a diferença de potencial crescem e decrescem exponencialmente. A escala de tempo do crescimento ou decaimento é dada por uma *constante de tempo* τ, que é capacitiva ou indutiva.

Vamos agora examinar a combinação de dois elementos que faltam, a combinação LC. Veremos que nesse caso a carga, a corrente e a diferença de potencial não decaem exponencialmente com o tempo, mas variam senoidalmente (com período T e freqüência angular ω). As oscilações resultantes do campo elétrico do capacitor e do campo magnético do indutor são chamadas de **oscilações eletromagnéticas**. Quando um circuito se comporta dessa forma dizemos que está oscilando.

As partes a a h da Fig. 31-1 mostram estágios sucessivos das oscilações em um circuito LC simples. De acordo com a Eq. 25-21, a energia armazenada no campo elétrico do capacitor em qualquer instante é dada por

$$U_E = \frac{q^2}{2C}, \tag{31-1}$$

onde q é a carga do capacitor nesse instante. De acordo com a Eq. 30-49, a energia armazenada no campo magnético do indutor em qualquer instante é dada por

$$U_B = \frac{Li^2}{2}, \tag{31-2}$$

onde i é a corrente no indutor nesse instante.

A partir de agora vamos adotar a convenção de representar os *valores instantâneos* das grandezas elétricas de um circuito por letras minúsculas, como q, e as *amplitudes* das mesmas grandezas por letras maiúsculas, como Q. Com esta convenção em mente vamos supor que inicialmente a carga q do capacitor da Fig. 31-1 seja o valor máximo Q, e a corrente i no indutor é zero. Esse estado inicial do circuito está representado na Fig. 31-1a. As barras que representam os níveis de energia mostram que, nesse instante, com corrente zero no indutor e carga máxima no capacitor a energia U_B do campo magnético é zero e a energia U_E do campo elétrico é máxima.

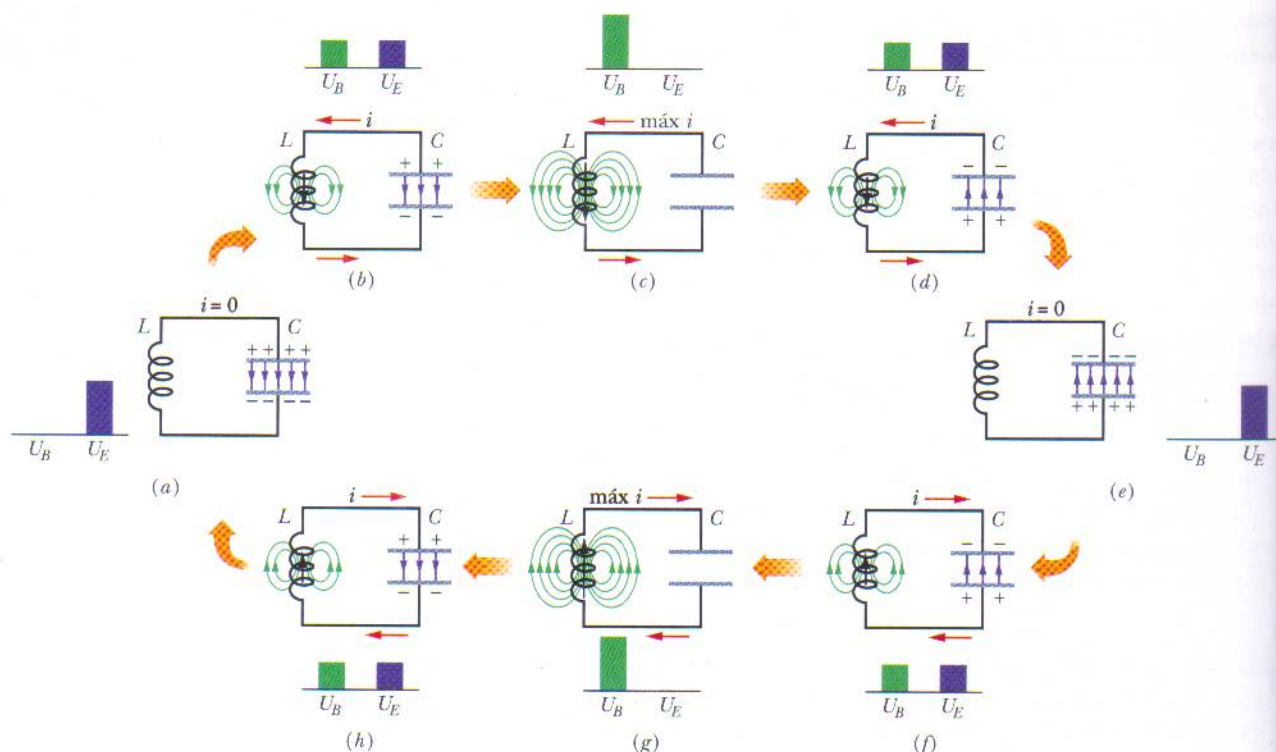



FIG. 31-1 Oito estágios em um ciclo de oscilação de um circuito LC sem resistência. Os histogramas mostram as energias armazenadas no campo magnético e no campo elétrico. Também são mostradas as linhas de campo magnético do indutor e as linhas de campo elétrico do capacitor. (*a*) O capacitor está totalmente carregado; a corrente é zero. (*b*) O capacitor está se descarregando; a corrente está aumentando. (*c*) O capacitor está totalmente descarregado; a corrente é máxima. (*d*) O capacitor está se carregando com a polaridade oposta à de (*a*); a corrente está diminuindo. (*e*) O capacitor está totalmente carregado com a polaridade oposta à de (*a*); a corrente é zero. (*f*) O capacitor está se descarregando; a corrente está aumentando no sentido oposto ao de (*b*). (*g*) O capacitor está totalmente descarregado; a corrente é máxima. (*h*) O capacitor está se carregando; a corrente está diminuindo.

Com o passar do tempo o capacitor se descarrega através do indutor, com as cargas positivas se movendo no sentido anti-horário, como mostra a Fig. 31-1*b*. Isso significa que uma corrente i, dada por dq/dt e com o sentido de cima para baixo no indutor, começa a circular. Com a diminuição da carga do capacitor a energia armazenada no campo elétrico do capacitor também diminui. Essa energia é transferida para o campo magnético que aparece em torno do indutor por causa da existência da corrente i. Assim, o campo elétrico diminui e o campo magnético aumenta enquanto a energia é transferida do campo elétrico para o campo magnético.

Depois de algum tempo o capacitor perde toda a carga (Fig. 31-1*c*) e, portanto, o campo elétrico e a energia armazenada no campo elétrico se anulam. Nesse instante toda a energia foi transferida para o campo magnético do indutor. O campo magnético está, portanto, com seu valor máximo, e a corrente no indutor é a corrente máxima I.

Embora a carga do capacitor seja zero nesse instante a corrente no sentido anti-horário continua a existir, já que o indutor não permite que a corrente diminua instantaneamente para zero. A corrente continua a transferir cargas positivas da placa de cima para a placa de baixo do capacitor através do circuito (Fig. 31-1*d*). Assim, parte da energia que estava armazenada no indutor é usada para acumular cargas no capacitor. A corrente no indutor diminui gradualmente durante esse processo. No instante em que finalmente toda a energia é transferida de volta para o capacitor (Fig. 31-1*e*) a corrente no indutor se anula momentaneamente. A situação da Fig. 31-1*e* é idêntica à da Fig. 31-1*a*, exceto pelo fato de que o capacitor agora está carregado com a polaridade oposta.

Em seguida, o capacitor volta a se descarregar, mas agora a corrente tem o sentido horário (Fig. 31-1*f*). Raciocinando como antes, vemos que a corrente passa por um máximo (Fig. 31-1*g*), e depois diminui (Fig. 31-1*h*) até que o circuito volta à situação inicial (Fig. 31-1*a*). O processo se repete com uma freqüência f e, portanto, com uma freqüência angular $\omega = 2\pi f$. Em um circuito LC ideal, em que não existe resistência, toda a energia do campo elétrico do capacitor é transferida para a energia do campo magnético do indutor e vice-versa. Por causa da lei de conservação da energia as oscilações continuam indefinidamente. As oscilações não precisam começar com toda a energia no campo elétrico; a situação inicial poderia ser qualquer outro estágio da oscilação.

FIG. 31-2 (*a*) A diferença de potencial entre os terminais do capacitor da Fig. 31-1 em função do tempo. Esta grandeza é proporcional à carga do capacitor. (*b*) Um potencial proporcional à corrente no circuito da Fig. 31-1. As letras se referem aos diferentes estágios de oscilação da Fig. 31-1.

Para determinar a carga q do capacitor em função do tempo podemos usar um voltímetro para medir a diferença de potencial (ou *tensão*) v_C entre as placas do capacitor C. De acordo com a Eq. 25-1, temos:

$$v_C = \left(\frac{1}{C}\right)q,$$

o que nos permite calcular o valor de q. Para medir a corrente podemos ligar um pequeno resistor R em série com o capacitor e o indutor e medir a diferença de potencial v_R entre os terminais do resistor; v_R é proporcional a i através da relação

$$v_R = iR.$$

Estamos supondo que R é tão pequeno que seu efeito sobre o comportamento do circuito pode ser desprezado. A variação com o tempo de v_C e v_R e, portanto, de q e i aparece na Fig. 31-2. As quatro grandezas variam de forma senoidal.

Em um circuito LC real as oscilações não continuam indefinidamente, porque existe sempre alguma resistência presente que retira energia dos campos elétrico e magnético e a dissipa na forma de energia térmica (o circuito pode se aquecer). Isso significa que a amplitude das oscilações diminui com o tempo, como mostra a Fig. 31-3. Compare esta figura com a Fig. 15-16, que mostra o decaimento das oscilações mecânicas causado pelo atrito em um sistema bloco–mola.

TESTE 1 Um capacitor carregado e um indutor são ligados em série no instante $t = 0$. Em termos do período T das oscilações resultantes, determine o tempo necessário para que as seguintes grandezas atinjam o valor máximo: (a) a carga do capacitor; (b) a tensão do capacitor, com a polaridade inicial; (c) a energia armazenada no campo elétrico; (d) a corrente no circuito.

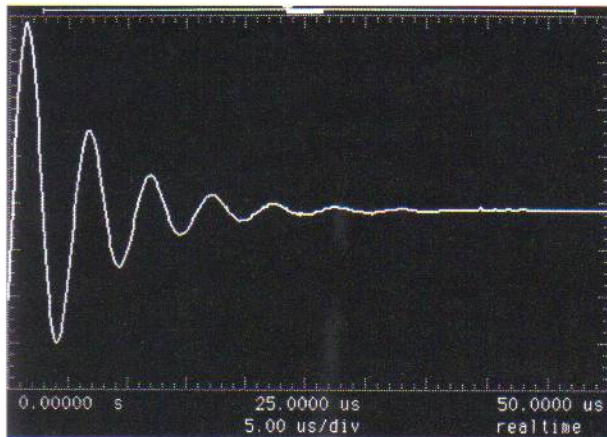



FIG. 31-3 Imagem na tela de um osciloscópio mostrando o amortecimento das oscilações em um circuito RLC por causa da dissipação de energia no resistor. *(Cortesia de Agilent Technologies)*

Exemplo 31-1

Um capacitor de 1,5 μF é carregado com 57 V. A fonte usada para carregar o capacitor é desligada, e um indutor de 12 mH é ligado entre os terminais do capacitor, formando um circuito LC, que começa a oscilar. Qual é a corrente máxima no indutor? Suponha que a resistência do circuito seja desprezível.

IDÉIAS-CHAVE

1. Como a resistência é desprezível, a energia eletromagnética do circuito é conservada enquanto a energia é transferida do campo elétrico do capacitor para o campo magnético do indutor e vice-versa.
2. Em qualquer instante t a energia $U_B(t)$ do campo magnético está relacionada à corrente $i(t)$ no indutor através da Eq. 31-2 ($U_B = Li^2/2$). Quando toda a energia está armazenada no campo magnético do indutor a corrente tem o valor máximo I e a energia do campo magnético é $U_{B,\text{máx}} = LI^2/2$.
3. Em qualquer instante t a energia $U_E(t)$ do campo elétrico está relacionada à carga $q(t)$ do capacitor através da Eq. 31-1 ($U_E = q^2/2C$). Quando toda a energia está armazenada no campo elétrico do capacitor a carga tem o valor máximo Q e a energia do campo elétrico é $U_{E,\text{máx}} = Q^2/2C$.

Cálculos: Com essas idéias podemos escrever a lei de conservação da energia na forma

$$U_{B,\text{máx}} = U_{E,\text{máx}}$$

ou

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Explicitando I, temos:

$$I = \sqrt{\frac{Q^2}{LC}}.$$

Conhecemos L e C, mas não Q. Entretanto, usando a Eq. 25-1 ($q = CV$) podemos relacionar Q à diferença de potencial máxima entre os terminais do capacitor, que é a diferença de potencial inicial de 57 V. Assim, substituindo Q por CV, obtemos:

$$I = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\text{ V})\sqrt{\frac{1{,}5 \times 10^{-6}\text{ F}}{12 \times 10^{-3}\text{ H}}}$$
$$= 0{,}637\text{ A} \approx 640\text{ mA}. \quad \text{(Resposta)}$$

31-3 | Analogia Eletromecânica

Vamos examinar mais de perto a analogia entre o sistema LC oscilante da Fig. 31-1 e um sistema oscilante bloco–mola. No caso do sistema bloco–mola existem dois tipos de energia envolvidos. O primeiro é a energia potencial da mola distendida ou comprimida; o segundo é a energia cinética do bloco em movimento. As duas energias são dadas pelas expressões que aparecem na coluna de energia da esquerda da Tabela 31-1.

A tabela também mostra, na coluna de energia da direita, os dois tipos de energia envolvidos nas oscilações LC. As linhas horizontais da tabela revelam uma analogia entre as formas dos dois pares de energias: as energias mecânicas do sistema bloco–mola e as energias eletromagnéticas do sistema indutor–capacitor. As equações para v e i que aparecem na última linha da tabela ajudam a completar a analogia. Elas mostram que q corresponde a x e i corresponde a v (nas duas equações, a segunda variável é a derivada da primeira). Essas correspondências sugerem, portanto, que nas expressões da energia $1/C$ corresponde a k e L corresponde a m. Assim,

q corresponde a x, $1/C$ corresponde a k,

i corresponde a v e L corresponde a m.

Essas correspondências sugerem que, em um oscilador LC, o capacitor se comporta matematicamente como a mola de um sistema bloco–mola e o indutor se comporta como o bloco.

TABELA 31-1

Comparação das Energias em Dois Sistemas Oscilantes

Sistema Bloco–mola		Oscilador LC	
Elemento	Energia	Elemento	Energia
Mola	Potencial, $kx^2/2$	Capacitor	Elétrica, $(1/C)q^2/2$
Bloco	Cinética, $mv^2/2$	Indutor	Magnética, $Li^2/2$
$v = dx/dt$		$i = dq/dt$	

Vimos na Seção 15-3 que a freqüência angular de oscilação de um sistema bloco–mola sem atrito é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(sistema bloco–mola).} \tag{31-3}$$

As correspondências significam que para determinar a freqüência angular de oscilação de um circuito LC ideal (sem resistência) k deve ser substituído por $1/C$ e m por L, o que nos dá

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(circuito } LC\text{).} \tag{31-4}$$

Vamos demonstrar esse resultado na próxima seção.

31-4 | Oscilações em um Circuito *LC*: Análise Quantitativa

Vamos agora mostrar explicitamente que a Eq. 31-4 pode ser usada para calcular a freqüência angular das oscilações em um circuito LC. Ao mesmo tempo, examinaremos mais de perto a analogia entre as oscilações de um circuito LC e de um sistema bloco–mola. Comecemos por estender um pouco nosso tratamento anterior do oscilador mecânico bloco–mola.

O Oscilador Bloco–Mola

Analisamos as oscilações do sistema bloco–mola no Capítulo 15 em termos da transferência de energia, mas não chegamos a escrever a equação diferencial que governa essas oscilações; é o que vamos fazer agora.

A energia total U de um oscilador bloco–mola é dada, em qualquer instante de tempo, pela equação

$$U = U_b + U_s = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2, \tag{31-5}$$

onde U_b e U_m são, respectivamente, a energia cinética do bloco e a energia potencial da mola. Se o atrito é desprezível a energia total U não varia com o tempo, ou seja, $dU/dt = 0$. Assim, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0. \tag{31-6}$$

Entretanto, $v = dx/dt$ e $dv/dt = d^2x/dt^2$. Com essas substituições a Eq. 31-6 se torna

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{(oscilações bloco–mola).} \tag{31-7}$$

A Eq. 31-7 é a *equação diferencial* a que obedecem as oscilações massa–mola sem atrito.

A solução geral da Eq. 31-7, ou seja, a função $x(t)$ que descreve as oscilações, é (como vimos na Eq. 15-3),

$$x = X\cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento),} \tag{31-8}$$

onde X é a amplitude das oscilações mecânicas (representada por x_m no Capítulo 15), ω é a freqüência angular das oscilações e ϕ é uma constante de fase.

O Oscilador LC

Vamos agora analisar as oscilações de um circuito LC sem resistência, procedendo exatamente como fizemos no caso do oscilador bloco–mola. A energia total U pre-

sente em qualquer instante em um circuito LC oscilante é dada por

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \tag{31-9}$$

onde U_B é a energia armazenada no campo magnético do indutor e U_E é a energia armazenada no campo elétrico do capacitor. Como supusemos que a resistência do circuito é zero, nenhuma energia é transformada em energia térmica e U permanece constante, ou seja, $dU/dt = 0$. Assim, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{31-10}$$

Entretanto, $i = dq/dt$ e $di/dt = d^2q/dt^2$. Com essas substituições, a Eq. 31-10 se torna

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(circuito } LC\text{)}. \tag{31-11}$$

Esta é a *equação diferencial* que descreve as oscilações em um circuito LC sem resistência. As Eqs. 31-11 e 31-7 têm exatamente a mesma forma matemática.

Oscilações de Carga e de Corrente

Como as equações diferenciais são matematicamente idênticas, as soluções também devem ser matematicamente idênticas. Como q corresponde a x, podemos escrever a solução geral da Eq. 31-11, por analogia com a Eq. 31-8, como

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \quad \text{(carga)}, \tag{31-12}$$

onde Q é a amplitude das variações de carga, ω é a freqüência angular das oscilações eletromagnéticas e ϕ é a constante de fase.

Tomando a derivada primeira da Eq. 31-12 em relação ao tempo, obtemos a corrente em um oscilador LC:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(corrente)}. \tag{31-13}$$

A amplitude I dessa corrente senoidal é

$$I = \omega Q, \tag{31-14}$$

e assim podemos reescrever a Eq. 31-13 na forma

$$i = -I\,\text{sen}(\omega t + \phi). \tag{31-15}$$

Freqüências Angulares

Podemos confirmar que a Eq. 31-12 é uma solução da Eq. 31-11 substituindo a Eq. 31-12 e sua derivada segunda em relação ao tempo na Eq. 31-11. A derivada primeira da Eq. 31-12 é a Eq. 31-13. A derivada segunda é, portanto,

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 Q\cos(\omega t + \phi).$$

Substituindo q e d^2q/dt^2 por seus valores na Eq. 31-11, obtemos

$$-L\omega^2 Q\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}Q\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Cancelando o fator $Q\cos(\omega t + \phi)$ e reagrupando os termos, obtemos

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Assim, a Eq. 31-12 é realmente uma solução da Eq. 31-11 se $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Observe que a expressão de ω é a mesma da Eq. 31-4, à qual chegamos usando correspondências.

A constante de fase ϕ da Eq. 31-12 é determinada pelas condições que existem em um certo instante, como $t = 0$, por exemplo. De acordo com a Eq. 31-12, se $\phi = 0$ no instante $t = 0$, $q = Q$ e, de acordo com a Eq. 31-13, $i = 0$. Estas são as condições representadas na Fig. 31-1*a*.

FIG. 31-4 Energia magnética e energia elétrica armazenadas no circuito da Fig. 31-1 em função do tempo. Observe que a soma das duas energias é constante. T é o período das oscilações.

Oscilações da Energia Elétrica e Magnética

De acordo com as Eqs. 31-1 e 31-12, a energia elétrica armazenada no circuito LC em qualquer instante de tempo t é dada por

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi). \tag{31-16}$$

De acordo com as Eqs. 31-2 e 31-13, a energia magnética armazenada é dada por

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2Q^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi).$$

Substituindo ω por seu valor, dado pela Eq. 31-4, temos:

$$U_B = \frac{Q^2}{2C}\,\text{sen}^2(\omega t + \phi). \tag{31-17}$$

A Fig. 31-4 mostra os gráficos de $U_E(t)$ e $U_B(t)$ para o caso de $\phi = 0$. Observe que

1. O valor máximo tanto de $U_E(t)$ como de $U_B(t)$ é $Q^2/2C$.
2. Em qualquer instante a soma de $U_E(t)$ e $U_B(t)$ também é $Q^2/2C$.
3. Quando $U_E(t)$ é máximo, $U_B(t)$ é mínimo, e vice-versa.

TESTE 2 Um capacitor em um circuito LC tem uma diferença de potencial máxima de 17 V e uma energia máxima de 160 μJ. Quando o capacitor tem uma diferença de potencial de 5 V e uma energia de 10 μJ, quais são (a) a força eletromotriz entre os terminais do indutor e (b) a energia armazenada no campo magnético?

Exemplo 31-2

Na situação descrita no Exemplo 31-1, suponha que o indutor seja ligado ao capacitor no instante $t = 0$. O resultado é um circuito LC como o da Fig. 31-1.

(a) Qual é a diferença de potencial $v_L(t)$ entre os terminais do indutor em função do tempo?

IDÉIAS-CHAVE (1) A corrente e as diferenças de potencial do circuito variam de forma senoidal. (2) Podemos aplicar a um circuito oscilante a mesma regra das malhas que aplicamos a circuitos não-oscilantes no Capítulo 27.

Cálculos: Aplicando a regra das malhas ao circuito da Fig. 31-1 temos, para qualquer instante de tempo,

$$v_L(t) = v_C(t); \tag{31-18}$$

ou seja, como a diferença de potencial ao longo de todo o circuito é zero, a diferença de potencial v_L no indutor é sempre igual à diferença de potencial v_C no capacitor. Assim, podemos calcular $v_L(t)$ a partir de $v_C(t)$ e calcular $v_C(t)$ a partir de $q(t)$ usando a Eq. 25-1 ($q = CV$).

Como a diferença de potencial $v_C(t)$ é máxima no instante $t = 0$ em que as oscilações começam, a carga q do capacitor também deve ser máxima nesse instante. Assim, a constante de fase ϕ é zero e a Eq. 31-12 nos dá

$$q = Q\cos\omega t. \tag{31-19}$$

(Observe que a função co-seno realmente passa por um máximo (= 1) para $t = 0$, o que nos dá $q = Q$.) Para calcular a diferença de potencial $v_C(t)$ dividimos ambos os membros da Eq. 31-19 por C para obter

$$\frac{q}{C} = \frac{Q}{C}\cos\omega t,$$

e usamos a Eq. 25-1 para escrever

$$v_C = V_C \cos\omega t, \qquad (31\text{-}20)$$

onde V_C é a amplitude das oscilações da diferença de potencial v_C no capacitor.

De acordo com a Eq. 31-18, $v_C = v_L$ e, portanto,

$$v_L = V_C \cos\omega t. \qquad (31\text{-}21)$$

Podemos calcular o lado direito dessa equação observando que a amplitude V_C é igual à diferença de potencial inicial (máxima) de 57 V entre os terminais do capacitor. Em seguida, usamos a Eq. 31-4 e os valores de L e C do Exemplo 31-1 para calcular ω:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(0{,}012\ \text{H})(1{,}5\times 10^{-6}\ \text{F})]^{0{,}5}}$$

$$= 7454\ \text{rad/s} \approx 7500\ \text{rad/s}.$$

Assim, a Eq. 31-21 se torna

$$v_L = (57\ \text{V})\cos(7500\ \text{rad/s})t. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a máxima taxa de variação $(di/dt)_{\text{máx}}$ da corrente no circuito?

IDÉIA-CHAVE Com a carga do capacitor oscilando de acordo com a Eq. 31-12, a corrente tem a forma da Eq. 31-13. Como $\phi = 0$, esta equação nos dá

$$i = -\omega Q \operatorname{sen} \omega t.$$

Cálculos: Derivando a equação, obtemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega Q \operatorname{sen}\omega t) = -\omega^2 Q \cos\omega t.$$

Podemos simplificar essa equação substituindo Q por CV_C (já que conhecemos C e V_C, mas não conhecemos Q) e substituindo ω por $1/\sqrt{LC}$, de acordo com a Eq. 31-4. O resultado é o seguinte:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}CV_C\cos\omega t = -\frac{V_C}{L}\cos\omega t.$$

Isso significa que a taxa de variação da corrente varia senoidalmente, e seu valor máximo é

$$\frac{V_C}{L} = \frac{57\ \text{V}}{0{,}012\ \text{H}} = 4750\ \text{A/s} \approx 4800\ \text{A/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

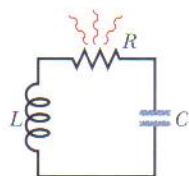



FIG. 31-5 Circuito RLC série. Enquanto a carga contida no circuito oscila entre o indutor e o capacitor, parte da energia do circuito é dissipada no resistor, o que reduz progressivamente a amplitude das oscilações.

31-5 | Oscilações Amortecidas em um Circuito *RLC*

Um circuito formado por uma resistência, uma indutância e uma capacitância é chamado de *circuito RLC*. Vamos discutir apenas o caso dos *circuitos RLC série*, como o da Fig. 31-5. Com uma resistência R presente, a *energia eletromagnética* total U do circuito (a soma da energia elétrica e da energia magnética) não é mais constante, mas diminui com o tempo, pois parte da energia é dissipada como energia térmica na resistência. Por causa dessa perda de energia as oscilações de carga, corrente e diferença de potencial diminuem continuamente de amplitude, e dizemos que as oscilações são *amortecidas*. Como vamos ver, esse amortecimento é análogo ao do oscilador bloco–mola amortecido da Seção 15-8.

Para analisar as oscilações do circuito necessitamos de uma equação que nos forneça a energia eletromagnética total U no circuito em função do tempo. Como a resistência não armazena energia eletromagnética, podemos usar a Eq. 31-9 para escrever a energia total da seguinte forma:

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (31\text{-}22)$$

No caso que estamos examinando a energia total diminui com o tempo, já que parte da energia se transforma em energia térmica. De acordo com a Eq. 26-27, a taxa com a qual esta transformação ocorre é dada por

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R, \qquad (31\text{-}23)$$

onde o sinal negativo indica que U diminui com o tempo. Derivando a Eq. 31-22 em relação ao tempo e substituindo o resultado na Eq. 31-23, obtemos:

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2R.$$

Substituindo i por dq/dt e di/dt por d^2q/dt^2, temos:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(circuito } RLC\text{)}, \tag{31-24}$$

que é a equação diferencial para oscilações amortecidas em um circuito *RLC*.

A solução da Eq. 31-24 é a seguinte:

$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi), \tag{31-25}$$

com

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}, \tag{31-26}$$

onde $\omega = 1/\sqrt{LC})$ como no caso de um oscilador não-amortecido. A Eq. 31-25 mostra de que forma a carga do capacitor varia em um circuito *RLC*; esta equação é análoga à Eq. 15-42, que descreve o deslocamento de um oscilador bloco–mola amortecido.

A Eq. 31-25 descreve uma oscilação senoidal (a função co-seno) com uma *amplitude exponencialmente decrescente* $Qe^{-Rt/2L}$ (o fator que multiplica o co-seno). A freqüência angular ω' das oscilações amortecidas é sempre menor que a freqüência angular das oscilações não-amortecidas; entretanto, vamos considerar apenas situações nas quais a resistência R é suficientemente pequena para que ω' possa ser substituída por ω.

Vamos agora escrever uma expressão para a energia eletromagnética total U do circuito em função do tempo. Para isso basta calcular a energia armazenada no campo elétrico do capacitor, que é dada pela Eq. 31-1 ($U_E = q^2/2C$), já que a amplitude é a mesma para as energias U_E e U_B. Substituindo a Eq. 31-25 na Eq. 31-1, obtemos

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{[Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi)]^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}e^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t + \phi). \tag{31-27}$$

Assim, a energia do campo elétrico oscila de acordo com um termo proporcional ao quadrado do co-seno, enquanto a amplitude das oscilações diminui exponencialmente com o tempo.

Exemplo 31-3

Um circuito *RLC* série tem um indutância L = 12 mH, uma capacitância C = 1,6 μF e uma resistência R = 1,5 Ω.

(a) Em que instante t a amplitude das oscilações da carga do circuito é 50% do valor inicial?

IDÉIA-CHAVE A amplitude das oscilações da carga diminui exponencialmente com o tempo t. De acordo com a Eq. 31-25 a amplitude das oscilações de carga em qualquer instante t é dada por $Qe^{-t/2L}$, onde Q é a amplitude no instante $t = 0$.

Cálculos: Estamos interessados em determinar o instante no qual a amplitude das oscilações da carga é 0,50Q, isto é, o instante em que

$$Qe^{-Rt/2L} = 0{,}50Q.$$

Cancelando Q e tomando o logaritmo natural de ambos os membros, temos:

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}50.$$

Explicitando t e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}50 = -\frac{(2)(12\times10^{-3}\text{ H})(\ln 0{,}50)}{1{,}5\ \Omega}$$

$$= 0{,}0111 \text{ s} \approx 11 \text{ ms}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Quantas oscilações o circuito executou até esse instante?

IDÉIA-CHAVE O tempo necessário para completar uma oscilação é o período $T = 2\pi/\omega$, onde a freqüência angular das oscilações é dada pela Eq. 31-4 ($\omega = 1/\sqrt{LC}$).

Cálculo: No intervalo de tempo Δt = 0,0111 s o número de oscilações completas é

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$= \frac{0{,}0111 \text{ s}}{2\pi[(12 \times 10^{-3} \text{ H})(1{,}6 \times 10^{-6} \text{ F})]^{1/2}} \approx 13.$$
(Resposta)

Assim, a amplitude decai 50% em cerca de 13 oscilações. Esse amortecimento é bem mais lento que o representado na Fig. 31-3, onde a amplitude diminui mais de 50% em apenas uma oscilação.

31-6 | Corrente Alternada

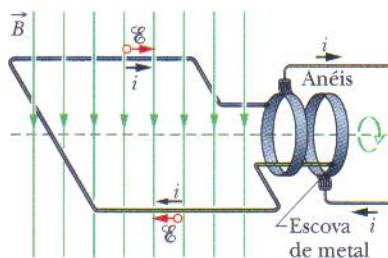



FIG. 31-6 Nos geradores de corrente alternada uma espira condutora é forçada a girar na presença do campo magnético externo. Na prática, a força eletromotriz induzida em uma bobina com muitas espiras é colhida por escovas que se apóiam em anéis rotativos solidários com a espira. Cada anel está ligado a uma extremidade da bobina e faz contato com o resto do circuito do gerador através de uma das escovas.

As oscilações de um circuito RLC não são amortecidas se uma fonte de tensão externa fornece energia suficiente para compensar a energia dissipada na resistência R. Os aparelhos elétricos usados nas resistências, escritórios e fábricas contêm um número muito grande de circuitos RLC, que são alimentados pela rede de distribuição de energia elétrica. Na grande maioria dos casos a energia é fornecida na forma de correntes e tensões senoidais, sistema que é conhecido como **corrente alternada**, ou **ca**. (No caso das correntes e tensões que não variam com o tempo, como as fornecidas por uma bateria, o sistema é conhecido como **corrente contínua**, ou **cc**.) No sistema de corrente alternada usado no Brasil a tensão e a corrente mudam de polaridade 120 vezes por segundo e, portanto, têm uma freqüência f = 60 Hz.

À primeira vista, esta pode parecer uma forma estranha de fornecer energia a um circuito. Vimos que a velocidade de deriva dos elétrons de condução em um fio comum é da ordem de 4×10^{-5} m/s. Se o sentido de movimento dos elétrons se inverte a cada 1/120 s os elétrons se deslocam apenas cerca de 3×10^{-7} m a cada meio ciclo. Assim, em média, um elétron passa apenas por 10 átomos da rede cristalina do material de que é feito o fio antes de dar meia-volta. Nesse ritmo, o leitor deve estar se perguntando, como o elétron consegue chegar a algum lugar?

A resposta é simples: o elétron não precisa ir "a algum lugar". Quando dizemos que a corrente em um fio é um ampère isso significa que as cargas passam por qualquer plano que intercepta totalmente o fio à taxa de um coulomb por segundo. A velocidade com a qual os portadores passam pelo plano não é o único parâmetro importante: um ampère pode corresponder a muitos portadores de carga se movendo devagar ou poucos portadores de carga se movendo depressa. Além disso, o sinal para os elétrons passarem a se mover no sentido oposto, que tem origem na força eletromotriz alternada produzida nos geradores das usinas elétricas, se propaga ao longo dos condutores com uma velocidade quase igual à velocidade da luz. Todos os elétrons, onde quer que estejam, recebem essa instrução praticamente no mesmo instante. Finalmente, convém observar que em muitos dispositivos, como as lâmpadas e as torradeiras, o sentido do movimento não é importante, contanto que os elétrons estejam em movimento e transfiram energia para o dispositivo através de colisões com átomos.

A principal vantagem da corrente alternada é a seguinte: *Quando a corrente muda de sentido o mesmo acontece com o campo magnético em torno no condutor.* Isso torna possível usar a lei de indução de Faraday, o que, entre outras coisas, significa que podemos aumentar ou diminuir à vontade a diferença de potencial usando um dispositivo, conhecido como transformador, que será discutido mais tarde. Além disso, a corrente alternada é mais fácil de gerar e utilizar que a corrente contínua no caso de máquinas rotativas como geradores e motores.

A Fig. 31-6 mostra um tipo simples de gerador de corrente alternada. Quando a espira condutora é forçada a girar na presença do campo magnético externo $\vec{B}$, uma força eletromotriz senoidal $\mathscr{E}$ é induzida na espira:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t. \quad (31\text{-}28)$$

A *freqüência angular* ω_d da força eletromotriz é igual à velocidade angular de rotação da espira, a *fase* é $\omega_d t$ e a amplitude é $\mathscr{E}_m$ (o índice significa máxima). Se a espira

faz parte de um circuito elétrico, a força eletromotriz produz uma corrente senoidal (alternada) no circuito com a mesma freqüência angular ω_d, que, nesse caso, é chamada de **freqüência angular de excitação**. Podemos escrever a corrente na forma

$$i = I\,\text{sen}(\omega_d t - \phi), \tag{31-29}$$

onde I é a amplitude da corrente. (Por convenção, a fase da corrente é normalmente escrita como $\omega_d t - \phi$, e não como $\omega_d t + \phi$). Uma constante de fase ϕ foi introduzida na Eq. 31-29 porque a corrente i pode não estar em fase com a força eletromotriz $\mathscr{E}$. (Como vamos ver, a constante de fase depende do circuito ao qual o gerador está ligado.) Podemos também escrever a corrente i em termos da **freqüência de excitação** f_d da força eletromotriz, substituindo ω_d por $2\pi f_d$ na Eq. 31-29.

31-7 | Oscilações Forçadas

Como vimos, depois de um estímulo inicial, a carga, a diferença de potencial e a corrente nos circuitos LC e RLC (para valores suficientemente pequenos de R) oscilam com uma freqüência angular $\omega = 1/\sqrt{LC}$). Essas oscilações recebem o nome de *oscilações livres* (livres de qualquer força eletromotriz externa), e a freqüência angular ω é chamada de **freqüência angular natural**.

Quando a fonte externa de força eletromotriz alternada da Eq. 31-28 é ligada a um circuito RLC dizemos que as oscilações de carga, a diferença de potencial e a corrente são *oscilações forçadas*. Essas oscilações sempre acontecem na freqüência angular de excitação ω_d:

Qualquer que seja a freqüência angular natural ω de um circuito as oscilações forçadas de carga, a corrente e a diferença de potencial sempre acontecem na freqüência angular de excitação ω_d.

Entretanto, como vamos ver na Seção 31-9, a amplitude das oscilações depende da diferença entre ω_d e ω. Quando as duas freqüências são iguais (uma situação conhecida como **ressonância**), a amplitude da corrente I no circuito é máxima.

31-8 | Três Circuitos Simples

Daqui a pouco vamos estudar um sistema constituído por uma fonte externa de força eletromotriz alternada e um circuito RLC série, como o da Fig. 31-7, e encontrar expressões para a amplitude I e a constante de fase ϕ da corrente no circuito em função da amplitude $\mathscr{E}_m$ e da freqüência angular ω_d da força eletromotriz externa. Antes, porém, vamos examinar três circuitos mais simples, constituídos apenas pela fonte externa e um elemento como R, C e L. Começaremos com um elemento resistivo (uma *carga resistiva pura*).

FIG. 31-7 Circuito de uma malha formado por um resistor, um capacitor e um indutor. Um gerador, representado por uma senóide no interior de um círculo, produz uma força eletromotriz alternada que estabelece uma corrente alternada no circuito. O sentido da força eletromotriz e da corrente varia periodicamente.

Carga Resistiva

A Fig. 31-8 mostra um circuito formado por um resistor R e um gerador de corrente alternada cuja força eletromotriz é dada pela Eq. 31-28. De acordo com a regra das malhas, temos:

$$\mathscr{E} - v_R = 0.$$

De acordo com a Eq. 31-28, temos:

$$v_R = \mathscr{E}_m\,\text{sen}\,\omega_d t.$$

Como a amplitude V_R da diferença de potencial (ou tensão) na resistência é igual à amplitude $\mathscr{E}_m$ da força eletromotriz, podemos escrever:

$$v_R = V_R\,\text{sen}\,\omega_d t. \tag{31-30}$$

FIG. 31-8 Circuito formado por um resistor e um gerador de corrente alternada.

(b)

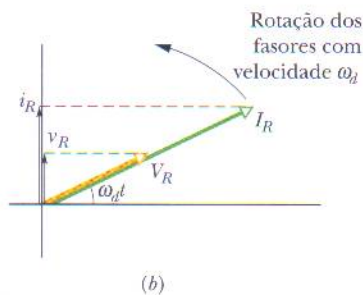
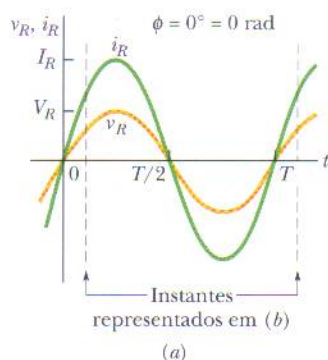



FIG. 31-9 (a) Gráfico da corrente i_R no resistor e da diferença de potencial v_R entre os terminais do resistor em função do tempo t. A corrente e a diferença de potencial estão em fase e completam um ciclo em um período T. (b) Diagrama fasorial correspondente ao gráfico mostrado em (a).

Usando a definição de resistência ($R = V/i$), podemos escrever a corrente na resistência como

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R}\,\text{sen}\,\omega_d t. \tag{31-31}$$

De acordo com a Eq. 31-29, essa corrente também pode ser escrita na forma

$$i_R = I_R\,\text{sen}(\omega_d t - \phi), \tag{31-32}$$

onde I_R é a amplitude da corrente i_R na resistência. Comparando as Eqs. 31-31 e 31-32, vemos que no caso de uma carga resistiva pura a constante de fase ϕ é nula. Vemos também que a amplitude da tensão e a amplitude da corrente estão relacionadas pela equação

$$V_R = I_R R \qquad \text{(resistor)}. \tag{31-33}$$

Embora essa relação tenha sido demonstrada apenas para o circuito da Fig. 31-8, ela se aplica a qualquer resistência em qualquer circuito.

Comparando as Eqs. 31-30 e 31-31, vemos que as grandezas variáveis com o tempo v_R e i_R são funções de sen $\omega_d t$. Isso significa que as duas grandezas estão *em fase*, ou seja, passam ao mesmo tempo pelos máximos e pelos mínimos. A Fig. 31-9*a*, que é um gráfico de $v_R(t)$ e $i_R(t)$, ilustra esse fato. Observe que nesse caso os valores máximos de v_R e i_R não diminuem com o tempo, porque o gerador fornece energia ao circuito para compensar a energia dissipada em R.

As grandezas variáveis com o tempo v_R e i_R podem ser representadas geometricamente por *fasores*. Como vimos na Seção 16-11, os fasores são vetores que giram em torno de uma origem. Os fasores que representam a tensão e a corrente no resistor da Fig. 31-8 são mostrados na Fig. 31-9*b* para um instante de tempo arbitrário t. Esses fasores têm as seguintes propriedades:

Velocidade angular: Os dois fasores giram em torno da origem no sentido anti-horário com uma velocidade angular igual à freqüência angular ω_d de v_R e i_R.

Comprimento: O comprimento de cada fasor representa a amplitude de uma grandeza alternada, V_R no caso da tensão e I_R no caso da corrente.

Projeção: A projeção de cada fasor no eixo *vertical* representa o valor da grandeza alternada no instante t, v_R no caso da tensão e i_R no caso da corrente.

Ângulo de rotação: O ângulo de rotação de cada fasor é igual à fase da grandeza alternada no instante t. Na Fig. 31-9*b* a tensão e a corrente estão em fase; como têm a velocidade angular e o mesmo ângulo de rotação, os dois fasores giram sempre juntos.

Acompanhe mentalmente a rotação. Não é fácil ver que quando o ângulo de rotação é 90° (ou seja, quando os dois fasores estão apontando verticalmente para cima) a tensão e a corrente atingem os valores máximos $v_R = V_R$ e $i_R = I_R$? As Eqs. 31-30 e 31-32 fornecem os mesmos resultados.

TESTE 3 Quando aumentamos a freqüência de excitação de um circuito com uma carga resistiva pura, (a) a amplitude V_R aumenta, diminui ou permanece a mesma? (b) A amplitude I_R aumenta, diminui ou permanece a mesma?

Exemplo 31-4

Carga resistiva pura. Na Fig. 31-8 a resistência R é 200 Ω e o gerador produz uma força eletromotriz de amplitude $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e freqüência $f_d = 60{,}0$ Hz.

(a) Qual é a diferença de potencial $v_R(t)$ entre os terminais do resistor em função do tempo e qual é a amplitude V_R de $v_R(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito com uma carga puramente resistiva a diferença de potencial $v_R(t)$ entre os terminais do resistor é sempre igual à diferença de potencial $\mathscr{E}(t)$ entre os terminais do gerador.

Cálculos: Nesse caso, $v_R(t) = \mathscr{E}(t)$ e $V_R = \mathscr{E}_m$. Como $\mathscr{E}_m$ é conhecida, podemos escrever

$$V_R = \mathscr{E}_m = 36{,}0 \text{ V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar $v_R(t)$, usamos a Eq. 31-28 para escrever

$$v_R(t) = \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t \qquad (31\text{-}34)$$

e, em seguida, fazemos $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e

$$\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi(60 \text{ Hz}) = 120\pi$$

para obter

$$v_R = (36{,}0 \text{ V}) \operatorname{sen}(120\pi t). \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos deixar o argumento do seno nessa forma por conveniência ou escrevê-lo como (377 rad/s)t ou como (377 s^{-1})t.

(b) Qual é a corrente $i_R(t)$ no resistor e qual é a amplitude I_R de $i_R(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito de ca com uma carga resistiva pura, a corrente alternada $i_R(t)$ no resistor está em fase com a diferença de potencial alternada $v_R(t)$ entre os terminais do resistor, ou seja, a constante de fase ϕ para a corrente é zero.

Cálculos: Nesse caso, podemos escrever a Eq. 31-29 na forma

$$i_R = I_R \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) = I_R \operatorname{sen} \omega_d t. \qquad (31\text{-}35)$$

De acordo com a Eq. 31-33, a amplitude I_R é

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{36{,}0 \text{ V}}{200\ \Omega} = 0{,}180 \text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo esse valor e fazendo $\omega_d = 2\pi f_d = 120\pi$ na Eq. 31-35, obtemos:

$$i_R = (0{,}180 \text{ A}) \operatorname{sen}(120\pi t). \qquad \text{(Resposta)}$$

Carga Capacitiva

A Fig. 31-10 mostra um circuito formado por um capacitor C e um gerador de corrente alternada cuja força eletromotriz é dada pela Eq. 31-28. Aplicando a regra das malhas e procedendo como fizemos para obter a Eq. 31-30, descobrimos que a diferença de potencial entre os terminais do capacitor é dada por

$$v_C = V_C \operatorname{sen} \omega_d t, \qquad (31\text{-}36)$$

onde V_C é a amplitude da tensão alternada no capacitor. Usando a definição de capacitância também podemos escrever

$$q_C = Cv_C = CV_C \operatorname{sen} \omega_d t. \qquad (31\text{-}37)$$

Nosso interesse, porém, está na corrente e não na carga. Assim, derivamos a Eq. 31-37 para obter

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_d CV_C \cos \omega_d t. \qquad (31\text{-}38)$$

Vamos agora modificar a Eq. 31-38 de duas formas. Em primeiro lugar, para padronizar a notação vamos definir uma grandeza X_C, conhecida como **reatância capacitiva** de um capacitor, através da relação

$$X_C = \frac{1}{\omega_d C} \qquad \text{(reatância capacitiva).} \qquad (31\text{-}39)$$

O valor de X_C depende tanto da capacitância como da freqüência angular de excitação ω_d. Sabemos da definição de constante de tempo capacitiva ($\tau = RC$) que a unidade de C no SI pode ser expressa em segundos por ohm. Usando essa unidade na Eq. 31-39 vemos que a unidade de X_C no SI é o *ohm*, a mesma da resistência R.

Em segundo lugar, substituímos $\cos \omega_d t$ na Eq. 31-38 por um seno com um deslocamento de fase de 90°:

$$\cos \omega_d t = \operatorname{sen}(\omega_d t + 90°).$$

Para mostrar que essa identidade está correta, basta deslocar uma senóide de 90° no sentido negativo.

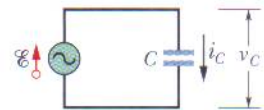



FIG. 31-10 Circuito formado por um capacitor C e um gerador de corrente alternada.

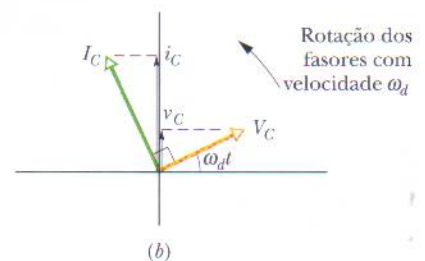
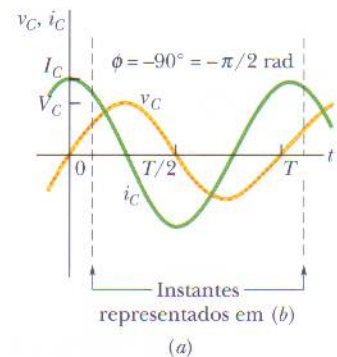



FIG. 31-11 (*a*) A corrente no capacitor está adiantada de 90° (= π/2 rad) em relação à tensão. (*b*) Diagrama fasorial correspondente ao gráfico mostrado em (*a*).

Com essas duas modificações, a Eq. 31-38 se torna

$$i_C = \left(\frac{V_C}{X_C}\right) \text{sen}(\omega_d t + 90°). \qquad (31\text{-}40)$$

De acordo com a Eq. 31-29, também podemos escrever a corrente i_C no capacitor da Fig. 31-10 como

$$i_C = I_C \,\text{sen}(\omega_d t - \phi), \qquad (31\text{-}41)$$

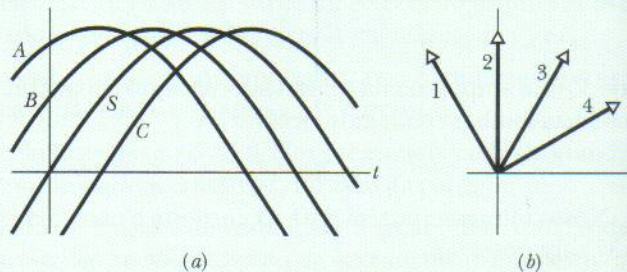
onde I_C é a amplitude de i_C. Comparando as Eqs. 31-40 e 31-41, vemos que para uma carga capacitiva pura a constante de fase ϕ da corrente é $-90°$. Vemos também que a amplitude da tensão e a amplitude da corrente estão relacionadas pela equação

$$V_C = I_C X_C \quad \text{(capacitor)}. \qquad (31\text{-}42)$$

Embora essa relação tenha sido demonstrada apenas para o circuito da Fig. 31-10, ela se aplica a qualquer capacitância em qualquer circuito de corrente alternada.

Comparando as Eqs. 31-36 e 31-40, ou examinando a Fig. 31-11*a*, vemos que as grandezas v_C e i_C estão defasadas de 90°, $\pi/2$ ou um quarto de ciclo. Além disso, dizemos que i_C está *adiantada* em relação a v_C, o que significa que se medirmos i_C e v_C no circuito da Fig. 31-10 em função do tempo veremos que i_C atinge o valor máximo de um quarto de ciclo *antes* de v_C.

Essa relação entre i_C e v_C está ilustrada no diagrama fasorial da Fig. 31-11*b*. Enquanto os fasores que representam essas grandezas giram com a mesma velocidade angular no sentido anti-horário, o fasor I_C se mantém à frente do fasor V_C e o ângulo entre os dois fasores é 90°, ou seja, quando o fasor I_C coincide com o eixo vertical o fasor V_C coincide com o eixo horizontal. É fácil verificar que o diagrama fasorial da Fig. 31-11*b* é compatível com as Eqs. 31-36 e 31-40.

TESTE 4 A figura mostra, em (*a*), uma curva senoidal $S(t) = \text{sen}(\omega_d t)$ e três outras curvas senoidais $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$, todas da forma $\text{sen}(\omega_d t - \phi)$. (a) Coloque as outras três curvas na ordem do valor de ϕ, começando pelo maior valor positivo e terminando no maior valor negativo. (b) Estabeleça a correspondência entre as curvas da parte (*a*) da figura e os fasores da parte (*b*). (c) Qual das curvas da parte (*a*) está adiantada em relação a todas as outras?

Exemplo 31-5

Carga capacitiva pura. Na Fig. 31-10 a capacitância C é 15,0 μF e o gerador produz uma força eletromotriz senoidal de amplitude $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e freqüência $f_d = 60{,}0$ Hz.

(a) Qual é a diferença de potencial $v_C(t)$ entre os terminais do capacitor em função do tempo e qual é a amplitude V_C de $v_C(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito com uma carga puramente capacitiva a diferença de potencial $v_C(t)$ entre os terminais do capacitor é sempre igual à diferença de potencial $\mathscr{E}(t)$ entre os terminais do gerador.

Cálculos: Nesse caso, $v_C(t) = \mathscr{E}(t)$ e $V_C = \mathscr{E}_m$. Como $\mathscr{E}_m$ é conhecida, podemos escrever

$$V_C = \mathscr{E}_m = 36{,}0 \text{ V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar $v_C(t)$, usamos a Eq. 31-28 para escrever

$$v_C(t) = \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \,\text{sen}\, \omega_d t. \qquad (31\text{-}43)$$

e em seguida fazemos $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e $\omega_d = 2\pi f_d = 120\pi$ na Eq. 31-43 para obter

$$v_C = (36{,}0 \text{ V}) \,\text{sen}(120\pi t). \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a corrente $i_C(t)$ no circuito e qual é a amplitude I_C de $i_C(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito de ca com uma carga capacitiva pura a corrente alternada $i_C(t)$ no capacitor está

adiantada de 90° em relação à diferença de potencial alternada $v_C(t)$ entre os terminais do capacitor, ou seja, a constante de fase ϕ para a corrente é $-90°$ ou $-\pi/2$ rad.

Cálculos: Nesse caso, podemos escrever a Eq. 31-29 na forma

$$i_C = I_C \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) = I_C \operatorname{sen}(\omega_d t + \pi/2). \qquad (31\text{-}44)$$

Podemos determinar a amplitude I_C da corrente no capacitor usando a Eq. 31-42 ($V_C = I_C X_C$) se conhecermos a reatância capacitiva X_C. De acordo com a Eq. 31-39 ($X_C = 1/\omega_d C$), com $\omega_d = 2\pi f_d$, podemos escrever

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_d C} = \frac{1}{(2\pi)(60{,}0\ \text{Hz})(15{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 177\ \Omega.$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. 31-42, temos:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{36{,}0\ \text{V}}{177\ \Omega} = 0{,}203\ \text{A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo esse valor e $\omega_d = 2\pi f_d = 120\pi$ na Eq. 31-44, temos:

$$i_C = (0{,}203\ \text{A}) \operatorname{sen}(120\pi t + \pi/2). \qquad \text{(Resposta)}$$

Carga Indutiva

A Fig. 31-12 mostra um circuito formado por um indutor L e um gerador de corrente alternada cuja força eletromotriz é dada pela Eq. 31-28. Aplicando a regra das malhas e procedendo como fizemos para obter a Eq. 31-30, descobrimos que a diferença de potencial entre os terminais do indutor é dada por

FIG. 31-12 (*a*) Circuito formado por um indutor L e um gerador de corrente alternada.

$$v_L = V_L \operatorname{sen} \omega_d t, \qquad (31\text{-}45)$$

onde V_L é a amplitude da tensão alternada v_L no indutor. Usando a Eq. 30-35 ($\mathscr{E}_L = -L\, di/dt$) podemos escrever a diferença de potencial entre os terminais de um indutor L no qual a corrente está variando à taxa di_L/dt na forma

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}. \qquad (31\text{-}46)$$

Combinando as Eqs. 31-45 e 31-46, temos:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} \operatorname{sen} \omega_d t. \qquad (31\text{-}47)$$

Nosso interesse, porém, está na corrente e não na derivada da corrente em relação ao tempo. Assim, integramos a Eq. 31-47 para obter

$$i_L = \int di_L = \frac{V_L}{L} \int \operatorname{sen} \omega_d t\, dt = -\left(\frac{V_L}{\omega_d L}\right) \cos \omega_d t. \qquad (31\text{-}48)$$

Vamos agora modificar a Eq. 31-48 de duas formas. Em primeiro lugar, para padronizar a notação vamos definir uma grandeza X_L, conhecida como **reatância indutiva** de um indutor, através da relação

$$X_L = \omega_d L \quad \text{(reatância indutiva)}. \qquad (31\text{-}49)$$

O valor de X_L depende tanto da indutância como da freqüência angular de excitação ω_d. Sabemos da definição de constante de tempo indutiva ($\tau_L = L/R$) que a unidade de L no SI pode ser expressa em ohms-segundos. Usando essa unidade na Eq. 31-49 vemos que a unidade de X_L no SI é o *ohm*, a mesma da resistência R e da reatância capacitiva X_C.

Em segundo lugar, substituímos $-\cos \omega_d t$ na Eq. 31-48 por um seno com um deslocamento de fase de 90°:

$$-\cos \omega_d t = \operatorname{sen}(\omega_d t - 90°).$$

Para mostrar que essa identidade está correta basta deslocar uma senóide 90° no sentido positivo.

Com essas duas modificações, a Eq. 31-48 se torna

$$i_L = \left(\frac{V_L}{X_L}\right) \operatorname{sen}(\omega_d t - 90°). \qquad (31\text{-}50)$$

FIG. 31-13 (*a*) A corrente no indutor está adiantada de 90° (= $\pi/2$ rad) em relação à tensão. (*b*) Diagrama fasorial correspondente ao gráfico mostrado em (*a*).

De acordo com a Eq. 31-29, também podemos escrever a corrente no indutor como

$$i_L = I_L \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi), \tag{31-51}$$

onde I_L é a amplitude de i_L. Comparando as Eqs. 31-50 e 31-51, vemos que para uma carga indutiva pura a constante de fase ϕ da corrente é $+90°$. Vemos também que a amplitude da tensão e a amplitude da corrente estão relacionadas pela equação

$$V_L = I_L X_L \quad \text{(indutor)}. \tag{31-52}$$

Embora essa relação tenha sido demonstrada apenas para o circuito da Fig. 31-12 ela se aplica a qualquer indutância em qualquer circuito de corrente alternada.

Comparando as Eqs. 31-45 e 31-50 ou examinando a Fig. 31-13*a* vemos que as grandezas v_L e i_L estão defasadas de 90°. Nesse caso, porém, i_L está *atrasada* em relação a v_L, o que significa que se medirmos i_L e v_L no circuito da Fig. 31-12 em função do tempo veremos que i_L atinge o valor máximo um quarto de ciclo *depois* de v_L.

Essa relação entre i_L e v_L está ilustrada no diagrama fasorial da Fig. 31-13*b*. Enquanto os fasores que representam essas grandezas giram com a mesma velocidade angular no sentido anti-horário, o fasor V_L se mantém à frente do fasor I_L e o ângulo entre os dois fasores é 90°, ou seja, quando o fasor V_L coincide com o eixo vertical o fasor I_L coincide com o eixo horizontal. É fácil verificar que o diagrama fasorial da Fig. 31-13*b* é compatível com as Eqs. 31-45 e 31-50.

✓ **TESTE 5** Quando aumentamos a freqüência de excitação de um circuito com uma carga capacitiva pura (a) a amplitude V_C aumenta, diminui ou permanece a mesma? (b) A amplitude I_C aumenta, diminui ou permanece a mesma?

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1:* *Tensões e Correntes em Circuitos de CA A Tabela 31-2 mostra as relações entre a corrente i e a tensão v nos três tipos de elementos que acabamos de discutir. Quando uma tensão alternada é aplicada a esses elementos a corrente está em fase com a tensão nos resistores, está adiantada em relação à tensão nos capacitores e está atrasada em relação à tensão nos indutores.

Alguns estudantes usam a frase mnemônica "*ELI*, que TOL*ICE*!" para não esquecer essas relações. *ELI* contém a letra *L* (símbolo do indutor), e nesta palavra a letra *I* (símbolo de corrente) vem *depois* da letra *E* (símbolo de força eletromotriz ou tensão). Assim, em um indutor a corrente está *atrasada* em relação à tensão. Por outro lado, a palavra *TOLICE* contém a letra *C* (símbolo do capacitor), e nesta palavra a letra *I* vem *antes* da letra *E*, o que significa que a corrente está *adiantada* em relação à tensão. O leitor também pode usar a frase "*Positivamente, ELI, isto é uma TOLICE!*" para se lembrar de que a constante de fase é positiva para os indutores.

Se o leitor tiver dificuldade para lembrar se X_C é igual a $\omega_d C$ (errado) ou $1/\omega_d C$ (certo), pense que C fica na "cova", ou seja, no denominador.

TABELA 31-2

Relações de Fase e Amplitude para Correntes e Tensões Alternadas

Elemento	Símbolo	Resistência ou Reatância	Fase da Corrente	Constante de Fase (ou Ângulo) ϕ	Relação de Amplitudes
Resistor	R	R	Em fase com v_R	0° (= 0 rad)	$V_R = I_R R$
Capacitor	C	$X_C = 1/\omega_d C$	Adiantada de 90° (= $\pi/2$ rad) em relação a v_C	−90° (= $-\pi/2$ rad)	$V_C = I_C X_C$
Indutor	L	$X_L = \omega_d L$	Atrasada de 90° (= $\pi/2$ rad) em relação a v_L	+90° (= $+\pi/2$ rad)	$V_L = I_L X_L$

Exemplo 31-6

Carga indutiva pura. Na Fig. 31-12 a indutância L é 230 mH e o gerador produz uma força eletromotriz de amplitude $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e freqüência $f_d = 60{,}0$ Hz.

(a) Qual é a diferença de potencial $v_L(t)$ entre os terminais do indutor e qual é a amplitude V_L de $v_L(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito com uma carga puramente indutiva a diferença de potencial $v_L(t)$ entre os terminais do indutor é sempre igual à diferença de potencial $\mathscr{E}(t)$ entre os terminais do gerador.

Cálculos: Nesse caso, $v_L(t) = \mathscr{E}(t)$ e $V_L = \mathscr{E}_m$. Como $\mathscr{E}_m$ é conhecida, podemos escrever

$$V_L = \mathscr{E}_m = 36{,}0 \text{ V}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar $v_L(t)$, usamos a Eq. 31-28 para escrever

$$v_L(t) = \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t, \qquad (31\text{-}53)$$

e em seguida fazemos $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V e $\omega_d = 2\pi f_d = 120\pi$ na Eq. 31-53 para obter

$$v_L = (36{,}0 \text{ V}) \operatorname{sen}(120\pi t). \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a corrente $i_L(t)$ no circuito e qual é a amplitude I_L de $i_L(t)$?

IDÉIA-CHAVE Em um circuito de ca com uma carga indutiva pura a corrente alternada $i_L(t)$ no indutor está atrasada 90° em relação à diferença de potencial alternada $v_L(t)$ entre os terminais do indutor, ou seja, a constante de fase ϕ para a corrente é 90° ou $\pi/2$ rad. (Usando o artifício mnemônico da Tática 1, esse circuito é "positivamente um circuito *ELI*", o que nos diz que a força eletromotriz $\mathscr{E}$ está adiantada em relação à corrente I e que o ângulo de fase ϕ é *positivo*.)

Cálculos: Como o ângulo de fase ϕ da corrente é $+90°$ ou $+\pi/2$ rad, podemos escrever a Eq. 31-29 na forma

$$i_L = I_L \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) = I_L \operatorname{sen}(\omega_d t - \pi/2). \qquad (31\text{-}54)$$

Podemos determinar a amplitude I_L da corrente no indutor usando a Eq. 31-52 ($V_L = I_L X_L$) se conhecermos a reatância indutiva X_L. De acordo com a Eq. 31-49 ($X_L = \omega_d L$), com $\omega_d = 2\pi f_d$, podemos escrever

$$X_L = 2\pi f_d L = (2\pi)(60{,}0 \text{ Hz})(230 \times 10^{-3} \text{ H}) = 86{,}7\ \Omega.$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. 31-52, temos:

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{36{,}0 \text{ V}}{86{,}7\ \Omega} = 0{,}415 \text{ A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo este valor e $\omega_d = 2\pi f_d = 120\pi$ na Eq. 31-54, temos:

$$i_L = (0{,}415 \text{ A}) \operatorname{sen}(120\pi t - \pi/2). \qquad \text{(Resposta)}$$

31-9 | O Circuito *RLC* Série

Agora estamos em condições de analisar o caso em que a força eletromotriz alternada da Eq. 31-28,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t \quad \text{(fem aplicada)}, \qquad (31\text{-}55)$$

é aplicada ao circuito *RLC* da Fig. 31-7. Como R, L e C estão em série, a mesma corrente

$$i = I \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \qquad (31\text{-}56)$$

atravessa os três componentes. Estamos interessados em determinar a amplitude I e a constante de fase ϕ da corrente. A solução é facilitada pelo uso de diagramas fasoriais.

Amplitude da Corrente

Começamos pela Fig. 31-14*a*, que mostra o fasor que representa a corrente da Eq. 31-56 em um instante de tempo arbitrário t. O comprimento do fasor é a amplitude I da corrente, a projeção do fasor no eixo vertical é a corrente i no instante t e o ângulo de rotação do fasor é a fase $\omega_d t - \phi$ da corrente no instante t.

A Fig. 31-14*b* mostra os fasores que representam as tensões entre os terminais de R, L e C no mesmo instante t. Os fasores estão orientados em relação ao fasor de corrente I da Fig. 31-14*a* de acordo com as informações da Tabela 31-2.

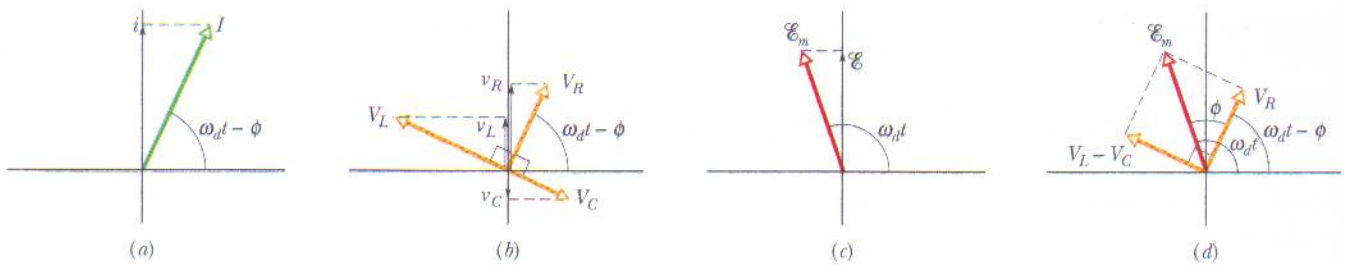



FIG. 31-14 (*a*) Fasor que representa a corrente alternada no circuito *RLC* da Fig. 31-7 em um instante de tempo *t*. O diagrama mostra a amplitude *I*, o valor instantâneo *i* e a fase ($\omega_d t - \phi$) da corrente. (*b*) Fasores que representam as tensões no indutor, no resistor e no capacitor, orientados em relação ao fasor do item (*a*), que representa a corrente. (*c*) Fasor que representa a força eletromotriz alternada responsável pela corrente representada em (*a*). (*d*) O fasor de força eletromotriz é igual à soma vetorial dos três fasores de tensão representados em (*b*). Os fasores de tensão V_L e V_C foram combinados para formar o fasor $V_L - V_C$.

Resistor: A corrente e tensão estão em fase e, portanto, o ângulo de rotação do fasor de tensão V_R é igual ao da corrente *I*.

Capacitor: A corrente está adiantada de 90° em relação à tensão e, portanto, o ângulo de rotação do fasor de tensão V_C é igual ao da corrente *I* menos 90°.

Indutor: A corrente está atrasada de 90° em relação à tensão e, portanto, o ângulo de rotação do fator de tensão $\mathrm{V_L}$ é igual ao da corrente *I* mais 90°.

A Fig. 31-14*b* mostra também as tensões instantâneas v_R, v_C e v_L entre os terminais de *R*, *C* e *L* no instante *t*; essas tensões são as projeções dos tensores correspondentes no eixo vertical da figura.

A Fig. 31-14*c* mostra o fasor que representa a força eletromotriz aplicada da Fig. 31-55. O comprimento do fasor é o valor absoluto da força eletromotriz $\mathscr{E}_m$, a projeção do fasor no eixo vertical é o valor da força eletromotriz $\mathscr{E}$ no instante *t* e o ângulo de rotação do fasor é a fase $\omega_d t$ da força eletromotriz no instante *t*.

De acordo com a regra das malhas, a soma das tensões v_R, v_C e v_L é sempre igual à força eletromotriz aplicada $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = v_R + v_C + v_L. \tag{31-57}$$

Assim, a projeção $\mathscr{E}$ da Fig. 31-14*c* é igual à soma algébrica das projeções v_R, v_C e v_L da Fig. 31-14*b*. Como todos esses fasores giram com a mesma velocidade angular, a igualdade é mantida para qualquer ângulo de rotação, o que significa que o fasor $\mathscr{E}_m$ da Fig. 31-14*c* é igual à soma vetorial dos fasores V_R, V_C e V_L da Fig. 3-14*b*.

Essa relação está indicada na Fig. 31-14*d*, onde o fasor $\mathscr{E}_\mathrm{m}$ foi desenhado como a soma dos fasores V_R, V_L e V_C. Como os fasores V_L e V_C têm a mesma direção e sentidos opostos, podemos simplificar a soma vetorial combinando V_L e V_C para formar o fasor $V_L - V_C$. Em seguida, combinamos este fasor com V_R para obter o fasor total. Como vimos, esse fasor é igual ao fasor $\mathscr{E}_m$.

Os dois triângulos da Fig. 31-14*d* são triângulos retângulos. Aplicando o teorema de Pitágoras a um deles, obtemos:

$$\mathscr{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2. \tag{31-58}$$

De acordo com as informações da Tabela 31-2, esta equação pode ser escrita na forma

$$\mathscr{E}_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2, \tag{31-59}$$

que, depois de explicitarmos a corrente *I*, se torna

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \tag{31-60}$$

O denominador da Eq. 31-60 é chamado de **impedância** do circuito para a freqüência de excitação ω_d e representado pelo símbolo Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(definição de impedância).} \tag{31-61}$$

Assim, a Eq. 31-60 pode ser escrita na forma

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{Z}. \tag{31-62}$$

Substituindo X_C e X_L por seus valores, dados pelas Eqs. 31-39 e 31-49, podemos escrever a Eq. 31-60 na forma mais explícita

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}} \quad \text{(amplitude da corrente).} \tag{31-63}$$

Já atingimos a primeira parte do nosso objetivo: obtivemos uma expressão para a amplitude I da corrente em termos da força eletromotriz senoidal aplicada e dos elementos de um circuito RLC série.

O valor de I depende da diferença entre $\omega_d L$ e $1/\omega_d C$ na Eq. 31-63 ou, o que é equivalente, da diferença entre X_L e X_C na Eq. 31-60. Nas duas equações, não importa qual das duas grandezas é maior porque a diferença aparece elevada ao quadrado.

A corrente que estamos discutindo nesta seção é a *corrente estacionária*, isto é, a corrente que é observada algum tempo após a aplicação ao circuito da força eletromotriz. Logo depois que a força eletromotriz é aplicada existe no circuito uma *corrente transitória* cuja duração depende das constantes de tempo $\tau_L = L/R$ e $\tau_C = RC$, os tempos necessários para que o capacitor e o indutor sejam "carregados". Essa corrente transitória pode, por exemplo, destruir um motor durante a partida se não foi levada em consideração no projeto do motor.

Constante de Fase

De acordo com o triângulo de fasores da direita da Fig. 31-14*d* e a Tabela 31-2, podemos escrever:

$$\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}, \tag{31-64}$$

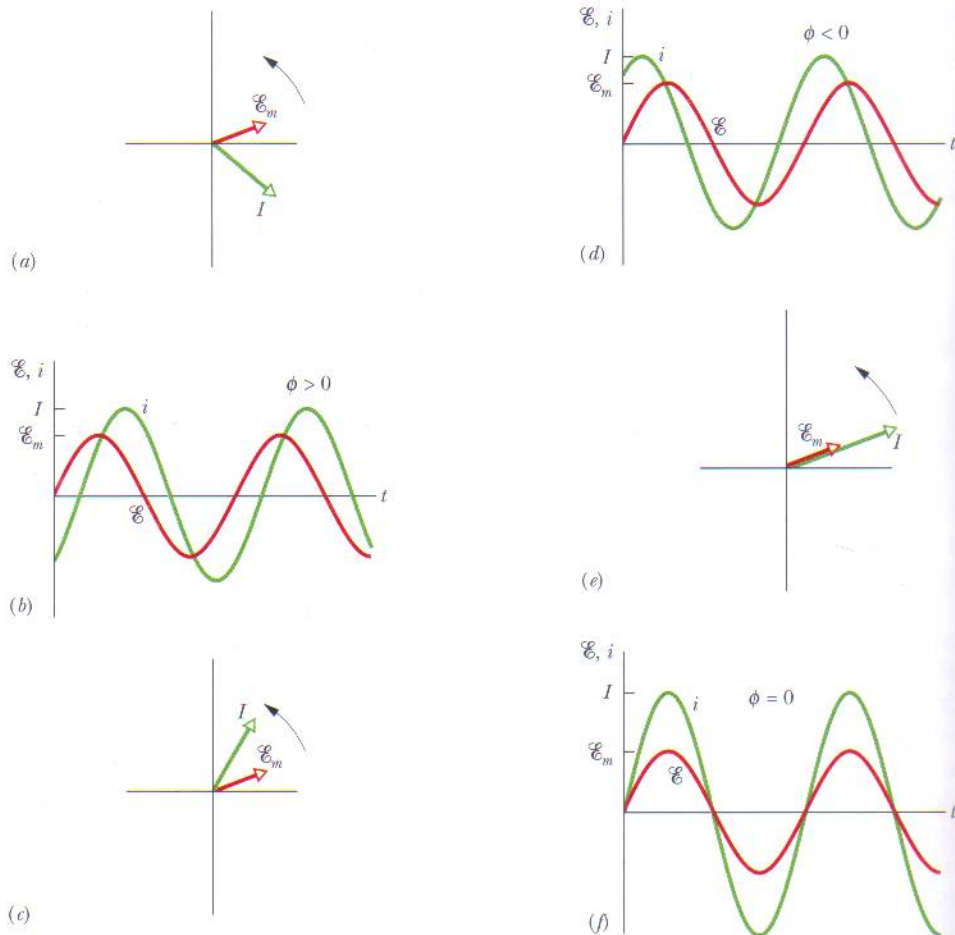
o que nos dá

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(constante de fase).} \tag{31-65}$$

Esta é a segunda parte do nosso objetivo: obter uma expressão para a constante de fase ϕ de um circuito RLC excitado por uma força eletromotriz senoidal. Podemos obter três resultados diferentes para a constante de fase, dependendo dos valores relativos de X_L e X_C:

$X_L > X_C$**:** Neste caso dizemos que o circuito é *mais indutivo que capacitivo*. De acordo com a Eq. 31-65, ϕ é positivo em um circuito desse tipo, o que significa que o fasor I está atrasado em relação ao fasor $\mathscr{E}_m$ (Fig. 31-15*a*). Os gráficos de $\mathscr{E}$ e i em função do tempo são semelhantes aos da Fig. 31-15*b*. (As Figs. 31-14*c* e 31-14*d* foram desenhadas supondo que $X_L > X_C$.)

$X_C > X_L$**:** Neste caso dizemos que o circuito é *mais capacitivo que indutivo*. De acordo com a Eq. 31-65, ϕ é negativo em um circuito desse tipo, o que significa que o fasor I está adiantado em relação ao fasor $\mathscr{E}_m$ (Fig. 31-15*c*). Os gráficos de $\mathscr{E}$ e i em função do tempo são semelhantes aos da Fig. 31-15*d*.

FIG. 31-15 Diagramas fasoriais e gráficos da força eletromotriz alternada $\mathscr{E}$ e da corrente i para o circuito RLC da Fig. 31-7. No diagrama fasorial (a) e no gráfico (b) a corrente i está atrasada em relação à força eletromotriz $\mathscr{E}$, e a constante de fase da corrente é positiva. Em (c) e (d) a corrente i está adiantada em relação à força eletromotriz $\mathscr{E}$, e a constante de fase ϕ é negativa. Em (e) e (f) a corrente está em fase com a força eletromotriz $\mathscr{E}$ e a constante de fase ϕ é zero.

$X_C = X_L$**:** Neste caso dizemos que o circuito está em *ressonância*, um estado que será discutido a seguir. De acordo com a Eq. 31-65, $\phi = 0°$ em um circuito desse tipo, o que significa que os fasores I e $\mathscr{E}_m$ estão em fase (Fig. 31-15e). Os gráficos de $\mathscr{E}$ e i em função do tempo são semelhantes aos da Fig. 31-15f.

Como ilustração, vamos considerar dois casos extremos. No *circuito puramente indutivo* da Fig. 31-12, em que $X_L = 0$ e $X_C = R = 0$, a Eq. 31-65 nos dá $\phi = 90°$ (o valor máximo de ϕ), o que está de acordo com a Fig. 31-13b. No *circuito puramente capacitivo* da Fig. 31-10, em que $X_C = 0$ e $X_L = R = 0$, a Eq. 31-65 nos dá $\phi = -90°$ (o valor mínimo de ϕ), o que está de acordo com a Fig. 31-11b.

Ressonância

A Eq. 31-63 fornece a amplitude I da corrente em um circuito RLC em função da freqüência de excitação ω_d da força eletromotriz aplicada. Para uma dada resistência R, a amplitude é máxima quando o termo $\omega_d L - 1/\omega_d C$ no denominador é zero, ou seja, quando

$$\omega_d L = \frac{1}{\omega_d C}$$

ou

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (I \text{ máxima}). \tag{31-66}$$

Como a freqüência angular natural ω do circuito RLC também é igual a $1/\sqrt{LC}$, o valor I é máximo quando a freqüência angular de excitação é igual à freqüência natural, ou seja, na ressonância. Assim, em um circuito RLC série a freqüência angular de excitação, para a qual a corrente é máxima, e a freqüência angular de excitação são dadas por

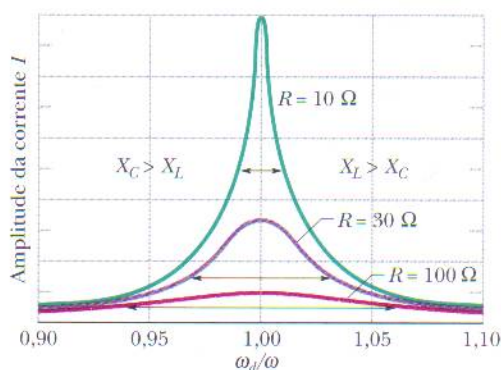
$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(ressonância).} \tag{31-67}$$

A Fig. 31-16 mostra três *curvas de ressonância* para excitações senoidais em três circuitos *RLC* série que diferem apenas quanto ao valor de R. As três curvas atingem o máximo de amplitude I quando a razão ω_d/ω é 1,00, mas o valor máximo de I é inversamente proporcional a R. (O valor máximo de I é sempre igual a $\mathscr{E}_m/R$; para compreender por que, combine as Eqs. 31-61 e 31-62.) Além disso, a largura das curvas (medida na Fig. 31-16 em metade do valor de I) aumenta quando R aumenta.

Para compreender o significado físico da Fig. 31-16 considere o modo como as reatâncias X_L e X_C variam quando aumentamos a freqüência angular de excitação ω_d, começando com um valor muito menor que a freqüência natural ω. Para pequenos valores de ω_d a reatância X_L ($= \omega_d L$) é pequena e a reatância X_C ($= 1/\omega_d C$) é grande. Assim, o circuito é principalmente capacitivo e a impedância é dominada pelo alto valor de X_C, que mantém a corrente baixa.

Quando aumentamos ω_d a reatância X_C continua a ser dominante mas diminui, enquanto a reatância X_L aumenta. Com a diminuição de X_C a impedância diminui e a corrente aumenta, como podemos ver no lado esquerdo da curva de ressonância da Fig. 31-16. Quando a diminuição de X_C e o aumento de X_L fazem com que as duas reatâncias sejam iguais, a corrente atinge o valor máximo e o circuito está na ressonância, com $\omega_d = \omega$.

Quando ω_d continua a aumentar, a reatância X_L se torna cada vez mais dominante em relação à reatância X_C. A impedância aumenta por causa de X_L e a corrente diminui, como do lado direito da curva de ressonância da Fig. 31-16. Resumindo: o lado de baixa freqüência angular da curva de ressonância é dominado pela reatância do capacitor, o lado de alta freqüência angular é dominado pela reatância do indutor e a ressonância acontece no meio da curva.

FIG. 31-16 *Curvas de ressonância* do circuito *RLC* da Fig. 31-7 para $L = 100\ \mu$H, $C = 100$ pF e três valores de R. A amplitude I da corrente alternada depende da diferença entre a freqüência angular de excitação ω_d e a freqüência natural ω. A seta horizontal em cada curva mostra a *largura a meia altura*, que é a largura da curva nos pontos em que a corrente é metade da corrente máxima e constitui uma medida da seletividade do circuito. À esquerda do ponto $\omega_d/\omega = 1{,}00$ o circuito é principalmente capacitivo, com $X_C > X_L$; à direita é principalmente indutivo, com $X_L > X_C$.

TESTE 6 As reatâncias capacitiva e indutiva, respectivamente, de três circuitos *RLC* série excitados senoidalmente são: (1) 50 Ω, 100 Ω; (2) 100 Ω, 50 Ω; (3) 50 Ω, 50 Ω. (a) Responda para cada circuito: a corrente está adiantada em relação à força eletromotriz aplicada, está atrasada ou a corrente e a força eletromotriz estão em fase? (b) Qual dos circuitos está em ressonância?

Exemplo 31-7

Na Fig. 31-7 $R = 200\ \Omega$, $C = 15{,}0\ \mu$F, $L = 230$ mH, $f_d = 60{,}0$ Hz e $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V. (Esses parâmetros são os mesmos dos Exemplos 31-4, 31-5 e 31-6.)

(a) Qual é a amplitude I da corrente?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 31-62 ($I = \mathscr{E}_m/Z$), a amplitude da corrente I depende da amplitude $\mathscr{E}_m$ da força eletromotriz aplicada e da impedância Z do circuito.

Cálculos: Precisamos determinar o valor de Z, que depende da resistência R, da reatância capacitiva X_C e da reatância indutiva X_L. A única resistência do circuito é a resistência do resistor R. A única reatância capacitiva é a reatância do capacitor C; de acordo com o Exemplo 31-5, $X_C = 177\ \Omega$. A única reatância indutiva é a reatância do indutor L; de acordo com o Exemplo 31-6, $X_L = 86{,}7\ \Omega$. A impedância do circuito é

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(200\ \Omega)^2 + (86{,}7\ \Omega - 177\ \Omega)^2}$$
$$= 219\ \Omega.$$

Assim, temos:

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{Z} = \frac{36{,}0\ \text{V}}{219\ \Omega} = 0{,}164\ \text{A}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a constante de fase ϕ da corrente no circuito em relação à força eletromotriz aplicada?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 31-65 a constante de fase depende da reatância indutiva, da reatância capacitiva e da resistência.

Cálculo: Explicitando ϕ na Eq. 31-65, obtemos:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{X_L - X_C}{R} = \tan^{-1}\frac{86{,}7\ \Omega - 177\ \Omega}{200\ \Omega}$$
$$= -24{,}3^\circ = -0{,}424\ \text{rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O fato de obtermos uma constante de fase negativa já era esperado, pois a carga é principalmente capacitiva, com $X_C > X_L$. Nas palavras da Tática 1, este é um circuito TOL*ICE*: a corrente está *adiantada* em relação à força eletromotriz.

(*a*)

(*b*)

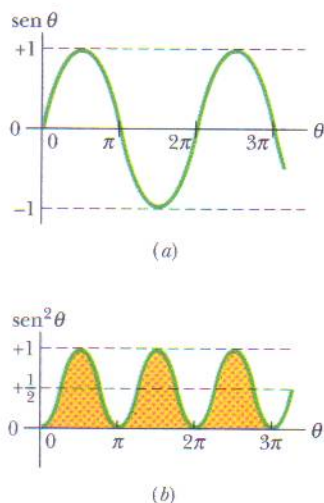



FIG. 31-17 (*a*) Gráfico de sen θ em função de θ. O valor médio da função ao longo de um ciclo é zero. (*b*) Gráfico de sen$^2\,\theta$ em função de θ. O valor médio da função ao longo de um ciclo é 1/2.

31-10 | Potência em Circuitos de Corrente Alternada

No circuito *RLC* da Fig. 31-7 a fonte de energia é o gerador de corrente alternada. Parte da energia fornecida pelo gerador é armazenada no campo elétrico do capacitor, parte é armazenada no campo magnético do indutor e parte é dissipada como energia térmica no resistor. No regime estacionário, isto é, depois de transcorrido um tempo suficiente para que o circuito se estabilize, a energia média armazenada no capacitor e no indutor juntos permanece constante. A transferência líquida de energia é, portanto, do gerador para o resistor, onde a energia eletromagnética é convertida em energia térmica.

A taxa instantânea com a qual a energia é dissipada no resistor pode ser escrita, com a ajuda das Eqs. 26-27 e 31-29, como

$$P = i^2R = [I\,\text{sen}(\omega_d t - \phi)]^2R = I^2R\,\text{sen}^2(\omega_d t - \phi). \qquad (31\text{-}68)$$

A taxa *média* com a qual a energia é dissipada no resistor é a média no tempo da Eq. 31-68. Em um ciclo completo o valor médio de sen θ é zero (Fig. 31-17*a*), mas o valor médio de sen² θ é 1/2 (Fig. 31-17*b*). (Observe na Fig. 31-17*b* que as partes sombreadas sob a curva que ficam acima da reta horizontal +1/2 completam exatamente os espaços vazios que ficam abaixo da mesma reta.) Assim, de acordo com a Eq. 31-68, podemos escrever:

$$P_{\text{méd}} = \frac{I^2R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R. \qquad (31\text{-}69)$$

A grandeza $I/\sqrt{2}$ é chamada de **valor médio quadrático** ou **valor rms*** da corrente I:

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad \text{(corrente rms)}. \qquad (31\text{-}70)$$

Podemos escrever a Eq. 31-69 na forma

$$P_{\text{méd}} = I_{\text{rms}}^2\,R \qquad \text{(potência média)}. \qquad (31\text{-}71)$$

A Eq. 31-71 tem a mesma forma que a Eq. 26-27 ($P = i^2R$); isso significa que usando a corrente rms podemos calcular a taxa média de dissipação de energia em circuitos

*Do inglês *r*oot *m*ean *s*quare. (N.T.)

de corrente alternada como se estivéssemos trabalhando com um circuito de corrente contínua.

Podemos também definir o valor rms de uma tensão alternada e de uma força eletromotriz alternada:

$$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathscr{E}_{rms} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{2}} \quad \text{(tensão rms; força eletromotriz rms).} \qquad (31\text{-}72)$$

Os instrumentos usados em circuitos de corrente alternada, como amperímetros e voltímetros, são quase sempre calibrados para indicar valores de I_{rms}, V_{rms} e $\mathscr{E}_{rms}$. Assim, quando ligamos um voltímetro de corrente alternada a uma tomada de parede e obtemos um valor de 120 V esta é a tensão rms. O valor *máximo* da diferença de potencial em uma tomada de parede é $\sqrt{2} \times 120\text{ V} \cong 170\text{ V}$.

Como o fator de proporcionalidade $1/\sqrt{2}$ nas Eqs. 31-70 e 31-72 é o mesmo para as três variáveis, podemos escrever as Eqs. 31-62 e 31-60 como

$$I_{rms} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \qquad (31\text{-}73)$$

e, na verdade, esta é a forma mais usada na prática.

Podemos usar a relação $I_{rms} = \mathscr{E}_{rms}/Z$ para escrever a Eq. 31-71 de outra forma. Temos:

$$P_{méd} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z} I_{rms} R = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z}. \qquad (31\text{-}74)$$

De acordo com a Fig. 31-14*d*, a Tabela 31-2 e a Eq. 31-62, R/Z é o co-seno da constante de fase ϕ:

$$\cos\phi = \frac{V_R}{\mathscr{E}_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \qquad (31\text{-}75)$$

A Eq. 31-74 se torna, portanto,

$$P_{méd} = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \cos\phi \quad \text{(potência média),} \qquad (31\text{-}76)$$

onde o termo $\cos\phi$ recebe nome de **fator de potência**. Como $\cos\phi = \cos(-\phi)$, a Eq. 31-76 é independente do sinal da constante de fase ϕ.

Para maximizar a taxa com a qual a energia é fornecida a uma carga resistiva em um circuito *RLC* devemos manter o fator de potência o mais próximo possível da unidade. Isso equivale a manter a constante de fase ϕ da Eq. 31-29 o mais próximo possível de zero. Se, por exemplo, o circuito é altamente indutivo pode ser tornado menos indutivo ligando um capacitor adicional em série com o circuito. (Lembre-se de que colocar uma capacitância em série com uma capacitância já existente reduz a capacitância total C_{eq} e que a reatância capacitiva é inversamente proporcional à capacitância.) As empresas de energia elétrica costumam ligar capacitores em série com as linhas de transmissão para obter esse resultado.

TESTE 7 (a) Se a corrente em um circuito *RLC* série com excitação senoidal está adiantada em relação à força eletromotriz, devemos aumentar ou diminuir a capacitância para aumentar a taxa com a qual a energia é fornecida à resistência? (b) Essa mudança aproxima ou afasta a freqüência de ressonância do circuito da freqüência da força eletromotriz?

Exemplo 31-8

Um circuito *RLC* série, alimentado por uma fonte com $\mathscr{E}_{rms} = 120$ V e $f_d = 60{,}0$ Hz, contém uma resistência $R = 200\ \Omega$, uma indutância com $X_L = 80{,}0\ \Omega$ e uma capacitância com $X_C = 150\ \Omega$.

(a) Determine o fator de potência $\cos\phi$ e a constante de fase ϕ do circuito.

IDÉIA-CHAVE O fator de potência $\cos\phi$ pode ser calculado a partir da resistência R e da impedância Z através da Eq. 31-75 ($\cos\phi = R/Z$).

Cálculos: Para calcular Z, usamos a Eq. 31-61:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(200\ \Omega)^2 + (80{,}0\ \Omega - 150\ \Omega)^2} = 211{,}90\ \Omega.$$

A Eq. 31-75 nos dá

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{200\ \Omega}{211{,}90\ \Omega} = 0{,}9438 \approx 0{,}944. \qquad \text{(Resposta)}$$

Tomando o arco co-seno, obtemos:

$$\phi = \cos^{-1} 0{,}944 = \pm 19{,}3°.$$

Tanto $+19{,}3°$ como $-19{,}3°$ têm um co-seno de 0,944. Para determinar qual é o sinal correto temos que verificar se a corrente está adiantada ou atrasada em relação à força eletromotriz. Como $X_C > X_L$, este circuito é principalmente capacitivo, com a corrente adiantada em relação à força eletromotriz. Assim, o ângulo de fase ϕ deve ser negativo:

$$\phi = -19{,}3°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Poderíamos também ter usado a Eq. 31-65 para calcular ϕ. Nesse caso, uma calculadora forneceria a resposta já com o sinal negativo.

(b) Qual é a taxa média $P_{méd}$ com a qual a energia é dissipada na resistência?

IDÉIAS-CHAVE Existem duas idéias e duas formas de abordar o problema: (1) como estamos supondo que o circuito se encontra no regime estacionário, a taxa com a qual a energia é dissipada na resistência é igual à taxa com a qual a energia é fornecida ao circuito, que pode ser calculada com o auxílio da Eq. 31-76 ($P_{méd} = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \cos\phi$); (2) a taxa com a qual a energia é dissipada na resistência R pode ser calculada a partir do valor rms da corrente, I_{rms}, usando a Eq. 31-71 ($P_{méd} = I^2_{rms} R$).

Primeira abordagem: O valor rms da força eletromotriz, $\mathscr{E}_{rms}$, é um dos dados do problema, e o valor de $\cos\phi$ foi calculado no item (a). O valor de I_{rms} pode ser calculado a partir do valor rms da força eletromotriz e da impedância Z do circuito (que é conhecida) usando a Eq. 31-73:

$$I_{rms} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z}.$$

Substituindo esse resultado na Eq. 31-76, obtemos:

$$P_{méd} = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \cos\phi = \frac{\mathscr{E}^2_{rms}}{Z} \cos\phi$$
$$= \frac{(120\ \text{V})^2}{211{,}90\ \Omega}(0{,}9438) = 64{,}1\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Segunda abordagem: Temos:

$$P_{méd} = I^2_{rms} R = \frac{\mathscr{E}^2_{rms}}{Z^2} R$$
$$= \frac{(120\ \text{V})^2}{(211{,}90\ \Omega)^2}(200\ \Omega) = 64{,}1\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Que novo valor de capacitância C_{nova} deve ser usado no circuito para maximizar $P_{méd}$ sem mudar os outros parâmetros do circuito?

IDÉIAS-CHAVE (1) A taxa média $P_{méd}$ com a qual a energia é fornecida e dissipada é máxima quando o circuito está em ressonância com a força eletromotriz aplicada. (2) A ressonância acontece quando $X_C = X_L$.

Cálculos: De acordo com os dados do problema temos $X_C > X_L$. Assim, precisamos reduzir X_C para conseguir a ressonância. De acordo com a Eq. 31-39 ($X_C = 1/\omega_d C$), isso significa que o novo valor de capacitância deve ser maior que o anterior.

De acordo com a Eq. 31-39, a condição $X_C = X_L$ pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{\omega_d C_{nova}} = X_L.$$

Substituindo ω_d por $2\pi f_d$ (porque conhecemos f_d e não ω_d) e explicitando C_{nova}, obtemos:

$$C_{nova} = \frac{1}{2\pi f_d X_L} = \frac{1}{(2\pi)(60\ \text{Hz})(80{,}0\ \Omega)}$$
$$= 3{,}32 \times 10^{-5}\ \text{F} = 33{,}2\ \mu\text{F}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando o mesmo método do item (b), é possível mostrar que com o novo valor de capacitância, C_{nova}, $P_{méd}$ atinge o valor máximo de 72,0 W.

31-11 | Transformadores

Necessidades de um Sistema de Transmissão de Energia Elétrica

Quando a carga de um circuito de corrente alternada é uma resistência pura o fator de potência da Eq. 31-76 é $\cos 0° = 1$ e a força eletromotriz aplicada $\mathscr{E}_{rms}$ é igual à tensão V_{rms} entre os terminais da carga. Assim, com uma corrente I_{rms} na carga, a

energia é fornecida e dissipada a uma taxa média de

$$P_{\text{méd}} = \mathscr{E}I = IV. \tag{31-77}$$

(Na Eq. 31-77 e no resto desta seção vamos adotar a prática usual de omitir os índices que indicam tratar-se de grandezas rms. A menos que seja dito explicitamente o contrário, os cientistas e engenheiros supõem que os valores de todas as correntes e tensões alternadas são valores rms, já que são esses os valores indicados pelos instrumentos de medida.) A Eq. 31-77 mostra que para satisfazer uma dada necessidade de energia temos uma larga faixa de opções, desde uma alta corrente I com uma baixa tensão V até uma baixa corrente I com uma alta tensão V; o que importa, em termos de potência fornecida à carga, é o produto IV.

Nos sistemas de distribuição de energia elétrica é desejável, por razões de segurança e para maior eficiência dos equipamentos, que a tensão seja relativamente baixa tanto na ponta da geração (nas usinas de energia elétrica) como na ponta do consumo (nas residências e indústrias). Ninguém acharia razoável que uma torradeira ou um trem elétrico de brinquedo fosse alimentado com 10 kV. Por outro lado, na transmissão de energia elétrica da usina de geração até o consumidor final é desejável trabalhar com a menor corrente possível (e, portanto, a maior tensão possível) para minimizar as perdas do tipo I^2R (conhecidas como *perdas ôhmicas*) nas linhas de transmissão.

Como exemplo, considere a linha de 735 kV usada para transmitir energia elétrica da usina hidrelétrica La Grande 2, em Quebec, para a cidade de Montreal, situada a 1000 km de distância. Suponha que a corrente é 500 A e o fator de potência é próximo da unidade. Nesse caso, de acordo com a Eq. 31-77, a potência elétrica fornecida pela usina é

$$P_{\text{méd}} = \mathscr{E}I = (7{,}35 \times 10^5\ \text{V})(500\ \text{A}) = 368\ \text{MW}.$$

A resistência da linha de transmissão é da ordem de 0,220 Ω/km; assim, a resistência total para o percurso de 1000 km é 220 Ω. A potência dissipada na linha devido a essa resistência é

$$P_{\text{méd}} = I^2R = (500\ \text{A})^2(220\ \Omega) = 55{,}0\ \text{MW},$$

o que corresponde a quase 15% da potência total transmitida.

Imagine o que aconteceria se multiplicássemos a corrente por dois e reduzíssemos a tensão à metade. A potência fornecida pela usina continuaria a mesma, 368 MW, mas a potência dissipada na linha de transmissão passaria a ser

$$P_{\text{méd}} = I^2R = (1000\ \text{A})^2(220\ \Omega) = 220\ \text{MW},$$

o que corresponde a *quase 60%* da potência total transmitida. É por isso que existe uma regra geral para as linhas de transmissão de energia elétrica: usar a maior tensão possível e a menor corrente possível.

O Transformador Ideal

A regra da transmissão de energia elétrica leva a uma incompatibilidade entre as necessidades para a transmissão eficiente de energia elétrica e as necessidades para a geração e consumo seguros e eficientes. Para resolver o problema precisamos de um dispositivo que seja capaz de aumentar (para a transmissão) e diminuir (para o consumo) os valores de tensão nos circuitos, mantendo o produto corrente × tensão praticamente constante. Esse dispositivo é o **transformador**, que não tem partes móveis, utiliza a lei de indução de Faraday e não funciona com corrente contínua.

FIG. 31-18 Um transformador ideal, formado por duas bobinas enroladas em um núcleo de ferro, ligado a uma fonte e uma carga. Um gerador de corrente alternada produz uma corrente no enrolamento da esquerda (o *primário*). O enrolamento da direita (o *secundário*) é ligado à carga resistiva R quando a chave S é fechada.

O *transformador ideal* da Fig. 31-18 é formado por duas bobinas, com diferentes números de espiras, enroladas em um mesmo núcleo de ferro. (Não existe contato elétrico entre as bobinas e o núcleo.) O enrolamento primário, com N_p espiras, está ligado a um gerador de corrente alternada cuja força eletromotriz $\mathscr{E}$ é dada por

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega t. \tag{31-78}$$

O enrolamento secundário, com N_s espiras, está ligado a uma resistência de carga R, mas não há corrente no circuito se a chave S estiver aberta (vamos supor por en-

quanto que isso é verdade). Vamos supor também que, como se trata de um transformador ideal, a resistência dos enrolamentos primário e secundário é insignificante. Nos transformadores bem projetados, de alta capacidade, a dissipação de energia pode ser menor que 1%; assim, essa hipótese é razoável.

Nessas condições, o enrolamento primário (ou simplesmente *primário*) do transformador se comporta como uma indutância pura, e o circuito primário é semelhante ao da Fig. 31-12. Assim, a (pequena) corrente do primário, também chamada de *corrente de magnetização* I_{mag}, está atrasada de 90° em relação à tensão V_p do primário; o fator de potência do primário (= cos ϕ na Eq. 31-76) é zero, e nenhuma potência é transferida do gerador para o transformador.

Entretanto, a pequena corrente alternada I_{mag} do primário produz um fluxo magnético alternado Φ_B no núcleo de ferro. O núcleo reforça esse fluxo e o transfere para o enrolamento secundário (ou simplesmente *secundário*) do transformador. Como Φ_B varia com o tempo, induz uma força eletromotriz $\mathscr{E}_{espira}$ (= $d\Phi_B/dt$) em cada espira do secundário. Na verdade, essa força eletromotriz por espira $\mathscr{E}_{espira}$ é a mesma no primário e no secundário. No primário a tensão V_p é o produto de $\mathscr{E}_{espira}$ pelo número de espiras do primário N_p; assim, $V_p = \mathscr{E}_{espira}N_p$. Analogamente, no secundário a tensão é $V_s = \mathscr{E}_{espira}N_s$. Assim, podemos escrever

$$\mathscr{E}_{espira} = \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s},$$

ou $$V_s = V_p \frac{N_s}{N_p} \quad \text{(transformação da tensão).} \tag{31-79}$$

Se $N_s > N_p$, o transformador é chamado de *transformador elevador de tensão*, já que, nesse caso, a tensão V_s no secundário é maior que a tensão V_p no primário. Se $N_s < N_p$, o transformador recebe o nome de *transformador abaixador de tensão*.

Até o momento, com a chave S aberta nenhuma energia é transferida do gerador para o resto do circuito. Vamos agora fechar a chave S para ligar o secundário à carga resistiva R. (No caso mais geral, a carga contém também elementos indutivos e capacitivos, mas estamos supondo que, neste caso, a carga é puramente resistiva.) Com a chave fechada existe uma transferência de energia do gerador para a carga. Vejamos por quê.

Várias coisas acontecem quando fechamos a chave S.

1. Uma corrente alternada I_s aparece no circuito secundário e uma potência I_s^2R (= V_s^2/R) passa a ser dissipada na carga resistiva.
2. Essa corrente produz um fluxo magnético alternado no núcleo de ferro; o fluxo induz (de acordo com a lei de Faraday e a lei de Lenz) uma força eletromotriz no primário que se opõe à força eletromotriz do gerador.
3. A tensão V_p do primário, porém, não pode mudar em resposta a essa nova força eletromotriz já que, de acordo com a regra das malhas, deve ser igual à força eletromotriz $\mathscr{E}$ do gerador.
4. Para manter a tensão V_p o gerador passa a produzir, além de I_{mag}, uma corrente I_p no circuito primário; a amplitude e a fase de I_p são tais que a força eletromotriz induzida por I_p no primário cancela exatamente a força eletromotriz induzida no primário por I_s. Como a constante de fase de I_p não é 90°, como a constante de fase de I_{mag}, a corrente I_p pode transferir energia do gerador para o primário.

Estamos interessados em calcular a relação entre I_s e I_p. Entretanto, em vez de analisar com detalhes o funcionamento do transformador vamos simplesmente aplicar a lei de conservação da energia. A potência elétrica transferida do gerador para o primário é igual a V_pI_p. A potência recebida pelo secundário (através do campo magnético que enlaça os dois enrolamentos) é V_sI_s. Como estamos supondo que o transformador é ideal nenhuma energia é dissipada nos enrolamentos e, portanto, de acordo com a lei de conservação da energia,

$$I_pV_p = I_sV_s.$$

Substituindo V_s por seu valor, dado pela Eq. 31-79, temos:

$$I_s = I_p \frac{N_p}{N_s} \quad \text{(transformação da corrente).} \tag{31-80}$$

De acordo com esta equação a corrente I_s no secundário pode ser muito diferente da corrente I_p no primário, dependendo da *relação de espiras* N_p/N_s.

A corrente I_p aparece no circuito primário por causa da carga resistiva R no circuito secundário. Para calcular I_p fazemos $I_s = V_s/R$ na Eq. 31-80 e substituímos V_s por seu valor, dado pela Eq. 31-79. O resultado é o seguinte:

$$I_p = \frac{1}{R}\left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2 V_p. \tag{31-81}$$

Esta equação é da forma $I_p = V_p/R_{eq}$, onde a resistência equivalente R_{eq} é dada por

$$R_{eq} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R. \tag{31-82}$$

A resistência R_{eq} é o valor da resistência de carga "do ponto de vista" do gerador; o gerador produz uma corrente I_p e uma tensão V_p como se estivesse ligado a uma resistência R_{eq}.

Casamento de Impedâncias

A Eq. 31-82 sugere outra aplicação para o transformador. Nos circuitos de corrente contínua, para que a transferência de energia de uma fonte para uma carga seja máxima a resistência interna da fonte deve ser igual à resistência da carga. A mesma relação se aplica a circuitos de corrente alternada, exceto pelo fato de que neste caso são as *impedâncias* (e não as resistências) que devem ser iguais. Em muitos casos essa condição não é satisfeita. Nos aparelhos de som, por exemplo, a saída do amplificador tem uma alta impedância e a entrada dos alto-falantes tem uma baixa impedância. Podemos casar as impedâncias de dois dispositivos ligando-os através de um transformador com uma relação de espiras apropriada.

A Atividade Solar e as Redes de Transmissão de Energia Elétrica

Em uma *erupção solar* um grande anel de elétrons e prótons se projeta da superfície do Sol, como na fotografia que abre este capítulo. Algumas erupções solares terminam em uma explosão na qual as partículas carregadas são arremessadas para o espaço. Em 10 de março de 1989 uma gigantesca erupção solar enviou uma grande quantidade de partículas na direção da Terra. Quando as partículas chegaram, três dias depois, produziram uma corrente de 10^6 A, conhecida como *eletrojato*, na atmosfera superior do Hemisfério Norte.

Como constitui uma corrente elétrica, o eletrojato produz um campo magnético $\vec{B}$ nas vizinhanças, incluindo a superfície da Terra. Usando a regra da mão direita da Fig. 29-4 vemos que o eletrojato da Fig. 31-19 produz uma componente do campo magnético B_x paralela à superfície da Terra, perpendicular à linha de transmissão mostrada na figura. Nas extremidades da linha existem transformadores abaixadores ou elevadores de tensão ligados à Terra. Observe que a linha de transmissão, a Terra e os fios que ligam a Terra aos transformadores formam uma espira condutora. Um fluxo magnético Φ associado à componente B_x do campo atravessa essa espira.

O eletrojato varia com o tempo, e as variações resultantes de Φ induzem uma força eletromotriz e uma corrente na espira. A corrente i_{CGI}, conhecida como corrente geomagneticamente induzida, circula na linha de transmissão e também (o que é mais importante) nos transformadores.

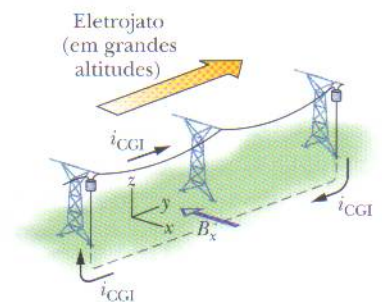



FIG. 31-19 Um eletrojato (uma corrente elétrica) na ionosfera produz um campo magnético B_x que atravessa uma espira vertical formada por uma linha de transmissão, a Terra e os fios de aterramento dos transformadores. (Os transformadores ficam no interior dos cilindros localizados nas extremidades da linha de transmissão.) Variações de B_x induzem uma corrente i_{CGI} na espira.

A transmissão de energia nas redes de energia elétrica depende das variações senoidais da corrente e da tensão em todo o sistema. A presença de i_{CGI} em um transformador impede que o núcleo do transformador transfira as variações senoidais do primário para o secundário. Isso acontece porque o fluxo adicional associado à corrente i_{CGI} *satura* o núcleo, tornando-o incapaz de responder adequadamente às variações senoidais do primário. O resultado é que a corrente e a tensão no secundário deixam de ser senoidais, e essa distorção prejudica a transmissão de energia.

Em 13 de março de 1989 esse tipo de perturbação fez com que o sistema de distribuição de energia elétrica da província de Quebec entrasse em colapso. Atualmente, sempre que os astrônomos detectam uma grande quantidade de partículas carregadas a caminho da Terra os engenheiros responsáveis pela rede de distribuição de energia elétrica são alertados para a possibilidade de perturbações no funcionamento da rede.

TESTE 8 A fonte de alimentação alternada de um certo circuito tem uma resistência interna menor que a carga resistiva do circuito. Para aumentar a transferência de energia da fonte para a carga decidiu-se usar um transformador de casamento de impedâncias. (a) O valor de N_s deve ser maior ou menor que o valor de N_p? (b) Isso faz do transformador um transformador elevador de tensão ou um transformador abaixador de tensão?

Exemplo 31-9

Um transformador instalado em um poste funciona com $V_p = 8{,}5$ kV do lado do primário e fornece energia elétrica a várias casas das vizinhanças com $V_s = 120$ V; as duas tensões são valores rms. Suponha que o transformador seja ideal e a carga seja resistiva, o que significa que o fator de potência é unitário.

(a) Qual é a relação de espiras N_p/N_s do transformador?

IDÉIA-CHAVE A relação de espiras N_p/N_s está relacionada às tensões rms (conhecidas) do primário e do secundário através da Eq. 31-79 ($V_s = V_p N_s/N_p$).

Cálculo: A Eq. 31-79 pode ser escrita na forma

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}. \tag{31-83}$$

(Observe que o lado direito desta equação é o *inverso* da relação de espiras.) Invertendo ambos os membros da Eq. 31-83, temos:

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{8{,}5 \times 10^3\ \text{V}}{120\ \text{V}} = 70{,}83 \approx 71. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) A potência média consumida (dissipada) na casas atendidas pelo transformador é 78 kW. Quais são as correntes rms no primário e no secundário do transformador?

IDÉIA-CHAVE Como a carga é resistiva o fator de potência $\cos\phi$ é unitário e, portanto, a potência média fornecida e dissipada é dada pela Eq. 31-77 ($P_{méd} = \mathscr{E}I = IV$).

Cálculos: No circuito primário, com $V_p = 8{,}5$ kV, a Eq. 31-77 fornece

$$I_p = \frac{P_{méd}}{V_p} = \frac{78 \times 10^3\ \text{W}}{8{,}5 \times 10^3\ \text{V}} = 9{,}176\ \text{A} \approx 9{,}2\ \text{A}. \quad \text{(Resposta)}$$

No circuito secundário, temos:

$$I_s = \frac{P_{méd}}{V_s} = \frac{78 \times 10^3\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 650\ \text{A}. \quad \text{(Resposta)}$$

É fácil verificar que $I_s = I_p(N_p/N_s)$, como exige a Eq. 31-80.

(c) Qual é a carga resistiva R_s do circuito secundário? Qual é a carga correspondente R_p no circuito primário?

Primeira abordagem: Podemos usar a equação $V = IR$ para relacionar a carga resistiva à tensão e à corrente rms. No caso do circuito secundário, temos:

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{120\ \text{V}}{650\ \text{A}} = 0{,}1846\ \Omega \approx 0{,}18\ \Omega. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso do circuito primário, temos:

$$R_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{8{,}5 \times 10^3\ \text{V}}{9{,}176\ \text{A}} = 926\ \Omega \approx 930\ \Omega. \quad \text{(Resposta)}$$

Segunda abordagem: Podemos usar o fato de que R_p é a carga resistiva "do ponto de vista" do gerador, dada pela Eq. 31-82 [$R_{eq} = (N_p/N_s)^2 R$]. Fazendo $R_{eq} = R_p$ e $R = R_s$, temos:

$$R_p = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s = (70{,}83)^2(0{,}1846\ \Omega)$$

$$= 926\ \Omega \approx 930\ \Omega. \quad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Transferências de Energia em um Circuito *LC* Em um circuito LC oscilante, a energia é transferida periodicamente do campo elétrico do capacitor para o campo magnético do indutor e vice-versa; os valores instantâneos das duas formas de energia são

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{e} \quad U_B = \frac{Li^2}{2}, \qquad (31\text{-}1, 31\text{-}2)$$

onde q é a carga instantânea do capacitor e i é a corrente instantânea no indutor. A energia total U (= $U_E + U_B$) permanece constante.

Oscilações de Carga e de Corrente em um Circuito *LC* De acordo com a lei de conservação da energia,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(circuito } LC\text{)} \qquad (31\text{-}11)$$

é a equação diferencial das oscilações de um circuito LC (sem resistência). A solução da Eq. 31-11 é

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \quad \text{(carga)}, \qquad (31\text{-}12)$$

onde Q é a *amplitude da carga* (carga máxima do capacitor) e a freqüência angular ω das oscilações é dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (31\text{-}4)$$

A constante de fase ϕ da Eq. 31-12 é determinada pelas condições iniciais (em $t = 0$) do sistema.

A corrente i no sistema em um instante qualquer t é dada por

$$i = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(corrente)}, \qquad (31\text{-}13)$$

onde ωQ é a *amplitude da corrente I.*

Oscilações Amortecidas As oscilações de um circuito LC são amortecidas quando um elemento dissipativo R também está presente no circuito. Nesse caso, temos:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(circuito } RLC\text{)}. \qquad (31\text{-}24)$$

A solução desta equação diferencial é

$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi), \qquad (31\text{-}25)$$

onde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \qquad (31\text{-}26)$$

Consideramos apenas as situações em que R é pequeno e, portanto, o amortecimento é pequeno; nesse caso, $\omega' \approx \omega$.

Correntes Alternadas; Oscilações Forçadas Um circuito RLC série pode sofrer *oscilações forçadas* com uma *freqüência angular de excitação* ω_d se for submetido a uma força eletromotriz da forma

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m\,\text{sen}\,\omega_d t. \qquad (31\text{-}28)$$

A corrente produzida no circuito por essa força eletromotriz é dada por

$$i = I\,\text{sen}(\omega_d t - \phi), \qquad (31\text{-}29)$$

onde ϕ é a constante de fase da corrente.

Ressonância A amplitude I da corrente em um circuito RLC série excitado por uma força eletromotriz senoidal é máxima ($I = \mathscr{E}_m/R$) quando a freqüência angular de excitação ω_d é igual à freqüência angular natural ω do circuito (ou seja, na *ressonância*). Nesse caso, $X_C = X_L, \omega = 0$ e a corrente está em fase com a força eletromotriz.

Elementos Isolados A diferença de potencial alternada entre os terminais de um resistor tem uma amplitude $V_R = IR$; a corrente está em fase com a diferença de potencial.

No caso de um *capacitor*, $V_C = IX_C$, onde $X_C = 1/\omega_d C$ é a **reatância capacitiva**; a corrente está adiantada de 90° em relação à diferença de potencial ($\phi = -90° = -\pi/2$ rad).

No caso de um *indutor*, $V_L = IX_L$, onde $X_L = \omega_d L$ é a **reatância indutiva**; a corrente está atrasada de 90° em relação à diferença de potencial ($\phi = 90° = \pi/2$ rad).

Circuitos *RLC* Série No caso de um circuito RLC série com uma força eletromotriz dada pela Eq. 31-28 e uma corrente dada pela pela Eq. 31-29,

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}} \quad \text{(amplitude da corrente)} \qquad (31\text{-}60, 31\text{-}63)$$

e

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(constante de fase)}. \qquad (31\text{-}65)$$

Definindo a impedância Z do circuito como

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(impedância)} \qquad (31\text{-}61)$$

podemos escrever a Eq. 31-60 como $I = \mathscr{E}_m/Z$.

Potência Em um circuito RLC série, a **potência média** $P_{méd}$ fornecida pelo gerador é igual à potência média dissipada no resistor:

$$P_{méd} = I_{rms}^2 R = \mathscr{E}_{rms} I_{rms}\cos\phi, \qquad (31\text{-}71, 31\text{-}76)$$

onde rms significa **valor médio quadrático**. Os valores médios quadráticos estão relacionados aos valores máximos através das equações $I_{rms} = I/\sqrt{2}$, $V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$. e $\mathscr{E}_{rms} = \mathscr{E}_m/\sqrt{2}$. O termo $\cos\phi$ é chamado de **fator de potência** do circuito.

Transformadores Um *transformador* (considerado ideal) é um núcleo de ferro no qual são enroladas uma bobina primária de N_p espiras e uma bobina secundária de N_s espiras. Se a bobina primária é ligada a um gerador de corrente alternada as tensões no primário e no secundário estão relacionadas pela equação

$$V_s = V_p\frac{N_s}{N_p} \quad \text{(transformação da tensão)}. \qquad (31\text{-}79)$$

As correntes nas bobinas estão relacionadas pela equação

$$I_s = I_p\frac{N_p}{N_s} \quad \text{(transformação da corrente)}, \qquad (31\text{-}80)$$

e a resistência equivalente do circuito secundário, do ponto de vista do gerador, é dada por

$$R_{eq} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R, \qquad (31\text{-}82)$$

onde R é a carga resistiva do circuito secundário. A razão N_p/N_s é chamada de *relação de espiras*.

PERGUNTAS

1 Um capacitor carregado e um indutor são ligados para formar um circuito fechado no instante $t = 0$. Em termos do período T das oscilações resultantes, determine o tempo necessário para que as seguintes grandezas passem por um máximo pela primeira vez: (a) U_B; (b) o fluxo magnético no indutor; (c) di/dt; (d) a força eletromotriz no indutor.

2 Que valores da constante de fase ϕ da Eq. 31-12 permitem que as situações (*a*), (*c*), (*e*) e (*g*) da Fig. 31-1 ocorram no instante $t = 0$?

3 A Fig. 31-20 mostra três circuitos *LC* oscilantes com indutores e capacitores iguais. Coloque os circuitos na ordem do tempo necessário para que os capacitores se descarreguem totalmente, começando pelo maior.

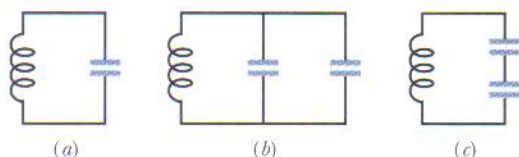



FIG. 31-20 Pergunta 3.

4 A Fig. 31-21 mostra os gráficos da tensão v_C do capacitor em dois circuitos *LC* que contêm capacitâncias iguais e têm a mesma carga máxima Q. (a) A indutância L do circuito 1 é maior, menor ou igual à do circuito 2? (b) A corrente I no circuito 1 é maior, menor ou igual à corrente no circuito 2?

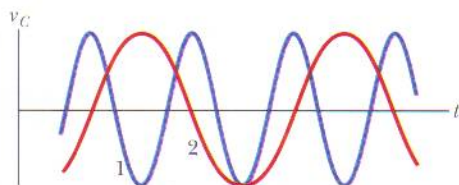



FIG. 31-21 Pergunta 4.

5 A curva *a* da Fig. 31-22 mostra a impedância Z de um circuito *RC* excitado em função da freqüência angular de excitação ω_d. As outras duas curvas são semelhantes, mas foram traçadas para valores diferentes da resistência R e da capacitância C. Coloque as três curvas na ordem do valor correspondente de R, começando pelo maior.

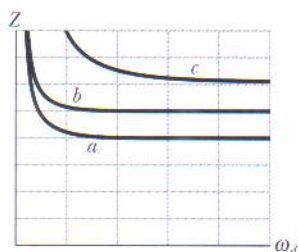



FIG. 31-22 Pergunta 5.

6 As cargas dos capacitores de três circuitos *LC* oscilantes variam segundo as equações (1) $q = 2 \cos 4t$; (2) $q = 4 \cos t$; (3) $q = 3 \cos 4t$ (com q em coulombs e t em segundos). Coloque os circuitos na ordem (a) da amplitude da corrente e (b) do período, começando pelo maior valor.

7 Uma fonte de força eletromotriz alternada com uma certa amplitude é ligada sucessivamente a um resistor, um capacitor e um indutor. Depois que a fonte é ligada faz-se variar a freqüência de excitação f_d, e a amplitude I da corrente resultante é medida e plotada. Estabeleça a correspondência entre as curvas da Fig. 31-23 e os dispositivos.

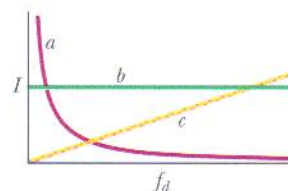



FIG. 31-23 Pergunta 7.

8 A Fig. 31-24 mostra a corrente i e a força eletromotriz $\mathscr{E}$ em um circuito *RLC* série. (a) A corrente está adiantada ou atrasada em relação à força eletromotriz? (b) A carga do circuito é principalmente capacitiva ou principalmente indutiva? (c) A freqüência angular ω_d da força eletromotriz é maior ou menor que a freqüência angular natural ω?

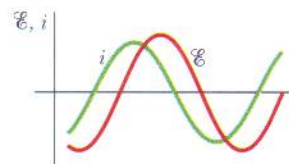



FIG. 31-24 Perguntas 8 e 9.

9 A Fig. 31-24 mostra a corrente i e a força eletromotriz aplicada $\mathscr{E}$ para um circuito *RLC* série. (a) A curva da corrente é deslocada para a esquerda ou para a direita em relação à curva da força eletromotriz, e a amplitude da curva é maior ou menor se o valor de L aumenta ligeiramente? (b) Responda às mesmas perguntas para o valor de C. (c) Responda às mesmas perguntas para o valor de ω_d.

10 Os valores da constante de fase ϕ para quatro circuitos *RLC* série com excitação senoidal são (1) $-15°$, (2) $35°$, (3) $\pi/3$ rad e (4) $-\pi/6$ rad. (a) Em que circuito(s) a carga é principalmente capacitiva? (b) Em que circuito(s) a corrente está atrasada em relação à força eletromotriz?

11 A Fig. 31-25 mostra a corrente i e a força eletromotriz de excitação $\mathscr{E}$ de um circuito *RLC* série. (a) A constante de fase é positiva ou negativa? (b) Para aumentar a potência transferida para a carga resistiva é preciso aumentar ou diminuir o valor de L? (c) A outra possibilidade é aumentar ou diminuir o valor de C?

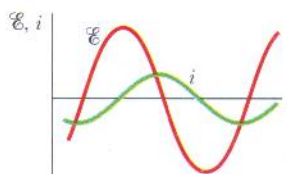



FIG. 31-25 Pergunta 11.

12 A Fig. 31-26 mostra três situações como as da Fig. 31-15. (a) A freqüência angular de excitação é maior, menor ou igual à freqüência angular de ressonância do circuito na situação 1? (b) Responda à mesma pergunta para a situação 2. (c) Responda à mesma pergunta para a situação 3.

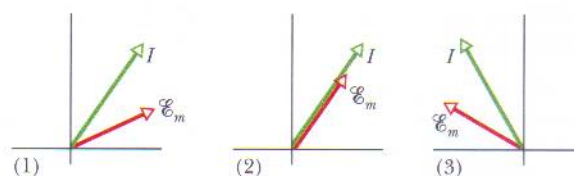



FIG. 31-26 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 31-2 Oscilações em um Circuito *LC*: Análise Qualitativa

•1 Em um certo circuito LC oscilante a energia total é convertida de energia elétrica no capacitor em energia magnética no indutor em 1,50 μs. Determine (a) o período das oscilações; (b) a freqüência das oscilações. (c) Se a energia magnética é máxima em um certo instante, quanto tempo é necessário para que seja máxima novamente?

•2 Qual é a capacitância de um circuito LC oscilante se a carga máxima do capacitor é 1,60 μC e a energia total é 140 μJ?

•3 Em um circuito LC oscilante, $L = 1{,}10$ mH e $C = 4{,}00$ μF. A carga máxima do capacitor é 3,00 μC. Determine a corrente máxima.

•4 A freqüência de oscilação de um certo circuito LC é 200 kHz. No instante $t = 0$ a placa A do capacitor está com a carga positiva máxima. Determine em que instante $t > 0$ (a) a placa estará novamente, pela primeira vez, com a carga positiva máxima; (b) a outra placa do capacitor estará pela primeira vez com a carga positiva máxima; (c) o indutor estará pela primeira vez com o campo magnético máximo.

•5 Um circuito LC oscilante é formado por um indutor de 75,0 mH e um capacitor de 3,60 μF. Se a carga máxima do capacitor é 2,90 μC, determine (a) a energia total presente no circuito; (b) a corrente máxima.

seção 31-3 Analogia Eletromecânica

•6 Um corpo de 0,50 kg oscila em movimento harmônico simples preso a uma mola que, quando distendida de 2,00 mm em relação à posição de equilíbrio, possui uma força restauradora de 8,0 N. Determine (a) a freqüência angular de oscilação; (b) o período de oscilação; (c) a capacitância de um circuito LC com o mesmo período, com $L = 5{,}0$ H.

••7 A energia de um circuito LC oscilante que contém um indutor de 1,25 H é 5,70 μJ. A carga máxima do capacitor é 175 μC. Para um sistema mecânico com o mesmo período, determine (a) a massa; (b) a constante da mola; (c) o deslocamento máximo; (d) a velocidade escalar máxima.

seção 31-4 Oscilações em um Circuito *LC*: Análise Quantitativa

•8 Osciladores LC têm sido usados em circuitos ligados a alto-falantes para criar alguns dos sons da música eletrônica. Que indutância deve ser usada com um capacitor de 6,7 μF para produzir uma freqüência de 10 kHz, que fica aproximadamente na metade da faixa de freqüências audíveis?

•9 Em um circuito LC oscilante com $L = 50$ mH e $C = 4{,}0$ μF a corrente está inicialmente no máximo. Quando tempo é necessário para que o capacitor se carregue totalmente pela primeira vez?

•10 Um circuito com uma única malha é formado por indutores ($L_1, L_2, \ldots$), capacitores ($C_1, C_2, \ldots$) e resistores ($R_1, R_2, \ldots$), como, por exemplo, na Fig. 31-27a. Mostre que, qualquer que seja a seqüência de elementos no circuito, o comportamento do circuito é idêntico ao do circuito LC simples da Fig. 31-21b. (*Sugestão:* Considere a regra das malhas e veja o Problema 47 do Capítulo 30.)

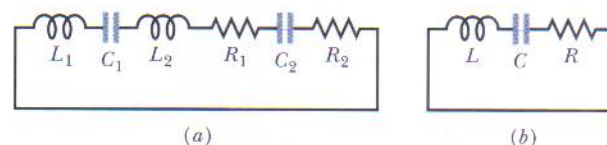



FIG. 31-27 Problema 10.

••11 Na Fig. 31-28, $R = 14{,}0$ Ω, $C = 6{,}20$ μF e $L = 54{,}0$ mH e a fonte ideal tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = 34{,}0$ V. A chave é mantida na posição a por um longo tempo antes de ser colocada na posição b. Determine (a) a freqüência e (b) a amplitude da corrente no circuito depois que a chave é colocada na posição b.

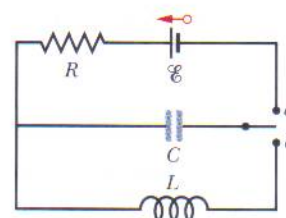



FIG. 31-28 Problema 11.

••12 Para montar um circuito LC oscilante você dispõe de um indutor de 10 mH, um capacitor de 5,0 μF e um capacitor de 2,0 μF. Determine (a) a menor freqüência; (b) a segunda menor freqüência; (c) a segunda maior freqüência; (d) a maior freqüência de oscilação que pode ser conseguida combinando esses elementos.

••13 Um circuito LC oscilante formado por um capacitor de 1,0 nF e um indutor de 3,0 mH tem uma tensão máxima de 3,0 V. Determine (a) a carga máxima do capacitor; (b) a corrente

máxima do circuito; (c) a energia máxima armazenada no campo magnético do indutor.

••14 Um indutor é ligado a um capacitor cuja capacitância pode ser ajustada através de um botão. Queremos que a freqüência desse circuito LC varie linearmente com o ângulo de rotação do botão, de 2×10^5 Hz até 4×10^5 Hz, quando o botão gira de 180°. Se $L = 1{,}0$ mH, plote a capacitância desejada C em função do ângulo de rotação do botão.

••15 Um capacitor variável de 10 a 365 pF e indutor formam um circuito LC de freqüência variável usado para sintonizar um receptor de rádio. (a) Qual é a razão entre a maior freqüência e a menor freqüência natural que pode ser obtida usando esse capacitor? Se o circuito deve ser usado para obter freqüências entre 0,54 MHz e 1,60 MHz, a razão calculada no item (a) é grande demais. A faixa de freqüências pode ser modificada ligando um capacitor em paralelo com o capacitor variável. (b) Qual deve ser o valor da capacitância adicional para que a faixa de freqüências seja a desejada? (c) Qual deve ser a indutância do indutor do circuito?

••16 Um circuito série formado por uma indutância L_1 e uma capacitância C_1 oscila com uma freqüência angular ω. Um segundo circuito série, contendo uma indutância L_2 e uma capacitância C_2, oscila com a mesma freqüência angular. Em temos de ω, qual é a freqüência angular de oscilação de um circuito série formado pelos quatro elementos? Despreze a resistência do circuito. (*Sugestão:* Use as expressões da capacitância equivalente e da indutância equivalente; veja a Seção 25-4 e o Problema 47 do Capítulo 30.)

••17 Em um circuito LC oscilante com $C = 64{,}0\ \mu$F a corrente é dada por $i = (1{,}60)\ \text{sen}(2500t + 0{,}680)$, onde t está em segundos, i em ampères e a constante de fase em radianos. (a) Quanto tempo após o instante $t = 0$ a corrente atinge o valor máximo? (b) Qual é o valor da indutância L? (c) Qual é a energia total?

••18 Em um circuito LC oscilante, quando uma energia igual a 75% da energia total está armazenada no campo magnético do indutor, determine (a) a porcentagem da carga máxima que está armazenada no capacitor; (b) a porcentagem da corrente máxima que está atravessando o indutor.

••19 Em um circuito LC oscilante, $L = 25{,}0$ mH e $C = 7{,}80\ \mu$F. No instante $t = 0$, a corrente é 9,20 mA, a carga do capacitor é 3,80 μC e o capacitor está sendo carregado. Determine (a) a energia total do circuito; (b) a carga máxima do capacitor; (c) a corrente máxima do circuito. (d) Se a carga do capacitor é dada por $q = Q \cos(\omega t + \phi)$, qual é o ângulo de fase ϕ? Suponha que os dados são os mesmos, exceto pelo fato de que o capacitor está sendo descarregado no instante $t = 0$. Qual é o valor de ϕ nesse caso?

••20 Em um circuito LC oscilante, a amplitude da corrente é 7,50 mA, a amplitude da tensão é 250 mV e a capacitância é 220 nF. Determine (a) o período de oscilação; (b) a energia máxima armazenada no capacitor; (c) a energia máxima armazenada no indutor; (d) a taxa máxima de variação da corrente; (e) a taxa máxima de aumento da energia do indutor.

••21 Em um circuito LC oscilante, $L = 3{,}00$ mH e $C = 2{,}70\ \mu$H. No instante $t = 0$ a carga do capacitor é zero e a corrente é 2,00 A. (a) Qual é a carga máxima do capacitor? (b) Em que instante de tempo $t > 0$ a taxa com a qual a energia é armazenada no capacitor é máxima pela primeira vez? (c) Qual é o valor dessa taxa?

••22 Em um circuito LC oscilante no qual $C = 4{,}00\ \mu$F, a diferença de potencial máxima entre os terminais do capacitor durante as oscilações é 1,50 V e a corrente máxima no indutor é 50,0 mA. Determine (a) a indutância L e (b) a freqüência das oscilações. (c) Qual é o tempo necessário para que a carga do capacitor aumente de zero até o valor máximo?

••23 Use a regra das malhas para obter a equação diferencial de um circuito LC (Eq. 31-11).

seção 31-5 Oscilações Amortecidas em um Circuito *RLC*

••24 Em um circuito RLC série oscilante, determine o necessário para que a energia máxima presente no capacitor durante uma oscilação diminua para a metade do valor inicial. Suponha que $q = Q$ em $t = 0$.

••25 Que resistência R deve ser ligada em série com uma indutância $L = 220$ mH e uma capacitância $C = 12{,}0\ \mu$F para que a carga máxima do capacitor caia para 99,0% do valor inicial após 50,0 ciclos? (Suponha que $\omega' \approx \omega$.)

••26 Um circuito de uma única malha é formado por um resistor de 7,20 Ω, um indutor de 12,0 H e um capacitor de 3,20 μF. Inicialmente, o capacitor possui uma carga de 6,20 μC e a corrente é zero. Calcule a carga do capacitor após N ciclos completos (a) para $N = 5$; (b) para $N = 10$; (c) para $N = 100$.

•••27 Em um circuito RLC oscilante, mostre que $\Delta U/U$, a fração da energia perdida por ciclo de oscilação, é dada com boa aproximação por $2\pi R/\omega L$. A grandeza $\omega L/R$ é chamada de Q do circuito (o Q significa *qualidade*). Um circuito de alto Q possui uma baixa resistência e uma baixa perda de energia ($= 2\pi/Q$) por ciclo.

seção 31-8 Três Circuitos Simples

•28 Um resistor de 50,0 Ω é ligado, como na Fig. 31-8, a um gerador de corrente alternada com $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V. Determine a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da força eletromotriz é (a) 1,00 kHz; (b) 8,00 kHz.

•29 (a) Em que freqüência um indutor de 6,0 mH e um capacitor de 10 μF têm a mesma reatância? (b) Qual é o valor dessa reatância? (c) Mostre que a freqüência é a freqüência natural de um circuito oscilador com esses valores de L e C.

•30 Um capacitor de 1,50 μF é ligado, como na Fig. 31-10, a um gerador de corrente alternada com $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V. Determine a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da força eletromotriz é (a) 1,00 kHz; (b) 8,00 kHz.

•31 Um indutor de 50,0 mH é ligado, como na Fig. 31-12, a um gerador de corrente alternada com $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V. Determine a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da força eletromotriz é (a) 1,00 kHz; (b) 8,00 kHz.

••32 Um gerador de corrente alternada com uma força eletromotriz $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \text{ sen } \omega_d t$, onde $\mathscr{E}_m = 25{,}0$ V e $\omega_d = 377$ rad/s, é ligado a um capacitor de 4,15 μF. (a) Qual é o valor máximo da corrente? (b) Qual é a força eletromotriz do gerador no instante em que a corrente é máxima? (c) Qual é a corrente quando a força eletromotriz é $-12{,}5$ e está aumentando em valor absoluto?

••33 Um gerador de corrente alternada tem uma força eletromotriz $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \text{ sen}(\omega_d t - \pi/4)$, onde $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V e $\omega_d = 350$ rad/s. A corrente produzida no circuito ao qual o gerador está ligado é $i(t) = I \text{ sen}(\omega_d t - 3\pi/4)$, onde $I = 620$ mA. Em que instante após $t = 0$ (a) a força eletromotriz do gerador atinge pela primeira vez o valor máximo e (b) a corrente atinge pela primeira vez o valor máximo? (c) O circuito contém um único elemento além do gerador. Trata-se de um capacitor, um indutor ou um resistor? Justifique sua resposta. (d) Qual é o valor da capacitância, indutância ou resistência desse elemento?

••**34** A força eletromotriz de um gerador de corrente alternada é dada por $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m$ sen $\omega_d t$, com $\mathscr{E}_m = 25{,}0$ V e $\omega_d = 377$ rad/s. O gerador é ligado a um indutor de 12,7 H. (a) Qual é o valor máximo da corrente? (b) Qual é a força eletromotriz do gerador no instante em que a corrente é máxima? (c) Qual é a corrente no instante em que a força eletromotriz do gerador é $-12{,}5$ V e está aumentando em valor absoluto?

seção 31-9 O Circuito *RLC* Série

•**35** Remova o indutor do circuito da Fig. 31-7 e faça $R = 200\ \Omega$, $C = 15{,}0\ \mu$F, $f_d = 60{,}0$ Hz e $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V. Determine o valor (a) de Z; (b) de ϕ; (c) de I. (d) Desenhe um diagrama fasorial.

•**36** A Fig. 31-29 mostra a amplitude I da corrente em função da freqüência angular de excitação ω_d de um circuito RLC. A escala do eixo vertical é definida por $I_s = 4{,}00$ A. A indutância é 200 μH e a amplitude da força eletromotriz é 8,0 V. Determine o valor (a) de C; (b) de R.

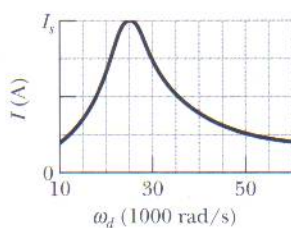



FIG. 31-29 Problema 36.

•**37** Remova o capacitor do circuito da Fig. 31-7 e faça $R = 200\ \Omega$, $L = 230$ mH, $f_d = 60{,}0$ Hz e $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V. Determine o valor (a) de Z; (b) de ϕ; (c) de I. (d) Desenhe um diagrama fasorial.

•**38** Uma fonte de corrente alternada de freqüência variável, um indutor de indutância L e um resistor de resistência R são ligados em série. A Fig. 31-30 mostra a impedância Z do circuito em função da freqüência de excitação ω_d, com a escala do eixo horizontal definida por $\omega_{ds} = 1600$ rad/s. A figura mostra também a reatância X_L do indutor em função de ω_d. Determine o valor (a) de R; (b) de L.

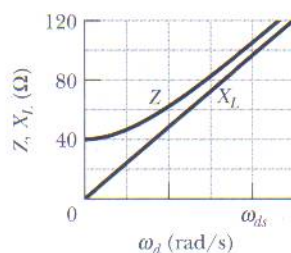



FIG. 31-30 Problema 38.

•**39** Na Fig. 31-7 faça $R = 200\ \Omega$, $C = 70{,}0\ \mu$F, $L = 230$ mH, $f_d = 60{,}0$ Hz e $\mathscr{E}_m = 36{,}0$ V. Determine o valor (a) de Z; (b) de ϕ; (c) de I. (d) Desenhe um diagrama fasorial.

•**40** Uma fonte alternada de freqüência variável, um capacitor de capacitância C e um resistor de resistência R são ligados em série. A Fig. 31-31 mostra a impedância Z do circuito em função da freqüência angular de excitação ω_d. A curva possui uma assíntota de 500 Ω e a escala do eixo horizontal definida por $\omega_{ds} = 300$ rad/s. A figura mostra também a reatância X_C do capacitor em função de ω_d. Determine o valor (a) de R; (b) de C.

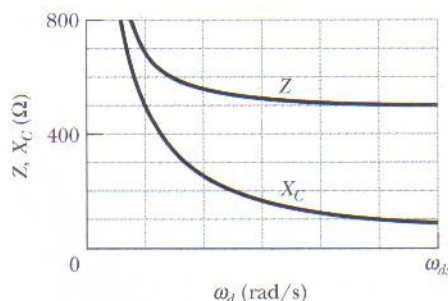



FIG. 31-31 Problema 40.

•**41** Um motor elétrico possui uma resistência efetiva de 32,0 Ω e uma reatância indutiva de 45,0 Ω quando está em carga. A tensão rms da fonte alternada é 420 V. Calcule a corrente rms.

•**42** Uma fonte alternada com uma força eletromotriz de 6,00 V e um ângulo de fase de 30,0° é ligada a um circuito RLC série. Quando a diferença de potencial entre os terminais do capacitor atinge o valor máximo positivo de 5,00 V, qual é a diferença de potencial entre os terminais do indutor (incluindo o sinal)?

•**43** Uma bobina com 88 mH de indutância e resistência desconhecida e um capacitor de 0,94 μF são ligados em série com um gerador cuja freqüência é 930 Hz. Se a constante de fase entre a tensão aplicada pelo gerador e a corrente no circuito é 75°, qual é a resistência da bobina?

••**44** Uma fonte alternada de freqüência variável f_d é ligada em série com um resistor de 50,0 Ω e um capacitor de 20,0 μF. A amplitude da força eletromotriz é 12,0 V. (a) Desenhe um diagrama fasorial para o fasor V_R (tensão do resistor) e para o fasor V_C (tensão do capacitor). (b) Para que freqüência de excitação f_d os dois fasores têm o mesmo comprimento? Para essa freqüência, determine (c) o ângulo de fase em graus, (d) a velocidade angular de rotação dos fasores e (e) a amplitude da corrente.

••**45** Um circuito RLC como o da Fig. 31-7 tem $R = 5{,}00\ \Omega$, $C = 20{,}0\ \mu$F, $L = 1{,}00$ H e $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V. (a) Para que freqüência angular ω_d a amplitude da corrente é máxima, como nas curvas de ressonância da Fig. 31-16? (b) Qual é este valor máximo? (c) Para que freqüência angular $\omega_{d1} < \omega_d$ a amplitude da corrente tem metade do valor máximo? (d) Para que freqüência angular $\omega_{d2} > \omega_d$ a amplitude da corrente tem metade do valor máximo? (e) Qual é o valor de $(\omega_{d2} - \omega_{d1})/\omega$, a largura de linha relativa a meia altura da curva de ressonância desse circuito?

••**46** A Fig. 31-32 mostra um circuito RLC, alimentado por um gerador, que possui dois capacitores iguais e duas chaves. A amplitude da força eletromotriz é 12,0 V e a freqüência do gerador é 60,0 Hz. Com as duas chaves abertas a corrente está adiantada 30,9° em relação à tensão. Com a chave S_1 fechada e a chave S_2 aberta a corrente está adiantada 15,0° em relação à tensão. Com as duas chaves fechadas a amplitude da corrente é 447 mA. Determine o valor (a) de R; (b) de C; (c) de L.

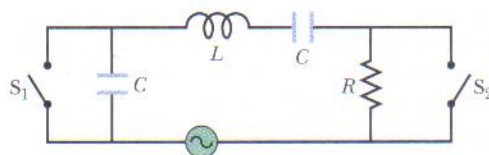



FIG. 31-32 Problema 46.

••47 (a) Em um circuito RLC a amplitude da tensão entre os terminais do indutor pode ser maior que a força eletromotriz do gerador? (b) Considere um circuito RLC com $\mathscr{E}_m = 10$ V, $R = 10\ \Omega$, $L = 1{,}0$ H e $C = 1{,}0\ \mu$F. Determine a amplitude da tensão entre os terminais do indutor na freqüência de ressonância.

••48 Uma fonte de força eletromotriz alternada de freqüência variável f_d é ligada em série com um resistor de $80{,}0\ \Omega$ e um indutor de 40,0 mH. A amplitude da força eletromotriz é 6,00 V. (a) Desenhe um diagrama fasorial para o fasor V_R (a tensão no resistor) e o fasor V_L (a tensão no indutor). (b) Para que freqüência de excitação f_d os dois fasores têm o mesmo comprimento? Para essa freqüência de excitação, determine (c) o ângulo de fase em graus; (d) a velocidade angular de rotação dos fasores; (e) a amplitude da corrente.

••49 A largura de linha relativa a meia altura $\Delta\omega_d/\omega$ de uma curva de ressonância como as que aparecem na Fig. 31-16 é a largura de linha na metade do valor máximo de I dividida pela freqüência angular de ressonância. Mostre que $\Delta\omega_d/\omega = R(3C/L)^{1/2}$, onde ω é a freqüência angular de ressonância. Observe que a razão $\Delta\omega_d/\omega$ aumenta com R, como mostra a Fig. 31-16.

••50 Um gerador de corrente alternada com $\mathscr{E}_m = 220$ V e $f_d = 400$ Hz produz oscilações em um circuito RLC série com $R = 220\ \Omega$, $L = 150$ mH e $C = 24{,}0\ \mu$F. Determine (a) a reatância capacitiva X_C; (b) a impedância Z; (c) a amplitude I da corrente. Um segundo capacitor com a mesma capacitância é ligado em série com os outros componentes. Determine se o valor de (d) X_C, (e) Z e (f) I aumenta, diminui ou permanece o mesmo.

••51 Na Fig. 31-33 um gerador de freqüência ajustável é ligado a um circuito formado pela resistência $R = 100\ \Omega$, as indutâncias $L_1 = 1{,}70$ mH e $L_2 = 2{,}30$ mH e as capacitâncias $C_1 = 4{,}00\ \mu$F, $C_2 = 2{,}50\ \mu$F e $C_3 = 3{,}50\ \mu$F. (a) Qual é a freqüência de ressonância do circuito? (*Sugestão:* Veja o Problema 47 do Capítulo 30.) Determine o que acontece com a freqüência de ressonância (b) quando R aumenta; (c) quando L_1 aumenta; (d) quando C_3 é removido do circuito.

FIG. 31-33 Problema 51.

seção 31-10 Potência em Circuitos de Corrente Alternada

•52 Qual é o valor máximo de uma tensão alternada cujo valor rms é 100 V?

•53 Que corrente contínua produz a mesma energia térmica, em um certo resistor, que uma corrente alternada com um valor máximo de 2,60 A?

•54 Um voltímetro de ca com uma alta impedância é ligado sucessivamente aos terminais de um indutor, aos terminais de um capacitor e aos terminais de um resistor em um circuito série ao qual é aplicada uma força eletromotriz alternada de 100 V (rms); nos três casos, o instrumento fornece a mesma leitura em volts. Qual é essa leitura?

•55 Um aparelho de ar condicionado ligado a uma tomada de 120 V rms é equivalente a uma resistência de $12{,}0\ \Omega$ e uma reatância indutiva de $1{,}30\ \Omega$ ligadas em série. Determine (a) a impedância do aparelho e (b) a potência consumida pelo aparelho.

••56 Mostre que a potência dissipada na resistência R da Fig. 31-34 é máxima quando R é igual à resistência r do gerador de corrente alternada. (Na discussão do texto, supusemos tacitamente que $r = 0$.)

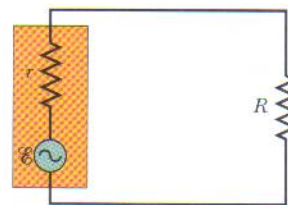



FIG. 31-34 Problemas 56 e 88.

••57 A Fig. 31-35 mostra um gerador de corrente alternada ligado aos terminais de uma "caixa-preta". A caixa contém um circuito RLC, possivelmente com mais de uma malha, cujos elementos e ligações são desconhecidos. Medidas realizadas do lado de fora da caixa revelam que

$$\mathscr{E}(t) = (75{,}0\text{ V})\text{ sen }\omega_d t$$

e

$$i(t) = (1{,}20\text{ A})\text{ sen}(\omega_d t + 42{,}0°).$$

(a) Qual é o fator de potência? (b) A corrente está adiantada ou atrasada em relação à força eletromotriz? (c) O circuito no interior da caixa é principalmente indutivo ou principalmente capacitivo? (d) O circuito no interior da caixa está sendo excitado na freqüência de ressonância? (e) Deve haver um capacitor no interior da caixa? (f) Deve haver um indutor no interior da caixa? (g) Deve haver um resistor no interior da caixa? (h) Qual é a potência fornecida à caixa pelo gerador? (i) Por que não é preciso conhecer o valor de ω_d para responder a essas perguntas?

FIG. 31-35 Problema 57.

••58 Em um circuito RLC série oscilante, $R = 16{,}0\ \Omega$, $C = 31{,}2\ \mu$F, $L = 9{,}20$ mH e $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m$ sen $\omega_d t$ com $\mathscr{E}_m = 45{,}0$ V e $\omega_d = 3000$ rad/s. No instante $t = 0{,}442$ ms, determine (a) a taxa P_G com a qual a energia está sendo fornecida pelo gerador; (b) a taxa P_C com a qual a energia do capacitor está variando; (c) a taxa P_L com a qual a energia do indutor está variando; (d) a taxa P_R com a qual a energia está sendo dissipada no resistor. (e) A soma de P_C, P_L e P_R é maior, menor ou igual a P_G?

••59 Em um circuito RLC como o da Fig. 31-7, suponha que $R = 5{,}00\ \Omega$, $L = 60{,}0$ mH, $f_d = 60{,}0$ Hz e $\mathscr{E}_m = 30{,}0$ V. (a) Para que valores de capacitância a potência dissipada na resistência é máxima? (b) Para que valores de capacitância a potência dissipada na resistência é mínima? Determine (c) a dissipação máxima; (d) o ângulo de fase correspondente; (e) o fator de potência correspondente. Determine também (f) a dissipação mínima; (g) o ângulo de fase correspondente; (h) o fator de potência correspondente.

••60 Um *dimmer* típico, como os que são usados para regular a luminosidade das lâmpadas do palco nos teatros, é composto por

um indutor variável L (cuja indutância pode ser ajustada entre zero e $L_{máx}$) ligado em série com uma lâmpada B, como mostra a Fig. 31-36. O circuito é alimentado com uma tensão de 120 V rms, 60 Hz; a lâmpada é de 120 V, 1000 W. (a) Qual deve ser o valor de $L_{máx}$ para que a potência dissipada na lâmpada possa variar entre 200 e 1000 W? Suponha que a resistência da lâmpada é independente da temperatura. (b) É possível usar um resistor variável (ajustável entre zero e $R_{máx}$) em vez de um indutor? (c) Nesse caso, qual deve ser o valor de $R_{máx}$? (d) Por que não se usa esse método?

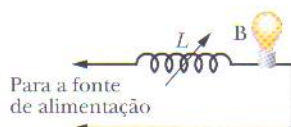



FIG. 31-36 Problema 60.

••61 Na Fig. 31-7, $R = 15{,}0\ \Omega$, $C = 4{,}70\ \mu F$ e $L = 25{,}0$ mH. O gerador produz uma força eletromotriz com uma tensão rms de 75,0 V e uma freqüência de 550 Hz. (a) Qual é a corrente rms? Determine a tensão rms (b) em R; (c) em C; (d) em L; (e) em C e L juntos; (f) em R, C e L juntos. Determine a potência média dissipada (g) em R; (h) em C; (i) em L.

seção 31-11 Transformadores

•62 A Fig. 31-37 mostra um "autotransformador". Neste dispositivo uma bobina com três terminais é enrolada em um núcleo de ferro. Entre os terminais T_1 e T_2 existem 200 espiras e entre os terminais T_2 e T_3 existem 800 espiras. Qualquer par de terminais pode ser escolhido como terminais do primário e qualquer par de terminais pode ser escolhido como terminais do secundário. Para as escolhas que resultam em um transformador elevador de tensão, determine (a) o menor valor da razão V_s/V_p; (b) o segundo menor valor da razão V_s/V_p; (c) o maior valor da razão V_s/V_p. Para as escolhas que resultam em um transformador abaixador de tensão, determine (d) o menor valor da razão V_s/V_p; (e) o segundo menor valor da razão V_s/V_p; (f) o maior valor da razão V_s/V_p.

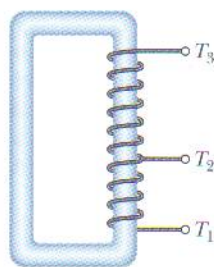



FIG. 31-37 Problema 62.

•63 Um transformador possui 500 espiras no primário e 10 espiras no secundário. (a) Se V_p é 120 V (rms), quanto é V_s, com o secundário em circuito aberto? Se o secundário está ligado a uma carga resistiva de 15 Ω, determine (b) a corrente no primário; (c) a corrente no secundário.

•64 Um gerador fornece 100 V ao enrolamento primário de um transformador, que possui 50 espiras. Se o enrolamento secundário possui 500 espiras, qual é a tensão no secundário?

••65 Um gerador de corrente alternada fornece uma força eletromotriz a uma carga resistiva situada em uma fábrica distante através de uma linha de transmissão de dois cabos. Na fábrica um transformador abaixador de tensão reduz a tensão do valor de transmissão V_t (rms) para um valor muito menor, que é mais seguro e conveniente para ser usado na fábrica. A resistência da linha de transmissão é 0,30 Ω/cabo e a potência do gerador é 250 kW. Se $V_t = 80$ kV, determine (a) a queda de tensão ΔV na linha de transmissão e (b) a potência P_d dissipada na linha. Se $V_t = 8{,}0$ kV, determine o valor (c) de ΔV; (d) de P_d. Se $V_t = 0{,}80$ kV, determine o valor (e) de ΔV; (f) de P_d.

Problemas Adicionais

66 Um motor elétrico ligado a uma tomada de 120 V, 60 Hz desenvolve uma potência mecânica de 0,100 hp (1 hp = 746 W). (a) Se o motor consome uma corrente rms de 0,650 A, qual é sua resistência efetiva em relação à transferência de energia? (b) Essa resistência efetiva é igual à resistência dos enrolamentos do motor, medida com um ohmímetro com o motor desligado da tomada?

67 Na Fig. 31-38 um gerador trifásico G produz energia elétrica, que é transmitida através de três fios. Os potenciais nos três fios (em relação a uma referência comum) são $V_1 = A \operatorname{sen} \omega_d t$ para o fio 1, $V_2 = A \operatorname{sen}(\omega_d t - 120°)$ para o fio 2 e $V_3 = A \operatorname{sen}(\omega_d t - 240°)$ para o fio 3. Alguns equipamentos industriais pesados (motores, por exemplo) possuem três terminais e são projetados para serem ligados diretamente a esses três fios. Para usar um dispositivo mais convencional de dois terminais (uma lâmpada, por exemplo), basta ligar o dispositivo a dois dos três fios. Mostre que a diferença de potencial entre *dois fios quaisquer* (a) oscila senoidalmente com freqüência angular ω_d; (b) tem uma amplitude $A\sqrt{3}$.

FIG. 31-38 Problema 67.

68 Um capacitor de 1,50 μF possui uma reatância capacitiva de 12,0 Ω. (a) Qual é a freqüência de operação do circuito? (b) Qual será a reatância capacitiva do capacitor se a freqüência for multiplicada por dois?

69 Em um certo circuito RLC série a força eletromotriz máxima do gerador é 125 V e a corrente máxima é 3,20 A. Se a corrente está adiantada de 0,982 rad em relação à força eletromotriz do gerador, determine (a) a impedância e (b) a resistência do circuito. (c) O circuito é principalmente capacitivo ou indutivo?

70 Um circuito LC oscilante tem uma indutância de 3,00 mH e uma capacitância de 10,0 μF. Determine (a) a freqüência angular e (b) o período de oscilação. (c) No instante $t = 0$ o capacitor é carregado com 200 μC e a corrente é zero. Faça um esboço da carga do capacitor em função do tempo.

71 Em um certo circuito RLC série excitado com uma freqüência de 60,0 Hz a tensão máxima no indutor é 2,00 vezes a tensão máxima no resistor e 2,00 vezes a tensão máxima no capacitor. (a) De que ângulo a corrente está atrasada em relação à força eletromotriz do gerador? (b) Se a força eletromotriz máxima do gerador é 30,0 V, qual deve ser a resistência do circuito para que a corrente máxima seja 300 mA?

72 Que capacitância deve ser ligada a um indutor de 1,30 mH para que a freqüência de ressonância do circuito resultante seja 3,50 kHz?

73 Um circuito LC oscila com uma freqüência de 10,4 kHz. (a) Se a capacitância é 340 μF, qual é a indutância? (b) Se a corrente máxima é 7,20 mA, qual é a energia total do circuito? (c) Qual é a carga máxima do capacitor?

74 Um circuito RLC série possui uma freqüência de ressonância de 6,00 kHz. Quando o circuito é excitado com uma freqüência de 8,00 kHz possui uma impedância de 1,00 kΩ e uma constante de fase de 45°. Determine o valor de (a) R, (b) L e (c) C nesse circuito.

75 Um capacitor de 158 μF e um indutor formam um circuito LC que oscila com uma freqüência de 8,15 kHz, com uma amplitude de corrente de 4,21 mA. Determine (a) a impedância; (b) a energia total do circuito; (c) a carga máxima do capacitor.

76 Um circuito RLC série é alimentado de tal forma que a tensão máxima no indutor é 1,50 vez a tensão máxima no capacitor e 2,00 vezes a tensão máxima no resistor. (a) Qual é o ϕ do circuito? (b) O circuito é indutivo, capacitivo ou está em ressonância? A resistência é 49,9 Ω e a amplitude da corrente é 200 mA. (c) Qual é a amplitude da força eletromotriz de excitação?

77 Um circuito RLC é excitado por um gerador com uma força eletromotriz com 80,0 V de amplitude e uma corrente com 1,25 A de amplitude. A corrente está adiantada 0,650 rad em relação à tensão. Determine (a) a impedância e (b) a resistência do circuito. (c) O circuito é indutivo, capacitivo ou está em ressonância?

78 Um indutor de 45,0 mH possui uma reatância de 1,30 kΩ. (a) Qual é a freqüência de operação do circuito? (b) Qual é a capacitância de um capacitor com a mesma reatância na mesma freqüência? Se a freqüência é multiplicada por dois, qual é a nova reatância (c) do indutor; (d) do capacitor?

79 Um gerador com uma freqüência de 3000 Hz aplica uma força eletromotriz de 120 V de amplitude a um circuito RLC série. A resistência do circuito é 40,0 Ω, a capacitância é 1,60 μF e a indutância é 850 μH. Determine (a) a constante de fase em radianos e (b) a amplitude da corrente. (c) O circuito é capacitivo, indutivo ou está em ressonância?

80 Um indutor de 1,50 mH em um circuito LC oscilante armazena uma energia máxima de 10,0 μJ. Qual é a corrente máxima?

81 Um gerador de freqüência ajustável é ligado em série com um indutor L = 2,50 mH e um capacitor C = 3,00 μF. Para que freqüência o gerador produz uma corrente com a maior amplitude possível no circuito?

82 Um circuito RLC série é excitado por uma fonte alternada cuja freqüência é 400 Hz e cuja força eletromotriz tem uma amplitude de 90,0 V. A resistência do circuito é 20,0 Ω, a capacitância é 12,1 μF e a indutância é 24,2 mH. Determine a diferença de potencial rms (a) no resistor; (b) no capacitor; (c) no indutor. (d) Qual é a potência média dissipada no circuito?

83 (a) Em um circuito LC oscilante, em termos da carga máxima Q do capacitor, qual é a carga quando a energia do campo elétrico é 50,0% da energia do campo magnético? (b) Que fração de período deve transcorrer após o instante em que o capacitor está totalmente carregado para que essa situação aconteça?

84 Quando está em carga e funcionando com uma tensão rms de 220 V um certo motor consome uma corrente rms de 3,00 A. A resistência do motor é 24,0 Ω e a reatância capacitiva é zero. Qual é a reatância indutiva?

85 No caso de um circuito RLC série, mostre que em um ciclo completo de período T (a) a energia armazenada no capacitor não varia; (b) a energia armazenada no indutor não varia; (c) a energia fornecida pela fonte alternada é $(T\mathscr{E}_m I/2)\cos\phi$; (d) a energia dissipada no resistor é $TRI^2/2$; (c) mostre que os resultados dos itens (c) e (d) são iguais.

86 Quando a força eletromotriz do gerador do Exemplo 31-7 é máxima, determine a tensão (a) no gerador; (b) na resistência; (c) na capacitância; (d) na indutância. (e) Somando essas tensões com os sinais apropriados, mostre que a regra das malhas é satisfeita.

87 Um gerador de corrente alternada produz uma força eletromotriz $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen}(\omega_d t - \pi/4)$, onde $\mathscr{E}_m$ = 30,0 V e ω_d = 350 rad/s. A corrente no circuito ligado ao gerador é dada por $i(t) = I \operatorname{sen}(\omega_d t + \pi/4)$, onde I = 620 mA. (a) Em que instante após t = 0 a força eletromotriz atinge o valor máximo pela primeira vez? (b) Em que instante após t = 0 a corrente atinge o valor máximo pela primeira vez? (c) O circuito contém um único elemento além do gerador. Trata-se de um capacitor, um indutor ou um resistor? Justifique sua resposta. (d) Qual é o valor do elemento?

88 Na Fig. 31-34, suponha que a caixa retangular da esquerda representa a saída (de alta impedância) de um amplificador de áudio, com r = 1000 Ω. Suponha que R = 10 Ω represente a bobina (de baixa impedância) de um alto-falante. Para que a transferência de energia para a carga R seja máxima, devemos ter $R = r$, o que neste caso não é verdade. Entretanto, um transformador pode ser usado para "transformar" resistências, fazendo com que se comportem eletricamente como se fossem maiores ou menores do que realmente são. (a) Desenhe as bobinas do primário e do secundário de um transformador que pode ser introduzido entre o amplificador e alto-falante da Fig. 31-34 para casar as impedâncias. (b) Qual deve ser a relação de espiras?

89 Um circuito série com a combinação resistor-indutor-capacitor R_1, L_1, C_1 tem a mesma freqüência de ressonância que um segundo circuito com uma combinação diferente, R_2, L_2, C_2. As duas combinações são ligadas em série. Mostre que a freqüência de ressonância do novo circuito é a mesma dos dois circuitos separados.

90 Considere o circuito da Fig. 31-39. Com a chave S_1 fechada e as outras duas chaves abertas, a constante de tempo do circuito é τ_C. Com a chave S_2 fechada e as duas outras chaves abertas, a constante de tempo do circuito é ω_L. Com a chave S_3 fechada e as outras duas chaves abertas, o circuito oscila com um período T. Mostre que $T = 2\pi\sqrt{\tau_C \tau_L}$.

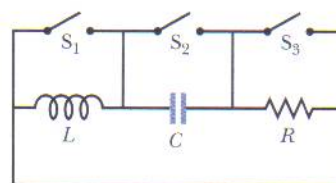



FIG. 31-39 Problema 90.

91 O gerador de corrente alternada da Fig. 31-40 fornece uma força eletromotriz de 120 V e 60,0 Hz. Com a chave aberta como na figura a corrente está adiantada de 20,0° em relação à força eletromotriz do gerador. Quando a chave é colocada na posição 1 a corrente fica atrasada de 10,0° em relação à força eletromo-

triz do gerador. Quando a chave é colocada na posição 2 a amplitude da corrente é 2,00 A. Determine o valor (a) de R; (b) de L; (c) de C.

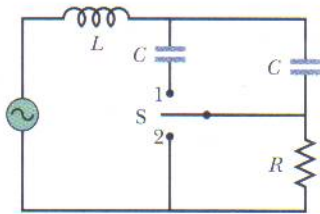



FIG. 31-40 Problema 91.

92 Em um circuito LC oscilante $L = 8{,}00$ mH e $C = 1{,}40$ μF. No instante $t = 0$ a corrente é máxima e tem o valor de 12,0 mA. (a) Qual é a carga máxima do capacitor durante as oscilações? (b) Em que instante de tempo $t > 0$ a taxa de variação da energia armazenada no capacitor é máxima pela primeira vez? (c) Qual é o valor dessa taxa de variação?

93 Um circuito RLC série é excitado por um gerador com uma freqüência de 1050 Hz. A indutância é 90,0 mH; a capacitância é 0,500 μF; o valor absoluto da constante de fase é 60,0° (o sinal da constante de fase é parte do problema). (a) Qual é a resistência do circuito? Para aumentar a amplitude da corrente no circuito, é necessário aumentar ou diminuir (b) a freqüência do gerador; (c) a indutância do circuito; (d) a capacitância do circuito?

94 Um circuito RLC série é excitado por um gerador com uma freqüência de 2000 Hz e uma amplitude de 170 V. A indutância é 60,0 mH, a capacitância é 0,400 μF e a resistência é 200 Ω. (a) Qual é a constante de fase em radianos? (b) Qual é a amplitude da corrente?

95 Um capacitor de 7,00 μF possui uma tensão inicial de 12,0 V quando é ligado a um indutor. A combinação oscila com uma freqüência de 715 Hz. Qual é a indutância do indutor?

96 Um circuito oscilador LC é formado por um capacitor de 2,00 nF e um indutor de 2,00 mH. A tensão máxima é 4,00 V. Determine (a) a freqüência das oscilações; (b) a corrente máxima; (c) a energia máxima armazenada no indutor; (d) a taxa máxima de variação di/dt da corrente.

97 A Fig. 31-41 mostra um circuito RLC alimentado por uma fonte alternada de amplitude constante $\mathscr{E}_m$. Inicialmente o circuito é formado por um resistor de resistência R, um indutor de indutância L e um capacitor de capacitância C, e a freqüência de excitação é igual à freqüência natural. As chaves S_1, S_2, S_3 e S_4 são fechadas sucessivamente, nessa ordem, introduzindo no circuito capacitores e resistores com os mesmos valores que os já existentes.

Suponha que $\mathscr{E}_m = 12{,}0$ V, $C = 2{,}00$ μF, $L = 2{,}00$ mH e $R = 12{,}0$ Ω. Complete a primeira coluna vazia da tabela com os valores da capacitância equivalente do circuito C_{eq} depois que cada chave é fechada. Complete as outras colunas em branco com o valor (b) da freqüência de ressonância f; (c) da resistência equivalente R_{eq}; (d) da impedância Z; (e) da amplitude da corrente I. (Evite arredondar os números antes de terminar os cálculos.)

Fechada	C_{eq}	f	R_{eq}	Z	I
S_1					
S_2					
S_3					
S_4					

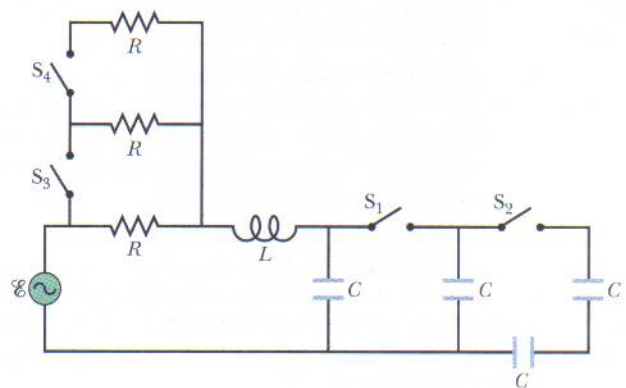
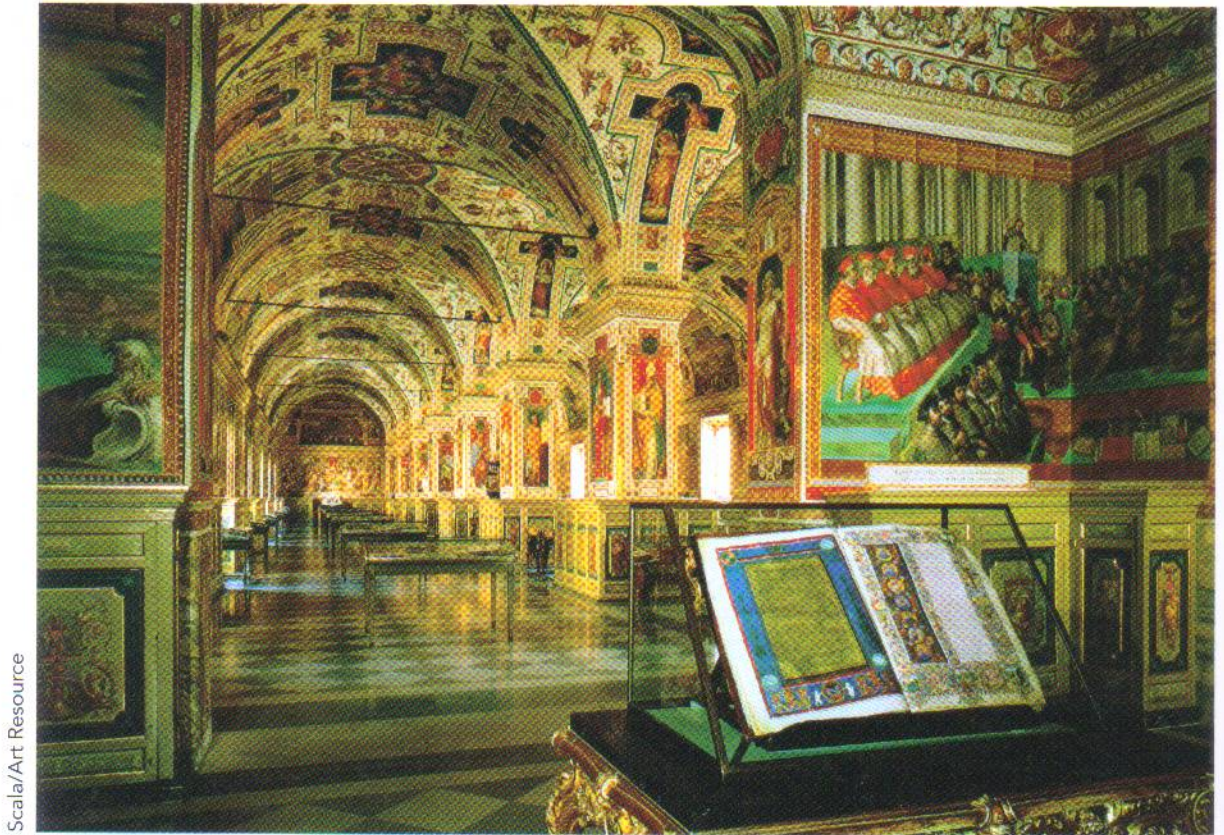



FIG. 31-41 Problema 97.

32 Equações de Maxwell; Magnetismo da Matéria

Scala/Art Resource

Como o campo magnético da Terra varia com o tempo de forma lenta, porém contínua, a direção do norte indicada por uma bússola também varia. Por várias razões os pesquisadores estão interessados em conhecer a direção do norte magnético, mas não é fácil encontrar registros históricos de leituras da bússola. Entretanto, algumas pinturas podem ajudar. Assim, por exemplo, estes murais em um salão do Vaticano (a Bibliotheca Apostolica Vaticana*) registram com precisão qual era a direção do norte magnético na época em que foram pintados, em 1740.*

Como pode uma pintura registrar a direção do campo magnético da Terra?

A resposta está neste capítulo.

32-1 O QUE É FÍSICA?

Este capítulo ajuda a dar uma idéia da abrangência da física, pois se estende desde a ciência básica dos campos elétricos e magnéticos até a ciência aplicada e a engenharia dos materiais magnéticos. Em primeiro lugar concluímos a discussão dos campos elétricos e magnéticos, mostrando que quase todos os princípios físicos apresentados nos últimos 11 capítulos podem ser resumidos em apenas *quatro* equações, conhecidas como equações de Maxwell.

Em segundo lugar estudamos a ciência e a engenharia dos materiais magnéticos. Muitos cientistas e engenheiros estão empenhados em descobrir por que alguns materiais são magnéticos e outros não, e como os materiais magnéticos conhecidos podem ser melhorados. Esses pesquisadores se perguntam por que a Terra possui um campo magnético, mas o mesmo não acontece com as pessoas. Existe uma grande variedade de aplicações para materiais magnéticos em automóveis, cozinhas, escritórios e hospitais, e as propriedades magnéticas dos materiais muitas vezes se manifestam de forma inesperada. Assim, por exemplo, se você tem uma tatuagem (Fig. 32-1) e se submete a um exame de ressonância magnética o campo magnético de alta intensidade usado no exame pode produzir um puxão na sua pele, porque algumas tintas usadas em tatuagens possuem partículas magnéticas. Em outro exemplo, alguns cereais são anunciados como "fortificados com ferro" porque contêm partículas de ferro para serem ingeridas. Como os pedacinhos de ferro são magnéticos, podem ser recolhidos e observados mergulhando-se um ímã permanente em uma mistura de água e cereal.

Nosso primeiro passo será apresentar novamente a lei de Gauss, desta vez para campos magnéticos.

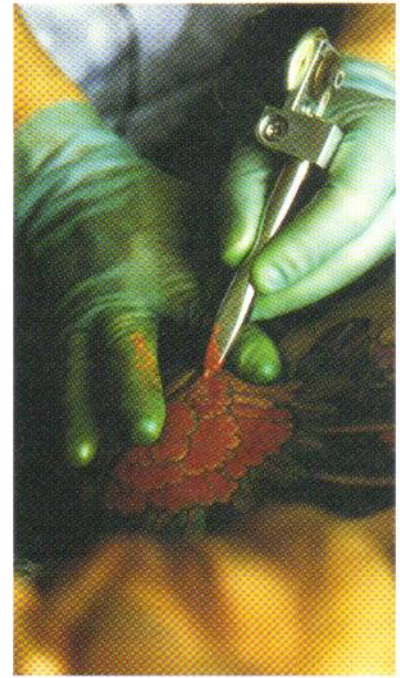



FIG. 32-1 Algumas tintas usadas em tatuagens contêm partículas magnéticas. *(Oliver Strewe/Getty Images, Inc.)*

32-2 | Lei de Gauss para Campos Magnéticos

A Fig. 32-2 mostra o desenho criado quando espalhamos limalha de ferro em uma folha transparente colocada acima de um ímã em forma de barra. Ao se alinharem com o campo magnético do ímã as partículas de ferro formam um padrão que revela a presença e a configuração do campo. Uma das extremidades do ímã é a *fonte* do campo (as linhas de campo divergem nessa região) e a outra extremidade é o *dreno* (as linhas de campo convergem para essa região). Por convenção a fonte é chamada de *pólo norte* do ímã, e o dreno é chamado de *pólo sul.* O ímã, com seus dois pólos, é um exemplo de **dipolo magnético**.

Suponha que um ímã em forma de barra seja partido em vários pedaços, como se fosse um bastão de giz (Fig. 32-3). É natural esperar que com isso fossem pro-

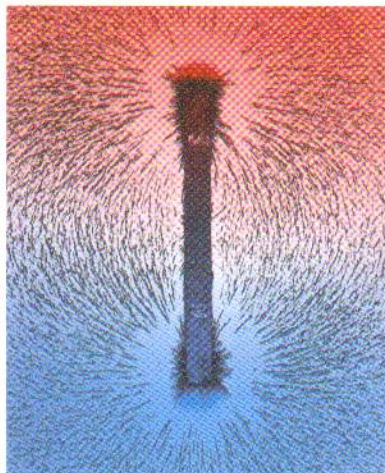



FIG. 32-2 Um ímã em forma de barra é um dipolo magnético. A limalha de ferro acompanha as linhas de campo. (O fundo foi criado com luzes coloridas.) *(Runk/Schoenberger/Grant Heilman Photography)*

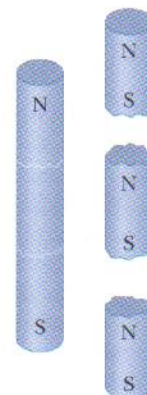



FIG. 32-3 Quando partimos um ímã em pedaços cada pedaço se torna um ímã completo, com um pólo norte e um pólo sul.

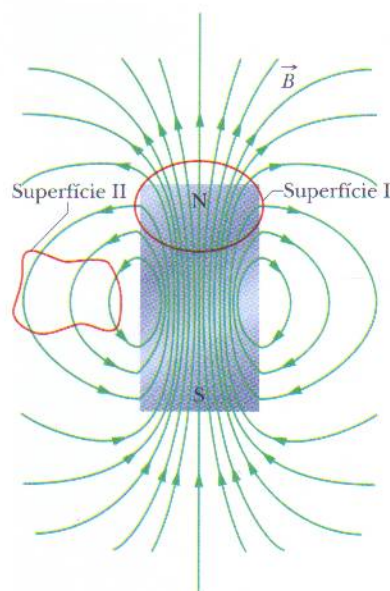



FIG. 32-4 As linhas de campo do campo magnético $\vec{B}$ de um ímã em forma de barra. As curvas vermelhas representam seções retas de superfícies gaussianas tridimensionais.

duzidos pólos magnéticos isolados, ou seja, *monopolos magnéticos*. Entretanto, isso jamais acontece, mesmo que o ímã seja separado em fragmentos do tamanho de átomos e os átomos sejam separados em núcleos e elétrons. Na verdade, todos os fragmentos assim obtidos possuem um pólo norte e um pólo sul. Assim, podemos afirmar o seguinte:

A estrutura magnética mais simples que pode existir é o dipolo magnético. Monopolos magnéticos (até onde sabemos) não existem.

A lei de Gauss para campos magnéticos é um modo formal de afirmar que os monopolos magnéticos não existem. De acordo com essa lei, o fluxo magnético Φ_B através de qualquer superfície gaussiana fechada é zero:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(lei de Gauss para campos magnéticos).} \tag{32-1}$$

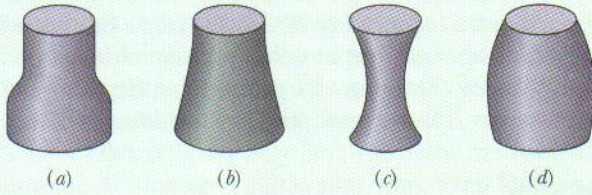
De acordo com a lei de Gauss para campos elétricos, por outro lado,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} \quad \text{(lei de Gauss para campos elétricos).}$$

Nas duas equações a integral é calculada para uma superfície *fechada*. De acordo com a lei de Gauss para campos elétricos a integral (o fluxo de campo elétrico através da superfície) é proporcional à carga elétrica q_{env} envolvida pela superfície. De acordo com a lei de Gauss para campos magnéticos o fluxo magnético através da superfície é sempre zero, porque a superfície não pode envolver uma "carga magnética" (monopolo magnético), já que essa entidade não existe. A estrutura magnética que pode existir e, portanto, pode ser envolvida por uma superfície gaussiana é o dipolo magnético, que contém tanto uma fonte como um dreno para as linhas de campo. Assim, o fluxo para fora da superfície é necessariamente igual ao fluxo para dentro da superfície, e o fluxo total é sempre zero.

A lei de Gauss para campos magnéticos se aplica a sistemas mais complicados que um dipolo magnético, e é válida mesmo que a superfície gaussiana não envolva todo o sistema. A superfície gaussiana II da Fig. 32-4 não contém nenhum dos pólos do ímã em forma de barra, e podemos concluir facilmente que o fluxo que atravessa a superfície é zero. O caso da superfície gaussiana I é mais difícil. Aparentemente ela envolve apenas o pólo norte do ímã, já que envolve a região assinalada com letra N e não a região assinalada com a letra S. Entretanto, podemos associar um pólo sul à parte inferior da superfície, já que as linhas de campo magnético penetram na superfície nessa região. (A parte envolvida se comporta como um dos pedaços em que foi partido o ímã em forma de barra da Fig. 32-3.) Assim, a superfície gaussiana I envolve um dipolo magnético, e o fluxo total que atravessa a superfície é zero.

TESTE 1 A figura mostra quatro superfícies fechadas com bases planas e superfícies laterais curvas. A tabela mostra a área A das bases e o módulo B do campo magnético uniforme e perpendicular que atravessa essas bases; as unidades de A e B são arbitrárias, mas coerentes. Coloque as superfícies na ordem do módulo do fluxo magnético através das superfícies laterais, começando pelo maior.

Superfície	A_{sup}	B_{sup}	A_{inf}	B_{inf}
a	2	6, para fora	4	3, para dentro
b	2	1, para dentro	4	2, para dentro
c	2	6, para dentro	2	8, para fora
d	2	3, para fora	3	2, para fora

32-3 | Campos Magnéticos Induzidos

Como vimos no Capítulo 30, toda variação de fluxo magnético induz um campo elétrico que pode ser calculado usando a lei de indução de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(lei de indução de Faraday)}, \qquad (32\text{-}2)$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico induzido em uma curva fechada pela variação do fluxo magnético Φ_B envolvido pela curva. Como a simetria é um dos princípios mais importantes da física, somos levados a nos perguntar se a indução pode acontecer no sentido oposto, ou seja, se um fluxo elétrico variável pode induzir um campo magnético.

A resposta é afirmativa; além disso, a equação que governa a indução de um campo magnético é quase simétrica da Eq. 32-2. Essa equação, que recebe o nome de lei de indução de Maxwell, em homenagem ao cientista inglês James Clerk Maxwell, pode ser escrita na forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{(lei de indução de Maxwell)}, \qquad (32\text{-}3)$$

onde $\vec{B}$ é o campo magnético induzido ao longo de uma curva fechada pela variação do fluxo elétrico Φ_E na região envolvida pela curva.

Como exemplo desse tipo de indução considere o carregamento de um capacitor de placas paralelas com placas circulares (Fig. 32-5*a*). (Embora tenhamos escolhido essa configuração em nosso exemplo, todo campo elétrico variável induz um campo magnético.) Suponha que a carga do capacitor esteja aumentando a uma taxa constante graças à existência de uma corrente constante i nos fios de ligação. Nesse caso, o módulo do campo elétrico entre as placas também está aumentando a uma taxa constante.

A Fig. 32-5*b* é uma imagem da placa da direita da Fig. 32-5*a* do ponto de vista da região entre as placas. O campo elétrico aponta para dentro do papel. Considere uma circunferência passando pelo ponto 1 das Figs. 32-5*a* e 32-5*b*, concêntrica com as placas do capacitor e com um raio menor que o raio das placas. Como o campo elétrico através da circunferência está variando, o fluxo elétrico através da curva também varia. De acordo com a Eq. 32-3, essa variação do fluxo elétrico induz um campo magnético ao longo da curva.

Os experimentos mostram que um campo magnético $\vec{B}$ é realmente induzido ao longo da curva, com o sentido indicado na figura. Esse campo magnético tem o mesmo módulo em todos os pontos da circunferência e, portanto, apresenta simetria circular em relação ao *eixo central* das placas do capacitor (reta que liga os centros das placas).

Quando consideramos uma circunferência maior, como a que passa pelo ponto 2, situado do lado de fora das placas nas Figs. 32-5*a* e 32-5*b*, vemos que um campo magnético também é induzido ao longo da curva. Assim, quando o campo elétrico está variando campos magnéticos são induzidos tanto no espaço entre as placas como nas regiões vizinhas. Quando o campo elétrico pára de variar os campos magnéticos induzidos desaparecem.

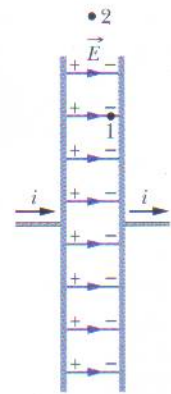
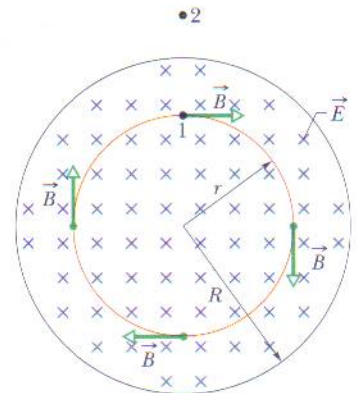



FIG. 32-5 (*a*) Um capacitor de placas paralelas circulares, visto de lado, está sendo carregado por uma corrente constante i. (*b*) Uma vista do interior do capacitor, olhando na direção da placa da direita em (*a*). O campo elétrico $\vec{E}$ é uniforme, dirigido para dentro do papel (em direção à placa), e aumenta de intensidade quando a carga do capacitor aumenta. O campo magnético $\vec{B}$ induzido por esse campo elétrico variável é mostrado em quatro pontos de um círculo com raio r menor que o raio R das placas.

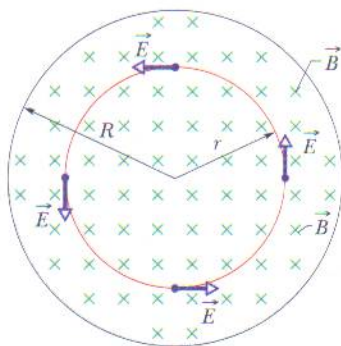



FIG. 32-6 Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ em uma região circular. O campo, dirigido para dentro do papel, está aumentando de intensidade. O campo elétrico $\vec{E}$ induzido pela variação do campo magnético é mostrado em quatro pontos de uma circunferência concêntrica com a região circular. Compare essa situação com a da Fig. 32-5*b*.

Embora a Eq. 32-3 seja semelhante à Eq. 32-2, existem duas diferenças entre as duas equações. Em primeiro lugar, a Eq. 32-3 possui dois fatores adicionais, μ_0 e ε_0, mas eles estão presentes apenas porque adotamos as unidades do SI. Em segundo lugar o sinal negativo da Eq. 32-2 não está presente na Eq. 32-3, o que significa que o campo elétrico induzido $\vec{E}$ e o campo magnético induzido $\vec{B}$ têm sinais opostos quando são produzidos em situações análogas. Para ter uma idéia da diferença observe a Fig. 32-6, na qual um campo magnético crescente $\vec{B}$, apontando para dentro do papel, induz um campo elétrico $\vec{E}$. O campo induzido $\vec{E}$ tem o sentido anti-horário, enquanto o campo induzido $\vec{B}$ da Fig. 32-5*b* tem o sentido horário.

A Lei de Ampère–Maxwell

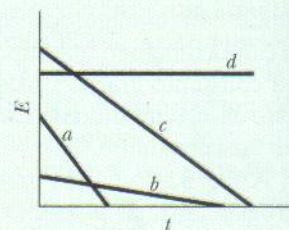
O lado esquerdo da Eq. 32-3, a integral do produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo de uma curva fechada, aparece em outra equação, a lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{env}} \qquad \text{(lei de Ampère)}, \tag{32-4}$$

onde i_{env} é a corrente envolvida pela curva. Assim, nossas duas equações que especificam o campo magnético $\vec{B}$ produzido por outros meios que não um material magnético (ou seja, por uma corrente ou por um campo elétrico variável) fornecem o campo exatamente da mesma forma. Podemos combinar as duas equações para obter a equação

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{\text{env}} \qquad \text{(lei de Ampère–Maxwell)}. \tag{32-5}$$

Quando existe uma corrente e o fluxo elétrico não está variando (como no caso de um fio percorrido por uma corrente constante) o primeiro termo do lado direito da Eq. 32-5 é zero e, portanto, a Eq. 32-5 se reduz à Eq. 32-4, a lei de Ampère. Quando o fluxo elétrico está variando e a corrente é zero (como nas proximidades de um capacitor que está sendo carregado) o segundo termo do lado direito da Eq. 32-5 é zero, e a Eq. 32-5 se reduz à Eq. 32-3, a lei de indução de Maxwell.

TESTE 2 A figura mostra gráficos da amplitude E do campo elétrico em função do tempo t para quatro campos elétricos uniformes, todos contidos em regiões circulares idênticas como a da Fig. 32-5*b*. Coloque os campos na ordem do módulo do campo magnético induzido na borda da região, começando pelo maior.

Exemplo 32-1

Um capacitor de placas paralelas com placas circulares de raio R está sendo carregado, como na Fig. 32-5*a*.

(a) Escreva uma expressão para o campo magnético a uma distância r do eixo central das placas que seja válida para $r \leq R$.

IDÉIAS-CHAVE Um campo magnético pode ser criado por uma corrente ou pela indução produzida por um fluxo elétrico variável; os dois efeitos são levados em conta na Eq. 32-5. Não existe corrente entre as placas do capacitor da Fig. 32-5, mas o fluxo elétrico está variando. Assim, a Eq. 32-5 se reduz a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{32-6}$$

Vamos calcular separadamente o lado esquerdo e o lado direito da equação.

Lado esquerdo da Eq. 32-6: Escolhemos uma amperiana circular de raio $r \leq R$, como a que aparece na Fig. 32-5*b*, porque queremos calcular o campo magnético para $r \leq R$, ou seja, no espaço entre as placas do capacitor. O campo

magnético $\vec{B}$ em todos os pontos da amperiana é tangente à curva, o que também acontece com o elemento de comprimento $d\vec{s}$. Assim, $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ são paralelos ou antiparalelos em todos os pontos da curva. Para simplificar os cálculos, vamos supor que sejam paralelos (esta opção não influi no resultado final). Nesse caso, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\, ds \cos 0° = \oint B\, ds.$$

Devido à simetria circular das placas podemos também supor que o módulo de $\vec{B}$ é o mesmo ao longo de toda a curva. Assim, B pode ficar do lado de fora da integral do lado direito da equação. A integral que resta é $\oint ds$, que é igual à circunferência $2\pi r$ da amperiana. O lado esquerdo da Eq. 32-6 é, portanto, $(B)(2\pi r)$.

Lado direito da Eq. 32-6: Vamos supor que o campo elétrico $\vec{E}$ é uniforme na região entre as placas do capacitor e perpendicular às placas. Nesse caso, o fluxo elétrico Φ_E através da amperiana é EA, onde A é a parte da área envolvida pela amperiana que é atravessada pelo campo elétrico. Assim, o lado direito da Eq. 32-6 é $\mu_0\varepsilon_0\, d(EA)/dt$.

Combinação dos resultados: Substituindo os resultados para o lado esquerdo e para o lado direito na Eq. 32-6, obtemos

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d(EA)}{dt}.$$

Como A é constante, $d(EA) = A\, dE$; assim, temos:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}. \qquad (32\text{-}7)$$

A parte da área A envolvida pela amperiana que é atravessada pelo campo elétrico é a área *total* πr^2 da curva, pois o raio r da amperiana é menor que o raio R das placas (ou igual ao raio). Substituindo A por πr^2 na Eq. 32-7 e explicitando B, obtemos, para $r \le R$,

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}. \quad \text{(Resposta)} \qquad (32\text{-}8)$$

Esta equação nos diz que no interior do capacitor B aumenta linearmente com a distância radial r, desde 0, no eixo central do capacitor, até um valor máximo para $r = R$.

(b) Calcule o módulo B do campo magnético para $r = R/5 = 11{,}0$ mm e $dE/dt = 1{,}50 \times 10^{12}$ V/m · s.

Cálculo: De acordo com o item (a), temos:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \\ &= \tfrac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) \\ &\quad \times (11{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1{,}50 \times 10^{12}\ \text{V/m}\cdot\text{s}) \\ &= 9{,}18 \times 10^{-8}\ \text{T}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(c) Escreva uma expressão para o campo magnético induzido no caso em que $r \ge R$.

Cálculo: O método usado é o mesmo do item (a), exceto pelo fato de que agora usamos uma amperiana cujo raio r é maior que o raio R das placas para calcular B do lado de fora do capacitor. Calculando o lado esquerdo e o lado direito da Eq. 32-6 obtemos novamente a Eq. 32-7. Entretanto, precisamos levar em conta uma diferença sutil: como o campo elétrico existe apenas na região entre as placas, a área A envolvida pela amperiana que contém o campo elétrico *não* é a área total πr^2 da espira, mas apenas a área πR^2 das placas.

Substituindo A por πR^2 na Eq. 32-7 e explicitando B, obtemos, para $r \ge R$,

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt}. \quad \text{(Resposta)} \qquad (32\text{-}9)$$

Esta equação nos diz que do lado de fora do capacitor B diminui com o aumento da distância radial r, a partir do valor máximo que assume na borda das placas (onde $r = R$). Fazendo $r = R$ nas Eqs. 32-8 e 32-9, vemos que as duas equações são coerentes, ou seja, fornecem o mesmo resultado para o campo B na borda das placas.

O campo magnético induzido calculado no item (b) é tão fraco que mal pode ser medido com um instrumento simples. O mesmo não acontece com os campos elétricos induzidos (lei de Faraday), que podem ser medidos com facilidade. Essa diferença experimental existe principalmente porque a força eletromotriz induzida pode facilmente ser aumentada usando bobinas com um grande número de espiras. Não existe nenhuma técnica semelhante para aumentar o valor de um campo magnético induzido. Mesmo assim, o experimento sugerido por este exemplo foi realizado, e a existência de campos magnéticos induzidos foi confirmada experimentalmente.

32-4 | Corrente de Deslocamento

Comparando os dois termos do lado direito da Eq. 32-5 vemos que o produto $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ tem dimensões de corrente elétrica. Na verdade, esse produto pode ser tratado como sendo uma corrente fictícia conhecida como **corrente de deslocamento**, representada pelo símbolo i_d:

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{(corrente de deslocamento).} \qquad (32\text{-}10)$$

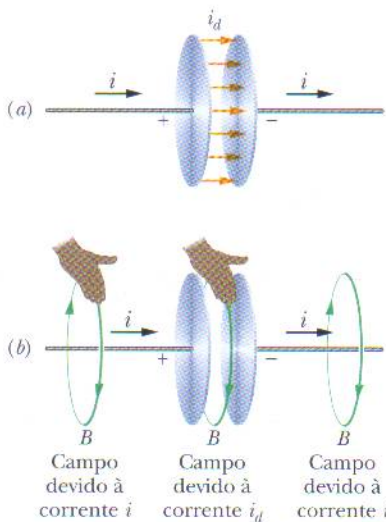



FIG. 32-7 (*a*) A corrente de deslocamento i_d entre as placas de um capacitor que está sendo carregado por uma corrente i. (*b*) A regra da mão direita usada para determinar a orientação do campo magnético produzido em torno de um fio por uma corrente real (como do lado esquerdo da figura) também fornece a orientação do campo magnético produzido por uma corrente de deslocamento (como no centro).

"Deslocamento" é um termo mal escolhido porque nada se desloca, mas a expressão foi conservada por razões históricas. Usando a definição da Eq. 32-10 podemos escrever a Eq. 32-5 na forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{d,\text{env}} + \mu_0 i_{\text{env}} \quad \text{(lei de Ampère–Maxwell)}, \qquad (32\text{-}11)$$

onde $i_{d,\text{env}}$ é a corrente de deslocamento envolvida pela amperiana.

Vamos analisar novamente o caso de um capacitor de placas circulares que está sendo carregado, como na Fig. 32-7*a*. A corrente real i que está carregando as placas faz variar o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas. A corrente de deslocamento fictícia i_d entre as placas está associada à variação do campo $\vec{E}$. Vejamos qual é a relação entre as duas correntes.

Em qualquer instante a carga q das placas está relacionada ao campo elétrico entre as placas através da Eq. 25-4:

$$q = \varepsilon_0 A E, \qquad (32\text{-}12)$$

onde A é a área das placas. Para obter a corrente real i derivamos a Eq. 32-12 em relação ao tempo, o que nos dá

$$\frac{dq}{dt} = i = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}. \qquad (32\text{-}13)$$

Para obter a corrente de deslocamento i_d podemos usar a Eq. 32-10. Supondo que o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas é uniforme (isto é, desprezando o efeito de borda) podemos substituir o fluxo de campo elétrico Φ_E nessa equação por EA. Nesse caso, a Eq. 32-10 se torna

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}. \qquad (32\text{-}14)$$

Comparando as Eqs. 32-13 e 32-14 vemos que a corrente real i de carregamento do capacitor e a corrente fictícia de deslocamento i_d entre as placas do capacitor são iguais:

$$i_d = i \quad \text{(corrente de deslocamento em um capacitor)}. \qquad (32\text{-}15)$$

Assim, podemos considerar a corrente fictícia de deslocamento i_d como uma continuação da corrente real i na região entre as placas. Como o campo elétrico é uniforme, o mesmo se pode dizer da corrente de deslocamento i_d, como sugerem as setas da Fig. 32-7*a*. Embora não haja um movimento de cargas na região entre as placas a idéia de uma corrente fictícia i_d pode facilitar a determinação do módulo e a orientação do campo magnético induzido, como veremos a seguir.

Determinação do Campo Magnético Induzido

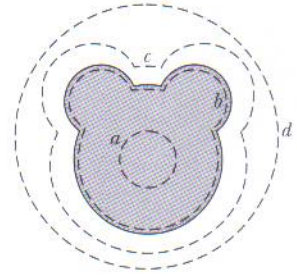
Como vimos no Capítulo 29, a orientação do campo magnético produzido por uma corrente real i pode ser determinada com o auxílio da regra da mão direita da Fig. 29-4. A mesma regra pode ser usada para determinar a orientação de um campo magnético produzido por uma corrente de deslocamento i_d, como se vê na parte central da Fig. 32-7*b*.

Podemos também usar i_d para calcular o módulo do campo magnético induzido por um capacitor de placas paralelas circulares de raio R que está sendo carregado. Para isso consideramos o espaço entre as placas como um fio circular imaginário de raio R percorrido por uma corrente imaginária i_d. Nesse caso, de acordo com a Eq. 29-20, o módulo do campo magnético em um ponto no espaço entre as placas situado a uma distância r do eixo do capacitor é dado por

$$B = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) r \quad \text{(dentro de um capacitor circular)}. \qquad (32\text{-}16)$$

Da mesma forma, de acordo com a Eq. 29-17, o módulo do campo magnético em um ponto do lado de fora do capacitor é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \quad \text{(fora de um capacitor circular).} \tag{32-17}$$

TESTE 3 A figura mostra uma das placas de um capacitor de placas paralelas, vista do interior do capacitor. As curvas tracejadas mostram quatro trajetórias de integração (a trajetória b acompanha a borda da placa). Coloque as trajetórias na ordem do valor absoluto de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ durante a descarga do capacitor, começando pelo maior.

Exemplo 32-2

O capacitor circular de placas paralelas do Exemplo 32-1 está sendo carregado com uma corrente i.

(a) Determine o valor absoluto de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ entre as placas, a uma distância $r = R/5$ do eixo do capacitor, em termos de μ_0 e i.

IDÉIA-CHAVE A integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ é dada pela Eq. 32-11, mas como não existe uma corrente real i entre as placas do capacitor a equação se reduz a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{d,\text{env}}. \tag{32-18}$$

Cálculos: Como estamos interessados em calcular o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ para $r = R/5$, ou seja, em pontos situados no interior do capacitor, a curva de integração envolve apenas uma parte $i_{d,\text{env}}$ da corrente i_d. Vamos supor que i_d está distribuída uniformemente ao longo de toda a área das placas. Nesse caso, a parte da corrente de deslocamento envolvida pela curva é proporcional à área envolvida pela curva:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{corrente de deslocamento} \\ \text{envolvida } i_{d,\text{env}}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{corrente de deslocamento} \\ \text{total } i_d\end{pmatrix}} = \frac{\text{área envolvida } \pi r^2}{\text{área das placas } \pi R^2}.$$

Isso nos dá

$$i_{d,\text{env}} = i_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Substituindo esse valor na Eq. 32-18, obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \tag{32-19}$$

Fazendo $i_d = i$ (Eq. 32-15) e $r = R/5$ na Eq. 32-19, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \frac{(R/5)^2}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{25}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Em termos do campo magnético máximo induzido, qual é o módulo do campo magnético induzido no ponto $r = R/5$?

IDÉIA-CHAVE Como o capacitor possui placas circulares paralelas podemos tratar o espaço entre as placas como um fio imaginário de raio R percorrido por uma corrente imaginária i_d. Nesse caso, podemos usar a Eq. 32-16 para calcular o módulo B do campo magnético induzido em qualquer ponto no interior do capacitor.

Cálculos: Para $r = R/5$, a Eq. 32-16 nos dá

$$B = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) r = \frac{\mu_0 i_d (R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 i_d}{10\pi R}. \tag{32-20}$$

De acordo com a Eq. 32-16, o campo magnético induzido atinge o valor máximo, $B_{\text{máx}}$, no ponto $r = R$. Esse valor é dado por

$$B_{\text{máx}} = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) R = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R}. \tag{32-21}$$

Dividindo a Eq. 32-20 pela Eq. 32-21 e explicitando B, temos:

$$B = \frac{B_{\text{máx}}}{5}. \quad \text{(Resposta)}$$

Poderíamos obter o mesmo resultado com menos trabalho usando um raciocínio simples. De acordo com a Eq. 32-16, B aumenta linearmente com r no interior do capacitor. Assim, em um ponto a uma distância do eixo central 5 vezes menor que a borda das placas, onde o campo é $B_{\text{máx}}$, o campo B deve ser $B_{\text{máx}}/5$.

32-5 | Equações de Maxwell

A Eq. 32-5 é a última das quatro equações fundamentais do eletromagnetismo, conhecidas como *equações de Maxwell*, que aparecem na Tabela 32-1. Essas quatro equações explicam uma grande variedade de fenômenos, desde a razão pela qual a agulha de uma bússola aponta para o norte até o motivo para um carro entrar em movimento quando giramos a chave de ignição. Elas constituem a base para o funcionamento de dispositivos eletromagnéticos, como motores elétricos, transmissores e receptores de televisão, telefones, aparelhos de radar e fornos de microondas.

Também é possível deduzir, a partir das equações de Maxwell, muitas equações que foram apresentadas do Capítulo 21 em diante. Muitas equações que serão vistas nos Capítulos 33 a 36, dedicados à ótica, também se baseiam nas equações de Maxwell.

32-6 | Ímãs Permanentes

Os primeiros ímãs permanentes conhecidos eram feitos de *magnetita*, um mineral que se *magnetiza* naturalmente. Quando os antigos gregos e chineses descobriram essas pedras raras ficaram surpresos com a capacidade das pedras de atrair pedacinhos de metal, como se fossem mágicas. Apenas muito mais tarde foi que aprenderam a usar a magnetita (e pedaços de ferro magnetizados artificialmente) nas bússolas para se orientar.

Hoje em dia, ímãs e materiais magnéticos estão presentes em toda parte. As propriedades magnéticas são causadas, em última análise, por átomos e elétrons. O ímã barato que você usa para prender um bilhete na porta da geladeira, por exemplo, deve sua atração a efeitos da mecânica quântica que ocorrem no interior dos átomos que compõem o material. Antes de estudar as propriedades dos materiais magnéticos, porém, vamos falar um pouco do maior ímã que existe em nossas vizinhanças, que é própria Terra.

O Magnetismo da Terra

A Terra é um grande ímã: em pontos próximos da superfície terrestre o campo magnético se assemelha ao campo produzido por um gigantesco ímã em forma de barra (um dipolo magnético) que atravessa o centro do planeta. A Fig. 32-8 é uma representação idealizada desse campo dipolar, sem a distorção causada pelo vento solar.

Como o campo magnético da Terra é o campo de um dipolo magnético, existe um momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ associado ao campo. No caso do campo ideali-

TABELA 32-1

Equações de Maxwell[a]

Nome	Equação	
Lei de Gauss para a eletricidade	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{env}}/\varepsilon_0$	Relaciona o fluxo elétrico às cargas elétricas envolvidas
Lei de Gauss para o magnetismo	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Relaciona o fluxo magnético às cargas magnéticas envolvidas
Lei de Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$	Relaciona o campo elétrico induzido à variação do fluxo magnético
Lei de Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{\text{env}}$	Relaciona o campo magnético induzido à variação do fluxo elétrico e à corrente

[a]Supondo que não estão presentes materiais dielétricos ou magnéticos.

zado da Fig. 32-8 o módulo de $\vec{\mu}$ é $8{,}0 \times 10^{22}$ J/T, e a direção de $\vec{\mu}$ faz um ângulo de 11,5° com o eixo de rotação da Terra. O *eixo do dipolo* (*MM* na Fig. 32-8) tem a mesma direção que $\vec{\mu}$ e intercepta a superfície da Terra no *pólo norte geomagnético*, situado no noroeste da Groenlândia, e no *pólo sul geomagnético*, situado na Antártica. As linhas do campo magnético $\vec{B}$ emergem no Hemisfério Sul e penetram na Terra no Hemisfério Norte. Assim, o pólo magnético que está situado no Hemisfério Norte e é chamado de "pólo norte magnético" *é, na verdade, o pólo sul do dipolo magnético da Terra*.

FIG. 32-8 O campo magnético da Terra representado como o campo de um dipolo. O eixo do dipolo, *MM*, faz um ângulo de 11,5° com o eixo de rotação da Terra, *RR*. O pólo sul do dipolo está no Hemisfério Norte.

A orientação do campo magnético em um ponto qualquer da superfície da Terra é normalmente especificada através de dois ângulos. A **declinação do campo** é o ângulo (à esquerda ou à direita) entre o norte geográfico (isto é, a direção da latitude 90°) e a componente horizontal do campo. A **inclinação do campo** é o ângulo (para cima ou para baixo) entre um plano horizontal e a direção do campo.

Instrumentos chamados *magnetômetros* são usados para medir esses ângulos e determinar o módulo do campo com alta precisão. Entretanto, é possível determinar a orientação do campo magnético terrestre com dois instrumentos simples, a *bússola* e a *bússola de inclinação*. A bússola é simplesmente um ímã em forma de agulha que é montado de modo a poder girar livremente em torno de um eixo vertical. Quando a bússola é mantida em um plano horizontal o pólo norte da agulha aponta para o pólo norte geomagnético (que, como vimos, é na verdade um pólo sul magnético). O ângulo entre a agulha e o norte geográfico é a declinação do campo. A bússola de inclinação é um dispositivo semelhante no qual a agulha pode girar livremente em torno de um eixo horizontal. Quando o plano vertical de rotação está alinhado com a direção da bússola o ângulo entre a agulha do instrumento e a horizontal é a inclinação do campo.

Em um ponto real sobre a superfície da Terra o campo magnético medido pode diferir apreciavelmente, tanto em módulo como em orientação, do campo dipolar ideal da Fig. 32-8. Na verdade, o ponto do Hemisfério Norte no qual o campo é perpendicular à superfície da Terra não é o pólo norte geomagnético da Groenlândia, como seria de se esperar; o chamado *pólo norte de inclinação* está situado nas ilhas Queen Elizabeth, no norte do Canadá, a uma grande distância da Groenlândia.

Além disso, o campo medido em um certo local pode variar com o tempo, de um valor mensurável, em um período de poucos anos, até um valor considerável em, digamos, 100 anos. Assim, por exemplo, entre 1580 e 1820 a direção indicada pela agulha das bússolas em Londres variou de 35°.

Apesar dessas variações locais o campo dipolar médio muda muito pouco em pequenos intervalos de tempo. Variações em períodos mais longos podem ser estudadas medindo o magnetismo das rochas no fundo do mar dos dois lados da cordilheira Mesoatlântica (Fig. 32-9). Nessa região o magma proveniente do interior da terra chegou ao fundo do mar através de uma fenda, solidificou-se e foi puxado para longe da fenda (pelo deslocamento das placas tectônicas) à taxa de alguns centímetros por ano. Ao se solidificar o magma ficou fracamente magnetizado, com o campo magnético orientado na direção do campo magnético da Terra no momento da solidificação. O estudo da magnetização do magma a diferentes distâncias da fenda mostrou que o campo magnético da Terra tem mudado de *polaridade* mais ou menos a cada milhão

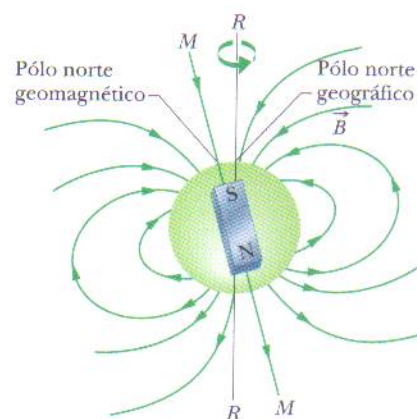
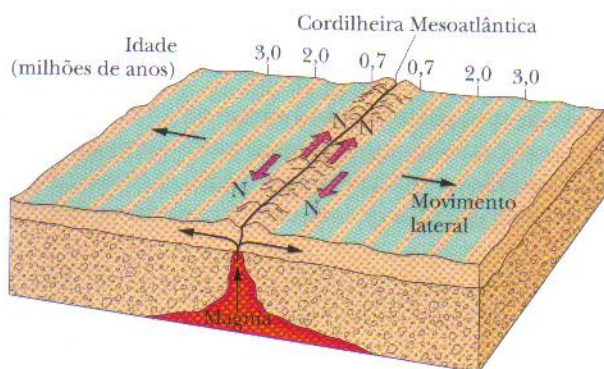



FIG. 32-9 Distribuição de rochas magnéticas no fundo do mar nas vizinhanças da cordilheira Mesoatlântica. O magma proveniente do interior da terra chegou ao fundo do mar através de uma fenda, solidificou-se e foi puxado para longe da fenda pelo movimento das placas tectônicas, guardando um registro do passado magnético da Terra. O campo magnético da Terra tem mudado de polaridade mais ou menos a cada milhão de anos.

de anos, com o pólo norte magnético se transformando em pólo sul e vice-versa. A causa dessas inversões não é conhecida. Na verdade, o próprio mecanismo responsável pelo campo magnético da Terra ainda não foi muito bem esclarecido.

32-7 | Magnetismo e Elétrons

Os materiais magnéticos, da magnetita às fitas de vídeo, são magnéticos por causa dos elétrons que contêm. Já vimos uma das formas pelas quais os elétrons podem gerar um campo magnético: quando os elétrons se deslocam em um fio na forma de uma corrente elétrica o movimento produz um campo magnético em torno do fio. Os elétrons podem produzir campos magnéticos através de dois outros mecanismos, ambos relacionados a momentos dipolares magnéticos. Para explicá-los com detalhes, porém, seria preciso usar conceitos de física quântica que vão além dos objetivos a que este livro se propõe; por isso, apresentaremos apenas os resultados.

Momento Dipolar Magnético de Spin

Um elétron possui um momento angular intrínseco conhecido como **momento angular de spin** ou simplesmente **spin**, representado pelo símbolo $\vec{S}$. Associado a esse spin existe um **momento dipolar magnético** de spin, representado pelo símbolo $\vec{\mu}_s$. (O termo *intrínseco* é usado para indicar que $\vec{S}$ e $\vec{\mu}_s$ são propriedades básicas de um elétron, como a massa e a carga elétrica.) Os vetores $\vec{S}$ e $\vec{\mu}_s$ estão relacionados através da equação

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S}, \tag{32-22}$$

onde e é a carga elementar ($1{,}60 \times 10^{-19}$ C) e m é a massa do elétron ($9{,}11 \times 10^{-31}$ kg). O sinal negativo significa que $\vec{\mu}_s$ e $\vec{S}$ têm sentidos opostos.

O spin $\vec{S}$ é diferente dos momentos angulares do Capítulo 11 sob dois aspectos:

1. O spin $\vec{S}$ não pode ser medido; é possível medir apenas uma de suas componentes.
2. A componente medida de $\vec{S}$ é *quantizada*, um termo geral que significa que a grandeza pode assumir apenas certos valores. No caso do spin do elétron a componente de $\vec{S}$ pode assumir dois valores que diferem apenas quanto ao sinal.

Vamos supor que seja medida a componente do spin $\vec{S}$ em relação ao eixo z de um sistema de coordenadas. Nesse caso, a componente S_z pode assumir apenas os valores dados por

$$S_z = m_s\frac{h}{2\pi}, \quad \text{para } m_s = \pm\tfrac{1}{2}, \tag{32-23}$$

onde m_s é chamado de *número quântico magnético de spin* e h ($= 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s) é a constante de Planck, uma constante que aparece em muitas equações da física quântica. Os sinais que aparecem na Eq. 32-23 estão relacionados ao sentido de S_z em relação ao eixo z. Quando S_z é paralelo ao eixo z, $m_s = 1/2$ e dizemos que o spin do elétron está *para cima*. Quando S_z é antiparalelo ao eixo z, $m_s = -1/2$ e dizemos que o elétron está *para baixo*.

FIG. 32-10 O spin $\vec{S}$, o momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$ e o campo dipolar magnético $\vec{B}$ de um elétron representado como uma esfera microscópica.

O momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$ de um elétron também não pode ser medido; é possível apenas medir uma componente, que também é quantizada, com dois valores possíveis de mesmo valor absoluto e sinais opostos. Podemos relacionar a componente $\mu_{s,z}$ a S_z tomando as componentes de ambos os membros da Eq. 32-22:

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m}S_z.$$

Substituindo S_z pelo seu valor, dado pela Eq. 32-23, temos:

$$\mu_{s,z} = \pm \frac{eh}{4\pi m}, \qquad (32\text{-}24)$$

onde os sinais positivo e negativo correspondem a situações em que $\mu_{s,z}$ está paralelo e antiparalelo ao eixo z, respectivamente.

O valor absoluto da grandeza do lado direito da Eq. 32-24 é chamado de *magneton de Bohr* e representado pelo símbolo μ_B:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{J/T} \quad \text{(magneton de Bohr).} \qquad (32\text{-}25)$$

O momento dipolar magnético do elétron e de outras partículas elementares pode ser expresso em termos de μ_B. No caso do elétron o valor absoluto da componente medida de $\vec{\mu}_S$ é dado por

$$|\mu_{s,z}| = 1\mu_B. \qquad (32\text{-}26)$$

(De acordo com a teoria quântica, o valor de $\mu_{s,z}$ é ligeiramente maior que $1\mu_B$, mas vamos ignorar este fato.)

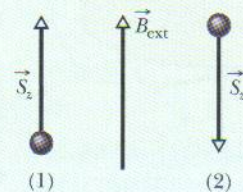
Quando um elétron é submetido a um campo externo $\vec{B}_{ext}$ uma energia potencial U pode ser associada à orientação do momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$ do elétron, da mesma forma como uma energia potencial pode ser associada à orientação do momento magnético dipolar $\vec{\mu}$ de uma espira percorrida por corrente submetida a um campo $\vec{B}_{ext}$. De acordo com a Eq. 28-38, a energia potencial do elétron é

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{s,z} B_{ext}, \qquad (32\text{-}27)$$

onde o eixo z é tomado como sendo a direção de $\vec{B}_{ext}$.

Imaginando o elétron como uma esfera microscópica (o que não corresponde à realidade), podemos representar o spin $\vec{S}$, o momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$ e o campo magnético associado ao momento dipolar magnético como na Fig. 32-10. Apesar do nome "spin" (rodopio, em inglês), o elétron não gira como um pião. Como um objeto pode ter momento angular sem estar girando? Mais uma vez, apenas a mecânica quântica pode fornecer a resposta.

Os prótons e os nêutrons também possuem um momento angular intrínseco chamado spin e um momento dipolar magnético de spin associado. No caso do próton os dois vetores têm o mesmo sentido; no caso do nêutron têm sentidos opostos. Não vamos discutir a contribuição do momento dipolar dos prótons e nêutrons para o campo magnético dos átomos, porque ela é cerca de mil vezes menor que a contribuição do momento dipolar dos elétrons.

TESTE 4 A figura mostra a orientação dos spins de duas partículas submetidas a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$. (a) Se as partículas são elétrons, que orientação do spin corresponde à menor energia potencial? (b) Se as partículas são prótons, que orientação do spin corresponde à menor energia potencial?

Momento Dipolar Magnético Orbital

Quando faz parte de um átomo um elétron possui um momento angular adicional que recebe o nome de **momento angular orbital** e é representado pelo símbolo $\vec{L}_{orb}$. Associado a $\vec{L}_{orb}$ existe um **momento magnético dipolar orbital** $\vec{\mu}_{orb}$; a relação entre as duas grandezas é a seguinte:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb}, \qquad (32\text{-}28)$$

onde o sinal negativo significa que $\vec{\mu}_{orb}$ e $\vec{L}_{orb}$ têm sentidos opostos.

O momento angular $\vec{L}_{orb}$ não pode ser medido; é possível apenas medir uma componente, que é quantizada. A componente segundo um eixo arbitrário z pode ter apenas valores dados por

$$L_{orb,z} = m_\ell \frac{h}{2\pi}, \qquad \text{para } m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm(\text{limite}), \tag{32-29}$$

onde m_ℓ é chamado de *número quântico magnético orbital*, e "limite" é um valor inteiro máximo permitido para m_ℓ. Os sinais da Eq. 32-29 têm a ver com o sentido de $L_{orb,z}$ em relação ao eixo z.

O momento dipolar magnético orbital $\vec{\mu}_{orb}$ de um elétron também não pode ser medido; é possível apenas medir uma componente, que é quantizada. Escrevendo a Eq. 32-28 para uma componente segundo o mesmo eixo z que o momento angular e substituindo o valor de $L_{orb,z}$ dado pela Eq. 32-29, podemos escrever a componente z $\mu_{orb,z}$ do momento dipolar magnético orbital como

$$\mu_{orb,z} = -m_\ell \frac{eh}{4\pi m} \tag{32-30}$$

e, em termos do magneton de Bohr, como

$$\mu_{orb,z} = -m_\ell \mu_B. \tag{32-31}$$

Na presença de um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ os elétrons de um átomo possuem uma energia potencial U que depende da orientação do momento dipolar magnético orbital em relação ao campo. O valor dessa energia é dado por

$$U = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{orb,z} B_{ext}, \tag{32-32}$$

onde o eixo z é tomado na direção de $\vec{B}_{ext}$.

Embora tenhamos usado a palavra "orbital" os elétrons não giram em órbita em torno do núcleo da mesma forma que os planetas giram em órbita em torno do Sol. Como um elétron pode possuir momento angular orbital sem estar se movendo em órbita? Mais uma vez, apenas a mecânica quântica pode fornecer a resposta.

Modelo da Espira para Órbitas Eletrônicas

Podemos obter a Eq. 32-28 através da demonstração a seguir, que não envolve a física quântica, supondo que o elétron descreve uma trajetória circular com um raio muito maior que o raio atômico (daí o nome "modelo da espira"). Entretanto, a demonstração não se aplica aos elétrons no interior de um átomo (caso em que é indispensável usar as equações da física quântica).

FIG. 32-11 Um elétron se move com velocidade constante v em uma trajetória circular de raio r que envolve uma área A. O elétron possui um momento angular orbital $\vec{L}_{orb}$ e um momento dipolar magnético associado $\vec{\mu}_{orb}$. Uma corrente i no sentido horário (associada ao movimento de uma carga positiva) equivale a um movimento no sentido anti-horário de um elétron, que possui carga negativa.

Imagine um elétron que esteja se movendo com velocidade escalar constante v em uma trajetória circular de raio r no sentido anti-horário, como na Fig. 32-11. O movimento da carga negativa do elétron é equivalente a uma corrente convencional i (de carga positiva) no sentido horário, como também mostra a Fig. 32-11. O módulo do momento dipolar magnético orbital dessa *espira percorrida por corrente* é dado pela Eq. 28-35 com $N = 1$:

$$\mu_{orb} = iA, \tag{32-33}$$

onde A é a área envolvida pela espira. De acordo com a regra da mão direita da Fig. 29-22, o sentido desse momento dipolar magnético é para baixo na Fig. 32-11.

Para usar a Eq. 32-33 precisamos conhecer o valor da corrente i. A corrente pode ser definida como a taxa com a qual a carga passa por um ponto de um circuito. Como, nesse caso, uma carga de valor absoluto e leva um tempo $T = 2\pi r/v$ para descrever uma circunferência completa, temos:

$$i = \frac{\text{carga}}{\text{tempo}} = \frac{e}{2\pi r/v}. \tag{32-34}$$

Substituindo este valor e a área $A = \pi r^2$ da espira na Eq. 32-33, obtemos:

$$\mu_{orb} = \frac{e}{2\pi r/v}\,\pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (32\text{-}35)$$

Para determinar o momento angular orbital do elétron $\vec{L}_{orb}$ usamos a Eq. 11-18, $\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. Como $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, o módulo de $\vec{L}_{orb}$ é dado por

$$L_{orb} = mrv \operatorname{sen} 90° = mrv. \quad (32\text{-}36)$$

O vetor $\vec{L}_{orb}$ é orientado para cima na Fig. 32-11 (veja a Fig. 11-12). Combinando as Eqs. 32-35 e 32-36, generalizando para uma formulação vetorial e usando um sinal negativo para indicar que os vetores têm sentidos opostos, obtemos

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb},$$

que é a Eq. 32-28. Assim, através de uma análise "clássica" (não-quântica) é possível obter um resultado igual, tanto em módulo como em orientação, ao da mecânica quântica. O leitor talvez esteja se perguntando, ao constatar que essa demonstração fornece o resultado correto para um elétron no interior de um átomo, por que a demonstração não é válida para essa situação. A resposta é que essa linha de raciocínio leva a outros resultados que não estão de acordo com os experimentos.

Modelo da Espira em um Campo Não-uniforme

Vamos continuar a considerar um elétron em órbita como uma espira percorrida por corrente, como na Fig. 32-11. Agora, porém, vamos supor que a espira está submetida a um campo magnético não-uniforme $\vec{B}_{ext}$, como mostra a Fig. 32-12*a*. (Esse campo pode ser, por exemplo, o campo divergente que existe nas proximidades do pólo norte do ímã da Fig. 32-4.) Fazemos essa mudança para nos preparar para as próximas seções, nas quais discutiremos as forças que agem sobre materiais magnéticos quando estes são submetidos a um campo magnético não-uniforme. Vamos discutir essas forças supondo que as órbitas dos elétrons nesses materiais são pequenas espiras percorridas por corrente como a da Fig. 32-12*a*.

No momento vamos supor que todos os vetores de campo magnético ao longo da trajetória do elétron têm o mesmo módulo e fazem o mesmo ângulo com a vertical, como nas Figs. 32-12*b* e 32-12*d*. Vamos supor também que os elétrons de um átomo podem se mover no sentido anti-horário (Fig. 32-12*b*) ou no sentido horário (Fig. 32-12*d*). A corrente i e o momento dipolar magnético orbital $\vec{\mu}_{orb}$ estão representados na Fig. 32-12 para esses sentidos de movimento.

As Figs. 32-12*c* e 32-12*e* mostram visões diametralmente opostas de um elemento de comprimento $d\vec{L}$ da espira com o mesmo sentido que i, visto do plano da órbita. Também são mostrados o campo $\vec{B}_{ext}$ e a força magnética $d\vec{F}$ que age sobre o elemento $d\vec{L}$. Lembre-se de que uma corrente ao longo de um elemento $d\vec{L}$ na presença de um campo magnético $\vec{B}_{ext}$ experimenta uma força $d\vec{F}$ dada pela Eq. 28-28:

$$d\vec{F} = i\,d\vec{L} \times \vec{B}_{ext}. \quad (32\text{-}37)$$

Do lado esquerdo da Fig. 32-12*c*, de acordo com a Eq. 32-37, a força $d\vec{F}$ aponta para cima e para a direita. Do lado direito a força $d\vec{F}$ tem o mesmo módulo e aponta para cima e para a esquerda. Como os ângulos com a vertical são iguais, as componentes horizontais se cancelam e as componentes verticais se somam. O mesmo se aplica a todos os outros pares de pontos simétricos da espira. Assim, a força total a que a espira da Fig. 32-12*b* está submetida aponta para cima. O mesmo raciocínio leva a uma força dirigida para baixo no caso da espira da Fig. 32-12*d*. Vamos usar os dois resultados daqui a pouco, quando estudarmos o comportamento de materiais magnéticos na presença de um campo magnético não-uniforme.

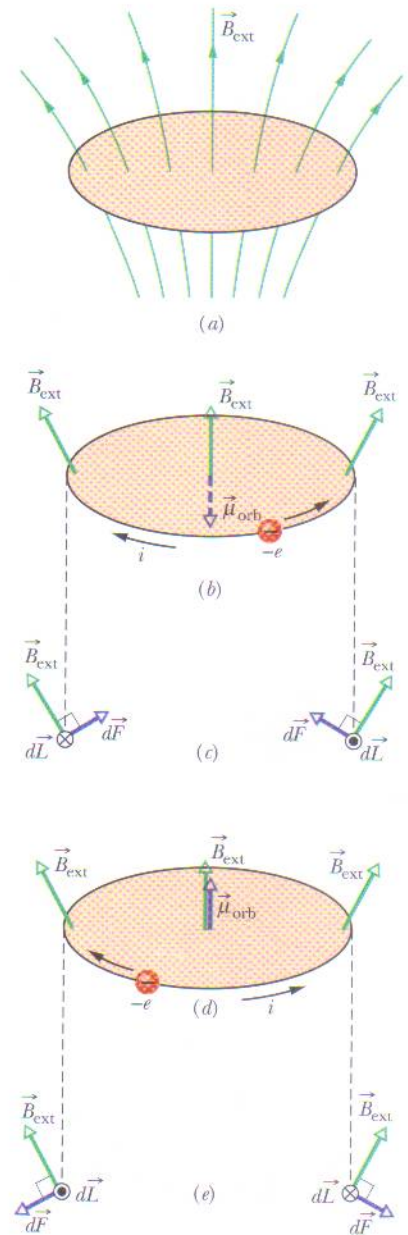



FIG. 32-12 (*a*) Modelo da espira para um elétron em órbita em um átomo e submetido a um campo magnético não-uniforme $\vec{B}_{ext}$. (*b*) Se uma carga $-e$ está se movendo no sentido anti-horário, a corrente convencional i associada tem o sentido horário. (*c*) As forças magnéticas $d\vec{F}$ exercidas sobre as extremidades da espira, vistas do plano da espira. A força total que age sobre a espira é para cima. (*d*) A carga $-e$ agora está se movendo no sentido anti-horário. (*e*) A força total que age sobre a espira agora é para baixo.

32-8 | Propriedades Magnéticas dos Materiais

Cada elétron de um átomo possui um momento dipolar magnético orbital e um momento dipolar magnético de spin, que se combinam vetorialmente. A resultante dessas duas grandezas vetoriais se combina vetorialmente com as resultantes dos outros elétrons do átomo, e a resultante de cada átomo se combina vetorialmente com as resultantes dos outros átomos em uma amostra de um material. As propriedades magnéticas dos materiais são o resultado da combinação de todos esses momentos dipolares. Essas propriedades podem ser classificadas em três tipos básicos: diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo.

1. O ***diamagnetismo*** existe em todos os materiais, mas é tão fraco que em geral não pode ser observado se o material possui uma das outras duas propriedades. No diamagnetismo momentos dipolares magnéticos são produzidos nos átomos do material apenas quando este é submetido a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$; a combinação desses momentos dipolares induzidos resulta em um campo magnético de baixa intensidade no sentido contrário ao do campo externo, que desaparece quando $\vec{B}_{ext}$ é removido. O termo *material diamagnético* é aplicado a materiais que apresentam apenas propriedades diamagnéticas.
2. O ***paramagnetismo*** é observado em materiais que contêm elementos da família dos metais de transição, das terras raras e dos actinídeos (veja o apêndice G). Os átomos desses elementos possuem um momento dipolar magnético diferente de zero, mas como os momentos dos átomos estão orientados aleatoriamente o campo magnético resultante é zero. Entretanto, um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ pode alinhar parcialmente os momentos dipolares magnéticos atômicos, fazendo com que o material apresente um campo magnético resultante no mesmo sentido que o campo externo, que desaparece quando $\vec{B}_{ext}$ é removido. O termo *material paramagnético* é aplicado a materiais que apresentam apenas propriedades diamagnéticas e paramagnéticas.
3. O ***ferromagnetismo*** é observado apenas no ferro, níquel, cobalto e alguns outros elementos (e em compostos e ligas desses elementos). Nesses materiais os momentos dipolares magnéticos de átomos vizinhos se alinham, produzindo regiões com intensos momentos magnéticos. Um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ pode alinhar os momentos magnéticos das regiões, fazendo com que uma amostra do material produza um forte campo magnético no mesmo sentido que o campo externo, que permanece quando $\vec{B}_{ext}$ é removido. Os termos *material ferromagnético* e *material magnético* são aplicados a materiais que apresentam propriedades ferromagnéticas.

Nas próximas três seções vamos discutir os três tipos de propriedades magnéticas.

32-9 | Diamagnetismo

Não estamos em condições de discutir o diamagnetismo do ponto de vista da física quântica, mas podemos apresentar uma explicação clássica usando o modelo da espira das Figs. 32-11 e 32-12. Para começar, supomos que em um átomo de um material diamagnético os elétrons podem girar apenas no sentido horário, como na Fig. 32-12*d*, ou no sentido anti-horário, como na Fig. 32-12*b*. Para explicar a falta de magnetismo na ausência de um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ supomos que o átomo não possui um momento dipolar magnético total diferente de zero. Isso significa que antes da aplicação de $\vec{B}_{ext}$ o número de elétrons que giram em um sentido é igual ao número de elétrons que giram no sentido oposto, de modo que o momento dipolar magnético total do átomo é zero.

Vamos agora aplicar aos átomos do material o campo magnético não-uniforme $\vec{B}_{ext}$ da Fig. 32-12*a*, na qual $\vec{B}_{ext}$ aponta para cima mas é divergente (as linhas de campo magnético divergem). Podemos fazer isso aplicando uma corrente a um ele-

troímã ou aproximando do material o pólo norte de um ímã permanente. De acordo com a lei de Faraday e a lei de Lenz, enquanto o módulo de $\vec{B}_{ext}$ está aumentando de zero para o valor máximo um campo elétrico é induzido nas órbitas eletrônicas. Vamos ver de que forma esse campo elétrico induzido afeta os elétrons das Figs. 32-12*b* e 32-12*d*.

Na Fig. 32-12*b* o elétron que está girando no sentido anti-horário é acelerado pelo campo elétrico induzido. Assim, enquanto o campo magnético $\vec{B}_{ext}$ está aumentando a velocidade do elétron aumenta. Isso significa que a corrente convencional i e o momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ criado pela corrente, orientado para baixo, também *aumentam*.

Na Fig. 32-12*d* o elétron que está girando no sentido horário é freado pelo campo elétrico induzido. Assim, a velocidade do elétron, a corrente convencional e o momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ criado pela corrente, orientado para cima, *diminuem*. Isso significa que ao aplicar o campo $\vec{B}_{ext}$ criamos um momento dipolar magnético no átomo orientado para baixo. O mesmo aconteceria se o campo magnético fosse uniforme.

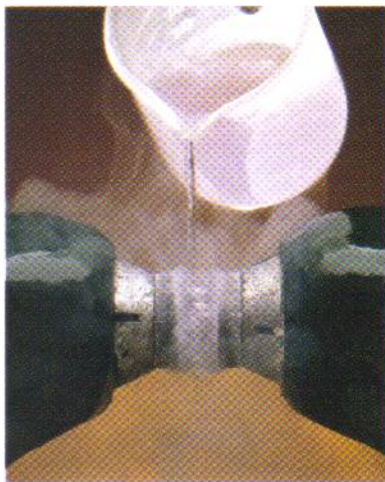
A não-uniformidade do campo $\vec{B}_{ext}$ também afeta o átomo. Como a corrente i da Fig. 32-12*b* aumenta, as forças magnéticas $d\vec{F}$ da Fig. 32-12*c* aumentam e, portanto, a força para cima a que a espira está submetida também aumenta. Como a corrente i da Fig. 32-12*d* diminui, as forças magnéticas $d\vec{F}$ da Fig. 32-12*e* diminuem e, portanto, a força para baixo a que a espira está submetida também diminui. Assim, aplicando um campo *não-uniforme* $\vec{B}_{ext}$ fazemos com que o átomo seja submetido a uma força total diferente de zero; além disso, a força aponta *para longe* da região em que o campo magnético é mais intenso.

Raciocinamos com órbitas eletrônicas fictícias (espiras percorridas por corrente), mas chegamos a uma conclusão que é válida para todos os materiais diamagnéticos: quando um campo magnético como o da Fig. 32-12 é aplicado o material passa a apresentar um momento dipolar magnético dirigido para baixo e experimenta uma força dirigida para cima. Quando o campo é removido tanto o momento dipolar como a força desaparecem. O campo externo não precisa ser como o da Fig. 32-12; os mesmos argumentos se aplicam a outras orientações de $\vec{B}_{ext}$. A conclusão é a seguinte:

Todo material diamagnético submetido a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ apresenta um momento dipolar magnético orientado no sentido oposto ao de $\vec{B}_{ext}$. Se o campo $\vec{B}_{ext}$ é não-uniforme, o material diamagnético é repelido *da* região onde o campo magnético é mais intenso *para* a região onde o campo magnético é menos intenso.

FIG. 32-13 Uma rã sendo levitada pelo campo magnético produzido por um solenóide vertical colocado abaixo da rã. (A rã não está sendo submetida a nenhum desconforto; a sensação é a mesma de flutuar na água, algo que as rãs apreciam muito.) *(Cortesia de A. K. Gein, High Field Magnet Laboratory, University of Nijmegen, Holanda)*

A rã da Fig. 32-13 é diamagnética, como todos os animais. Quando a rã foi colocada em um campo magnético divergente perto da extremidade superior de um solenóide vertical percorrido por corrente todos os átomos da rã foram repelidos para cima, para longe da região de campo magnético associada à extremidade do solenóide. A rã foi empurrada para uma região de campo magnético mais fraco, na qual a força magnética era apenas suficiente para equilibrar o seu peso, e ficou suspensa no ar. O experimento já foi repetido com seres humanos, usando campos magnéticos mais intensos.

TESTE 5 A figura mostra duas esferas diamagnéticas colocadas nas proximidades do pólo sul de um ímã em forma de barra. (a) As forças magnéticas a que as esferas estão submetidas tendem a aproximá-las ou afastá-las do ímã? (b) Os momentos dipolares magnéticos das esferas apontam na direção do ímã ou na direção oposta? (c) A esfera 1 está submetida a uma força magnética maior, menor ou igual à força a que está submetida a esfera 2?

O oxigênio líquido fica suspenso entre os pólos de um ímã porque o líquido é paramagnético e, portanto, é atraído pelo ímã. *(Richard Megna/ Fundamental Photographs)*

32-10 | Paramagnetismo

Nos materiais paramagnéticos os momentos dipolares magnéticos orbitais e de spin dos elétrons de cada átomo não se cancelam e, portanto, cada átomo possui um momento dipolar magnético permanente $\vec{\mu}$. Na ausência de um campo magnético externo esses momentos dipolares atômicos estão orientados aleatoriamente e o momento dipolar magnético total do material é zero. Quando uma amostra do material é submetida a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ os momentos dipolares magnéticos se alinham parcialmente com o campo, e a amostra adquire um momento magnético dipolar diferente de zero. Ao contrário do que acontece nos materiais dielétricos, esse momento tem o mesmo sentido que o campo magnético externo.

Todo material paramagnético submetido a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ apresenta um momento dipolar magnético orientado no mesmo sentido que $\vec{B}_{ext}$. Se o campo $\vec{B}_{ext}$ é não-uniforme o material paramagnético é atraído *da* região onde o campo magnético é menos intenso *para* a região onde o campo magnético é mais intenso.

Uma amostra paramagnética com N átomos teria um momento dipolar magnético de módulo $N\mu$ se os momentos magnéticos dos átomos estivessem perfeitamente alinhados. Entretanto, a agitação térmica produz colisões entre átomos que perturbam esse alinhamento e reduzem o momento magnético total da amostra.

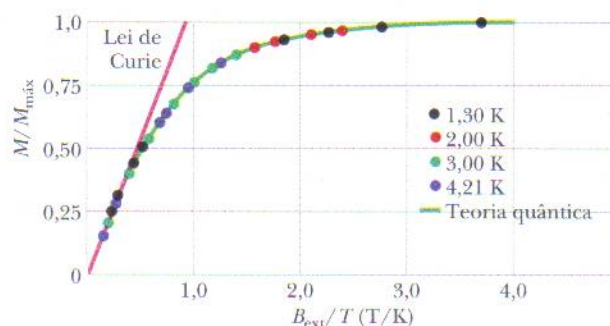
A importância da agitação térmica pode ser avaliada comparando duas energias. A primeira, dada pela Eq. 19-24, é a energia cinética média de translação K ($= 3kT/2$), onde k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ J/K) e T é a temperatura em kelvins (e não em graus Celsius). A outra, uma conseqüência da Eq. 28-38, é a diferença de energia ΔU_B ($= 2\mu B_{ext}$) entre os alinhamentos paralelo e antiparalelo do momento dipolar magnético de um átomo com o campo externo. Como vamos mostrar em seguida, $K \gg \Delta U_B$ para temperaturas e campos magnéticos normais. Assim, transferências de energia através de colisões entre átomos podem perturbar significativamente o alinhamento dos momentos dipolares atômicos, tornando o momento dipolar magnético de uma amostra muito menor que $N\mu$.

Podemos expressar o grau de magnetização de uma amostra paramagnética calculando a razão entre o momento dipolar magnético e o volume V da amostra. Essa grandeza vetorial, o momento dipolar magnético por unidade de volume, é chamada de **magnetização** e representada pelo símbolo $\vec{M}$. O módulo da magnetização é dado por

$$M = \frac{\text{momento magnético medido}}{V}. \tag{32-38}$$

A unidade de $\vec{M}$ é o ampère-metro quadrado por metro cúbico ou ampère por metro (A/m). Ao alinhamento perfeito dos momentos dipolares atômicos, conhecido como *saturação* da amostra, corresponde o valor máximo da magnetização, $M_{máx} = N\mu/V$.

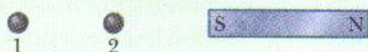
Em 1895 Pierre Curie descobriu experimentalmente que a magnetização de uma amostra paramagnética é diretamente proporcional ao módulo do campo mag-

FIG. 32-14 A *curva de magnetização* do sulfato de potássio e cromo, um sal paramagnético. A razão entre a magnetização M do sal e a magnetização máxima possível $M_{máx}$ foi plotada em função da razão entre o módulo do campo aplicado B_{ext} e a temperatura T. A lei de Curie reproduz satisfatoriamente os resultados experimentais para pequenos valores de B_{ext}/T; a teoria quântica reproduz satisfatoriamente os resultados experimentais para qualquer valor de B_{ext}/T. *[Fonte: W. E. Henry, Phys. Rev. 88, 559-562 (1952)]*

nético externo $\vec{B}_{ext}$ e inversamente proporcional à temperatura T em kelvins:

$$M = C\frac{B_{ext}}{T}. \tag{32-39}$$

A Eq. 32-39 é conhecida como *lei de Curie*, e a constante C é chamada de *constante de Curie*. A lei de Curie é razoável, já que o aumento de B_{ext} faz aumentar o alinhamento dos momentos dipolares atômicos da amostra e, portanto, aumenta o valor de M, enquanto o aumento de T faz diminuir o alinhamento por causa da agitação térmica e, portanto, diminui o valor de M. Entretanto, a lei é uma aproximação que vale apenas para pequenos valores da razão B_{ext}/T.

A Fig. 32-14 mostra a razão $M/M_{máx}$ em função de B_{ext}/T para uma amostra do sal sulfato de cromo e potássio, no qual os átomos paramagnéticos são íons de cromo. Esse tipo de gráfico é chamado de *curva de magnetização*. A linha reta do lado esquerdo, que representa a lei de Curie, reproduz satisfatoriamente os resultados experimentais para $B_{ext}/T < 0,5$ T/K. A curva que reproduz os resultados experimentais para todos os valores de B_{ext}/T se baseia na física quântica. Os dados do lado direito da curva, perto da saturação, são muito difíceis de obter porque exigem campos magnéticos extremamente intensos (100 000 vezes maiores que o campo magnético da Terra), mesmo em baixas temperaturas.

TESTE 6 A figura mostra duas esferas paramagnéticas colocadas nas proximidades do pólo sul de um ímã em forma de barra. (a) As forças magnéticas a que as esferas estão submetidas tendem a aproximá-las ou afastá-las do ímã? (b) Os momentos dipolares magnéticos das esferas apontam na direção do ímã ou na direção oposta? (c) A esfera 1 está submetida a uma força magnética maior, menor ou igual à força a que está submetida a esfera 2?

Exemplo 32-3

Um gás paramagnético à temperatura ambiente ($T = 300$ K) é submetido a um campo magnético externo de módulo $B = 1,5$ T; os átomos do gás possuem um momento dipolar magnético $\mu = 1,0\mu_B$. Calcule a energia cinética média de translação K de um átomo do gás e a diferença de energia ΔU_B entre o alinhamento paralelo e o alinhamento antiparalelo dos momentos dipolares magnéticos dos átomos com o campo externo.

IDÉIAS-CHAVE (1) A energia cinética média de translação K de um átomo em um gás depende da temperatura do gás. (2) A energia potencial U_B de um dipolo magnético $\vec{\mu}$ na presença de um campo magnético $\vec{B}$ depende do ângulo θ entre as orientações de $\vec{\mu}$ e de $\vec{B}$.

Cálculos: De acordo com a Eq. 19-24, temos:

$$K = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(1,38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})$$
$$= 6,2 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0,039\ \text{eV}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 28-38 ($U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$), a diferença ΔU_B entre o alinhamento paralelo ($\theta = 0°$) e o alinhamento antiparalelo ($\theta = 180°$) é dada por

$$\Delta U_B = -\mu B \cos 180° - (-\mu B \cos 0°) = 2\mu B$$
$$= 2\mu_B B = 2(9,27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1,5\ \text{T})$$
$$= 2,8 \times 10^{-23}\ \text{J} = 0,000\,17\ \text{eV}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Nesse caso, portanto, K é cerca de 230 vezes maior que ΔU_B e a troca de energia entre os átomos através de colisões pode facilmente mudar a orientação de momentos dipolares magnéticos que tenham sido alinhados pelo campo magnético externo. Assim, o momento dipolar magnético efetivo do gás paramagnético é relativamente pequeno e se deve apenas a alinhamentos momentâneos dos momentos dipolares atômicos.

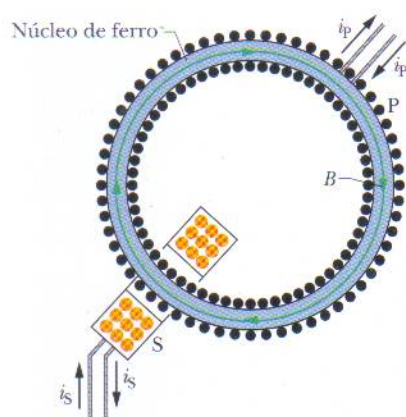



FIG. 32-15 Um anel de Rowland. A bobina primária P tem um núcleo feito do material ferromagnético a ser estudado (ferro, no caso). O núcleo é magnetizado por uma corrente i_P aplicada através da bobina P. (As espiras da bobina são representadas por pontos.) A magnetização do núcleo determina a intensidade do campo magnético total $\vec{B}$ no interior da bobina P. O campo $\vec{B}$ pode ser medido através de uma bobina secundária S.

32-11 | Ferromagnetismo

Quando falamos de magnetismo no dia-a-dia quase sempre o que temos em mente é um ímã em forma de barra, em forma de ferradura ou em forma de placa (provavelmente preso a uma porta de geladeira). Em outras palavras, estamos pensando em um material ferromagnético, com um magnetismo intenso e permanente, e não em um material diamagnético ou paramagnético, com um magnetismo fraco e temporário.

O ferro, o níquel, o cobalto, o gadolínio, o disprósio e ligas que contêm estes elementos são ferromagnéticos por causa de um efeito quântico conhecido como *acoplamento de câmbio*, no qual os spins dos elétrons de um átomo interagem com os spins dos elétrons dos átomos vizinhos. O resultado é um alinhamento dos momentos dipolares magnéticos dos átomos, apesar das colisões causadas pela agitação térmica que tendem a desalinhar os momentos. É este alinhamento persistente que proporciona aos materiais ferromagnéticos um magnetismo permanente.

Quando a temperatura de um material ferromagnético ultrapassa um certo valor crítico, conhecido como *temperatura de Curie*, a agitação térmica prevalece sobre o acoplamento de câmbio e o material se torna paramagnético, ou seja, os dipolos passam a se alinhar apenas parcialmente com o campo aplicado, e o campo magnético resultante fica muito mais fraco. A temperatura de Curie do ferro é 1043 K (770°C).

A magnetização de um material ferromagnético como o ferro pode ser estudada usando-se um dispositivo conhecido como *anel de Rowland* (Fig. 32-15). O material é moldado na forma de um núcleo toroidal de seção reta circular. Uma bobina primária P com n espiras por unidade de comprimento é enrolada no núcleo e por ela se faz passar uma corrente i_P. (A bobina é na verdade um toróide, definido na Seção 29-5.) Se o núcleo de ferro não estivesse presente o módulo do campo magnético no interior do toróide, de acordo com a Eq. 29-23, seria dado por

$$B_0 = \mu_0 i_P n. \tag{32-40}$$

Com um núcleo de ferro presente o campo magnético $\vec{B}$ no interior do solenóide é muito maior que $\vec{B}_0$. Podemos escrever o módulo do campo como

$$B = B_0 + B_M, \tag{32-41}$$

onde B_M é o módulo da contribuição do núcleo de ferro para o campo magnético. Essa contribuição resulta do alinhamento dos momentos dipolares atômicos dos átomos de ferro, devido ao acoplamento de câmbio e ao campo aplicado B_0, e é proporcional à magnetização M do ferro, ou seja, a contribuição B_M é proporcional ao momento magnético dipolar por unidade de volume do ferro. Para determinar o valor de B_M usamos uma bobina secundária S para medir B, calculamos B_0 usando a Eq. 32-40 e calculamos o valor de $B - B_0$, que, de acordo com a Eq. 32-41, é igual a B_M.

A Fig. 32-16 mostra a curva de magnetização de um material ferromagnético obtida usando um anel de Rowland: a razão $B_M/B_{M,\text{máx}}$, onde $B_{M,\text{máx}}$ é o valor máximo possível de B_M, correspondente à saturação, foi plotada em função de B_0. A curva é semelhante à da Fig. 32-14, a curva de magnetização de um material paramagnético: as duas curvas mostram o alinhamento parcial dos momentos dipolares atômicos do material por um campo magnético aplicado.

No caso do núcleo ferromagnético responsável pelos resultados da Fig. 32-16 o alinhamento dos dipolos magnéticos é cerca de 70% do valor máximo para $B_0 \approx 1 \times 10^{-3}$ T. Se B_0 fosse aumentado para 1 T o alinhamento seria quase total, mas um campo B_0 tão alto como 1 T é difícil de conseguir em um toróide.

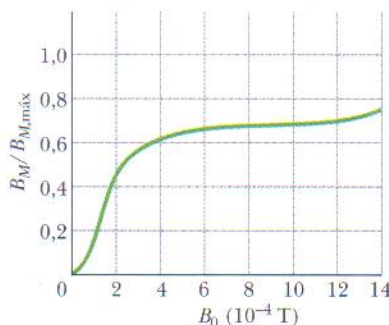



FIG. 32-16 Curva de magnetização do núcleo de material ferromagnético de um anel de Rowland como o da Fig. 32-15. No eixo vertical, 1,0 corresponde ao alinhamento total (saturação) dos dipolos atômicos do material.

Domínios Magnéticos

Nos materiais ferromagnéticos que se encontram a uma temperatura menor que a temperatura de Curie o acoplamento de câmbio produz um alinhamento dos dipolos atômicos vizinhos. Por que, então, o material não apresenta a magnetização de

saturação, mesmo na ausência de um campo magnético aplicado B_0? Em outras palavras, por que os objetos de ferro, como um prego, por exemplo, nem sempre se comportam como ímãs permanentes?

Para compreender a razão, considere uma amostra de um material ferromagnético como o ferro. Esse material, no estado normal, é constituído por vários *domínios magnéticos*, ou seja, regiões em que o alinhamento dos dipolos atômicos é praticamente perfeito. Os domínios, porém, não estão todos alinhados. Na verdade, a orientação dos domínios pode ser tal que quase todos os momentos magnéticos se cancelam.

A Fig. 32-17 é uma micrografia da distribuição dos domínios em um cristal de níquel, obtida espalhando uma suspensão coloidal de partículas de óxido de ferro na superfície do material. As paredes dos domínios, ou seja, as regiões em que o alinhamento dos dipolos atômicos muda de direção, são locais em que os campos magnéticos sofrem variações bruscas. As partículas coloidais em suspensão são atraídas para essas regiões e aparecem como linhas brancas na fotografia (nem todas as paredes dos domínios são visíveis na Fig. 32-17). Embora os dipolos atômicos em cada domínio estejam totalmente alinhados na direção indicada pelas setas, a amostra como um todo pode ter um momento magnético resultante relativamente pequeno.

FIG. 32-17 Micrografia da estrutura de domínios de um monocristal de níquel; as linhas brancas mostram as paredes dos domínios. As setas brancas traçadas na fotografia mostram a orientação dos dipolos magnéticos dentro de cada domínio e, portanto, a orientação do dipolo magnético total de cada domínio. O cristal como um todo não apresenta magnetização espontânea, a menos que o campo magnético total (soma vetorial dos dipolos magnéticos para todos os domínios) seja diferente de zero. *(Cortesia de Ralph W. DeBlois)*

Quando magnetizamos uma amostra, submetendo-a a um campo magnético externo que é aumentado gradualmente acontecem dois efeitos que, juntos, produzem uma curva de magnetização como a da Fig. 32-16. O primeiro é o aumento do tamanho dos domínios que estão orientados no mesmo sentido que o campo externo aplicado, enquanto os domínios com outras orientações diminuem. O segundo efeito é uma mudança da orientação dos dipolos dentro de um domínio no sentido de se aproximarem da direção do campo.

O acoplamento de câmbio e o movimento dos domínios levam ao seguinte resultado:

Um material ferromagnético submetido a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ adquire um grande momento dipolar magnético na direção de $\vec{B}_{ext}$. Se o campo é não-uniforme o material ferromagnético é atraído *da* região onde o campo magnético é menos intenso *para* a região onde o campo magnético é mais intenso.

Pinturas Murais Registram o Campo Magnético da Terra

Os pigmentos vermelhos usados em muitas pinturas murais, como a da fotografia que abre este capítulo, contêm partículas de hematita, um óxido de ferro. Cada partícula possui um único domínio com um certo momento dipolar magnético. Os pigmentos dos pintores são uma suspensão de vários sólidos em um veículo líquido. Quando um pigmento é aplicado a uma parede durante a criação de um mural cada partícula de hematita gira no líquido até que o momento magnético se alinhe com o campo magnético da Terra. Quando a tinta seca as partículas não podem mais se mover e, portanto, se tornam um registro permanente da direção do campo magnético da Terra na época em que a pintura foi executada. A Fig. 32-18 mostra, de forma esquemática, o alinhamento dos momentos em um mural pintado em 1740, quando o norte geomagnético estava na direção indicada por N_{1740}.

FIG. 32-18 Alinhamento dos momentos em uma fina camada de tinta de um mural do Vaticano. Os momentos magnéticos das partículas de hematita dos pigmentos vermelhos estão alinhados com a direção do campo magnético da Terra na ocasião em que o mural foi pintado, no ano de 1740. A figura mostra a direção do norte geomagnético hoje em dia (N_{hoje}) e em 1740 (N_{1740}).

Um cientista pode determinar a direção do campo magnético da Terra na época em que um mural foi pintado determinando a orientação dos momentos magnéticos das partículas presentes na pintura. Um pedaço de fita adesiva é aplicado ao mural e a orientação da fita é medida em relação à horizontal e ao norte geomagnético atual (N_{hoje}). Quando a fita é removida da parede contém uma fina camada de tinta. No laboratório a fita é montada em um equipamento capaz de determinar a orientação dos momentos dipolares presentes na camada de tinta. Os resultados obtidos a partir de medidas realizadas em murais e muitos outros tipos de estudos mostram que a direção do norte geomagnético tem variado de forma gradual, mas contínua, durante os últimos milhares de anos.

FIG. 32-19 Curva de magnetização (*ab*) de um material ferromagnético e o laço de histerese associado (*bcdeb*).

Histerese

As curvas de magnetização dos materiais ferromagnéticos não se repetem quando aumentamos e depois diminuímos o campo magnético externo B_0. A Fig. 32-19 mostra um gráfico de B_M em função de B_0 durante as seguintes operações com um anel de Rowland: (1) partindo de uma amostra desmagnetizada de ferro (ponto a), aumentamos a corrente no enrolamento do toróide até que B_0 ($= \mu_0 iN/2\pi r = \mu_0 in$) tenha o valor correspondente ao ponto b; (2) reduzimos a zero a corrente no toróide (e, portanto, o campo B_0), chegando assim ao ponto c; (3) aumentamos a corrente no toróide no sentido oposto até que B_0 tenha o valor correspondente ao ponto d; (4) reduzimos novamente a corrente a zero (ponto e); (5) invertemos mais uma vez o sentido da corrente e aumentamos o seu valor até atingirmos o ponto b.

A falta de superposição mostrada na Fig. 32-19 recebe o nome de **histerese**, e a curva *bcdeb* é chamada de *laço de histerese*. Observe que nos pontos c e e a amostra de ferro está magnetizada, embora não haja corrente no enrolamento do toróide; este é um exemplo do fenômeno do magnetismo permanente.

A histerese pode ser compreendida a partir do conceito de domínios magnéticos. Evidentemente, o movimento das paredes dos domínios e a reorientação da direção dos domínios não são fenômenos totalmente reversíveis. Quando o campo magnético B_0 é aumentado e depois reduzido novamente ao valor inicial os domínios não voltam à configuração original, mas guardam uma certa "memória" do alinhamento que possuíam após o aumento inicial. A memória dos materiais magnéticos é essencial para o armazenamento de informações em meios magnéticos como fitas de vídeo e discos rígidos de computador.

A memória do alinhamento dos domínios também ocorre naturalmente. Correntes elétricas produzidas por relâmpagos dão origem a campos magnéticos intensos que podem magnetizar rochas ferromagnéticas situadas nas proximidades. Graças à histerese as rochas conservam a magnetização por muito tempo. Essas rochas, expostas e fragmentadas pela erosão, produziram as pedras magnéticas que tanto encantaram os gregos e chineses antigos.

Exemplo 32-4 Aumente sua capacidade

Uma agulha de bússola feita de ferro puro (cuja massa específica é 7900 kg/m³) tem 3,0 cm de comprimento, 1,0 mm de largura e 0,50 mm de espessura. O módulo do momento dipolar magnético de um átomo de ferro é $\mu_{Fe} = 2{,}1 \times 10^{-23}$ J/T.

(a) Se a magnetização da agulha é equivalente ao alinhamento de 10% dos átomos, qual é o módulo do momento dipolar magnético da agulha?

IDÉIAS-CHAVE (1) Se os momentos dos N átomos da agulha estivessem alinhados o módulo do momento dipolar magnético da agulha seria $N\mu_{Fe}$. Como apenas 10% dos momentos atômicos estão alinhados e os momentos não-alinhados estão orientados aleatoriamente e não contribuem para o momento magnético total, temos:

$$\mu = 0{,}10 N \mu_{Fe}. \qquad (32\text{-}42)$$

(2) Podemos determinar o número N de átomos a partir da massa da agulha:

$$N = \frac{\text{massa da agulha}}{\text{massa atômica do ferro}}. \qquad (32\text{-}43)$$

Cálculo de N: A massa atômica do ferro pode ser calculada a partir da massa molar M, que é dada no Apêndice F. Temos:

$$\begin{matrix}\text{massa atômica}\\ \text{do ferro}\end{matrix} = \frac{\text{massa molar do ferro } M}{\text{número de Avogadro } N_A}. \qquad (32\text{-}44)$$

Assim, a Eq. 32-43 se torna

$$N = \frac{mN_A}{M}. \qquad (32\text{-}45)$$

A massa m da agulha é o produto da massa específica pelo volume. Como o volume é $1{,}5 \times 10^{-8}$ m³, temos:

$$\begin{aligned}\text{massa da agulha } m &= (\text{massa específica da agulha})\\ &\quad(\text{volume da agulha})\\ &= (7900 \text{ kg/m}^3)(1{,}5 \times 10^{-8} \text{ m}^3)\\ &= 1{,}185 \times 10^{-4} \text{ kg}.\end{aligned}$$

Substituindo esse valor de m na Eq. 32-45 e usando os valores conhecidos $M = 55{,}847$ g/mol ($= 0{,}055\,847$ kg/mol) e $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$, temos:

$$\begin{aligned}N &= \frac{(1{,}185 \times 10^{-4} \text{ kg})(6{,}02 \times 10^{23})}{0{,}055\,847 \text{ kg/mol}}\\ &= 1{,}2774 \times 10^{21}.\end{aligned}$$

Cálculo de μ: Substituindo esse valor de N e o valor de μ_{Fe} na Eq. 32-42, obtemos:

$$\mu = (0{,}10)(1{,}2774 \times 10^{21})(2{,}1 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/T})$$
$$= 2{,}682 \times 10^{-3}\ \mathrm{J/T} \approx 2{,}7 \times 10^{-3}\ \mathrm{J/T}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Se a agulha da bússola é deslocada ligeiramente da posição (horizontal) de equilíbrio começa a oscilar em torno dessa posição. Se o período de oscilação é 2,2 s, qual é a componente horizontal do campo magnético local?

IDÉIAS-CHAVE (1) A agulha da bússola é um ímã com um momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ que, na posição de equilíbrio, aponta do pólo sul para o pólo norte. (2) Quando a agulha é deslocada da posição de equilíbrio o campo magnético $\vec{B}$ da Terra produz um torque na agulha.

Cálculos: Como a agulha está livre para girar apenas no plano horizontal, apenas a componente horizontal B_h do campo magnético terrestre produz um torque que faz a agulha girar em direção à posição original. De acordo com a Eq. 28-36 ($\tau = \mu B$ sen θ), o módulo desse torque é dado por

$$\tau = -\mu B_h \operatorname{sen}\theta, \tag{32-46}$$

onde o sinal negativo indica que τ se opõe ao deslocamento angular θ. Como o ângulo de rotação é pequeno podemos fazer sen $\theta \approx \theta$, o que nos dá

$$\tau = -\mu B_h \theta. \tag{32-47}$$

Como μ e B_h são constantes a Eq. 32-47 mostra que o torque restaurador é proporcional ao negativo do deslocamento angular. Como vimos na Seção 15-5, este tipo de relação é característico do movimento angular harmônico simples. De acordo com as Eqs. 15-22 ($\tau = -\kappa\theta$) e 15-23 [$T = 2\pi(I/\kappa)^{1/2}$], o período de oscilação é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mu B_h}},$$

e, portanto,

$$B_h = \frac{I}{\mu}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{32-48}$$

onde I é o momento de inércia da agulha. Supondo que a agulha é uma barra fina uniforme, usamos a Tabela 10-2*e* para obter

$$I = \frac{mL^2}{12} = \frac{(1{,}185 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg})(0{,}030\ \mathrm{m})^2}{12}$$
$$= 8{,}888 \times 10^{-9}\ \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

Substituindo esse valor, o valor calculado para μ e o valor dado de T na Eq. 32-48, obtemos:

$$B_h = \frac{8{,}888 \times 10^{-9}\ \mathrm{kg \cdot m^2}}{2{,}682 \times 10^{-3}\ \mathrm{J/T}}\left(\frac{2\pi}{2{,}2\ \mathrm{s}}\right)^2$$
$$= 2{,}7 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, mesmo com uma bússola rudimentar podemos medir o módulo do campo magnético local a partir das oscilações da agulha.

REVISÃO E RESUMO

Lei de Gauss para Campos Magnéticos A estrutura magnética mais simples é o dipolo magnético; monopolos magnéticos (até onde sabemos) não existem. De acordo com a **lei de Gauss** para campos magnéticos,

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \tag{32-1}$$

o fluxo magnético através de qualquer superfície gaussiana é zero. Isso equivale a afirmar que não existem monopolos magnéticos.

Extensão de Maxwell da Lei de Ampère Um fluxo elétrico variável induz um campo magnético $\vec{B}$. A lei de Maxwell,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{(lei de indução de Maxwell)}, \tag{32-3}$$

relaciona o campo magnético induzido em uma espira à variação do fluxo elétrico Φ_E através da espira. A lei de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_{env}$ (Eq. 32-4), pode ser usada para calcular o campo magnético produzido por uma corrente i_{env} envolvida por uma curva fechada. A lei de Maxwell e a lei de Ampère podem ser combinadas em uma única equação,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{env} \quad \text{(lei de Ampère–Maxwell)}. \tag{32-5}$$

Corrente de Deslocamento Definimos a *corrente de deslocamento* fictícia produzida por um campo elétrico variável através da equação

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{32-10}$$

Usando essa definição a Eq. 32-5 pode ser escrita na forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{d,env} + \mu_0 i_{env} \quad \text{(lei de Ampère–Maxwell)}, \tag{32-11}$$

onde $i_{d,env}$ é a corrente de deslocamento envolvida pela curva de integração. A idéia de corrente de deslocamento permite aplicar aos capacitores o princípio de continuidade da corrente elétrica. Entretanto, a corrente de deslocamento *não envolve* o movimento de cargas.

Equações de Maxwell As equações de Maxwell, mostradas na Tabela 32-1, representam uma versão condensada das leis do eletromagnetismo e constituem a base dessa disciplina.

Campo Magnético da Terra O campo magnético da Terra pode ser representado aproximadamente por um dipolo magnético cujo momento dipolar faz um ângulo de 11,5° com o eixo de rotação da Terra e cujo pólo sul fica no Hemisfério Norte. A orientação do campo magnético local em qualquer ponto da su-

perfície da Terra é dada pela *declinação do campo* (ângulo à esquerda ou à direita do pólo geográfico) e pela *inclinação do campo* (ângulo para cima ou para baixo em relação à horizontal).

Momento Dipolar Magnético de Spin O elétron possui um momento angular intrínseco denominado *momento angular de spin* (ou simplesmente *spin*), representado pelo símbolo $\vec{S}$, ao qual está associado um momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$. Entre as duas grandezas existe a seguinte relação:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S}. \qquad (32\text{-}22)$$

O spin $\vec{S}$ não pode ser medido; é possível medir apenas uma de suas componentes. Supondo que a componente medida seja a componente z, essa componente pode assumir apenas os valores dados por

$$S_z = m_s\frac{h}{2\pi}, \quad \text{para } m_s = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad (32\text{-}23)$$

onde h ($= 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s) é a constante de Planck. Analogamente, apenas uma das componentes do momento dipolar magnético de spin $\vec{\mu}_s$ pode ser medida. A componente z é dada por

$$\mu_{s,z} = \pm\frac{eh}{4\pi m} = \pm\mu_B, \qquad (32\text{-}24, 32\text{-}26)$$

onde μ_B é o *magneton de Bohr*, definido da seguinte forma:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{J/T}. \qquad (32\text{-}25)$$

A energia potencial U do momento dipolar magnético de spin na presença de um campo externo $\vec{B}_{ext}$ é dada por

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{s,z}B_{ext}. \qquad (32\text{-}27)$$

Momento Dipolar Magnético Orbital Quando faz parte de um átomo um elétron em um átomo possui um outro tipo de momento angular, conhecido como momento angular orbital $\vec{L}_{orb}$, ao qual está associado um momento dipolar magnético orbital $\vec{\mu}_{orb}$. Entre as duas grandezas existe a seguinte relação:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb}. \qquad (32\text{-}28)$$

O momento angular é quantizado e pode assumir apenas os valores dados por

$$L_{orb,z} = m_\ell\frac{h}{2\pi},$$

$$\text{para } m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(\text{limite}). \qquad (32\text{-}29)$$

Assim, o módulo do momento angular orbital é

$$\mu_{orb,z} = -m_\ell\frac{eh}{4\pi m} = -m_\ell\mu_B. \qquad (32\text{-}30, 32\text{-}31)$$

A energia potencial U associada à orientação do momento dipolar magnético orbital na presença de um campo externo $\vec{B}_{ext}$ é dada por

$$U = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{orb,z}B_{ext}. \qquad (32\text{-}32)$$

Diamagnetismo Os *materiais diamagnéticos* não possuem um momento dipolar magnético, a não ser quando são submetidos a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$, caso em que adquirem um momento dipolar magnético no sentido oposto ao de $\vec{B}_{ext}$. Se $\vec{B}_{ext}$ é não-uniforme, um material diamagnético é repelido das regiões onde o campo é mais intenso. Esta propriedade recebe o nome de *diamagnetismo*.

Paramagnetismo Em um *material paramagnético* cada átomo possui um momento dipolar magnético permanente $\vec{\mu}$, mas os momentos estão orientados aleatoriamente e o material, como um todo, não possui um momento magnético. Entretanto, um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ pode alinhar parcialmente os momentos dipolares atômicos, o que faz o material adquirir um momento magnético na direção de $\vec{B}_{ext}$. Se $\vec{B}_{ext}$ é não-uniforme, um material paramagnético é atraído para as regiões onde o campo é mais intenso. Esta propriedade recebe o nome de *paramagnetismo*.

O alinhamento dos momentos dipolares atômicos de um material paramagnético é diretamente proporcional ao módulo de $\vec{B}_{ext}$ e inversamente proporcional à temperatura T. O grau de magnetização de uma amostra de volume V é dado pela *magnetização* $\vec{M}$, cujo módulo é

$$M = \frac{\text{momento magnético medido}}{V}. \qquad (32\text{-}38)$$

Ao alinhamento perfeito dos N momentos dipolares atômicos, conhecido como *saturação* da amostra, corresponde o valor máximo da magnetização, $M_{máx} = N\mu/V$. Para pequenos valores da razão B_{ext}/T temos a aproximação

$$M = C\frac{B_{ext}}{T} \quad \text{(lei de Curie)}, \qquad (32\text{-}39)$$

onde a constante C é conhecida como *constante de Curie*.

Ferromagnetismo Na ausência de um campo magnético externo os spins de alguns elétrons de um material ferromagnético são alinhados por uma interação de origem quântica denominada *interação de câmbio*, o que dá origem a regiões (domínios) no interior do material que apresentam um momento dipolar magnético diferente de zero. Um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ pode alinhar esses domínios, produzindo um momento dipolar magnético elevado no material como um todo, orientado na direção de $\vec{B}_{ext}$. Esse momento dipolar magnético pode persistir parcialmente quando $\vec{B}_{ext}$ é removido. Se $\vec{B}_{ext}$ é não-uniforme, um material ferromagnético é atraído para as regiões onde o campo é mais intenso. Essas propriedades recebem o nome de *ferromagnetismo*. Um material ferromagnético se torna paramagnético quando a temperatura ultrapassa a *temperatura de Curie*.

PERGUNTAS

1 A Fig. 32-20 mostra, em duas situações, o vetor campo elétrico $\vec{E}$ e uma linha de campo magnético induzido. Determine, nos dois casos, se o módulo de $\vec{E}$ está aumentando ou diminuindo.

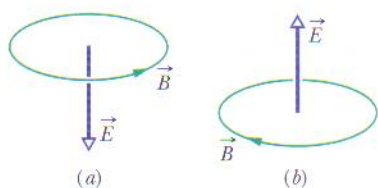



FIG. 32-20 Pergunta 1.

2 A Fig. 32-21*a* mostra duas orientações possíveis para o spin de um elétron em relação a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$. A Fig. 32-21*b* mostra três possibilidades para o gráfico da energia potencial associada às duas orientações em função do módulo de $\vec{B}_{ext}$. As possibilidades *b* e *c* envolvem retas que se interceptam e a possibilidade *a* envolve retas paralelas. Qual das três é a correta?

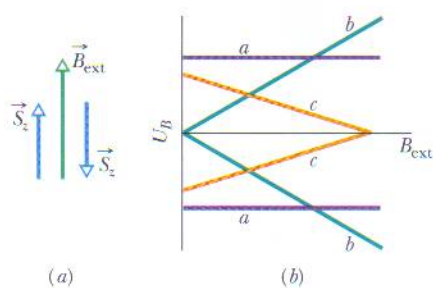



FIG. 32-21 Pergunta 2.

3 A Fig. 32-22*a* mostra um capacitor de placas circulares que está sendo carregado. O ponto *a* (perto de um dos terminais do capacitor) e o ponto *b* (no espaço entre as placas) estão à mesma distância do eixo central, e o mesmo acontece com os pontos *c* (um pouco mais afastado do terminal da esquerda que o ponto *a*) e *d* (na mesma posição horizontal que o ponto *b*, mas fora do espaço entre as placas). Na Fig. 32-22*b* uma curva mostra a variação com a distância *r* do módulo do campo magnético do lado de dentro e do lado de fora do terminal da esquerda; a outra mostra a variação com a distância *r* do módulo do campo magnético dentro e fora do espaço entre as placas. As duas curvas se superpõem parcialmente. Determine a correspondência entre os três pontos assinalados na Fig. 32-22*b* e os quatro pontos da Fig. 32-22*a*.

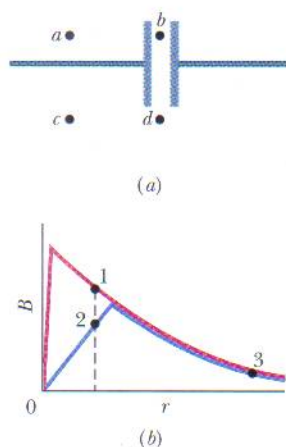



FIG. 32-22 Pergunta 3.

4 A Fig. 32-23 mostra um capacitor de placas paralelas e a corrente nos terminais do capacitor enquanto este está sendo descarregado. (a) O sentido do campo elétrico $\vec{E}$ é para a esquerda ou para a direita? (b) O sentido da corrente de deslocamento i_d é para a esquerda ou para a direita? (c) O campo magnético no ponto *P* está orientado para dentro ou para fora do papel?

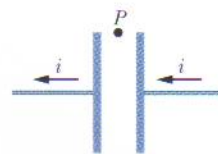



FIG. 32-23 Pergunta 4.

5 A Fig. 32-24 mostra uma vista frontal de uma das duas placas quadradas de um capacitor de placas paralelas e quatro curvas fechadas situadas no espaço entre as placas. O capacitor está sendo descarregado. (a) Desprezando o efeito de borda, coloque as curvas na ordem do valor absoluto de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo das curvas, começando pelo maior. (b) Ao longo de que curva(s) o ângulo entre as direções de $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ é constante (o que facilita o cálculo do produto escalar dos dois vetores)? (c) Ao longo de que curva(s) o valor de *B* é constante (o que permite tirar *B* do sinal de integral na Eq. 32-3)?

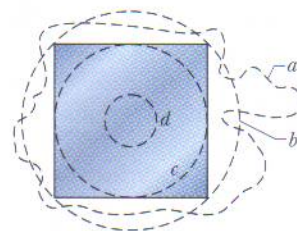



FIG. 32-24 Pergunta 5.

6 A Fig. 32-25 mostra três elétrons girando em órbita no sentido anti-horário na presença de um campo magnético. O campo é não-uniforme nas configurações 1 e 2 e uniforme na configuração 3. Para cada configuração, responda às seguintes perguntas: (a) o momento dipolar magnético orbital do elétron está dirigido para cima, para baixo ou é nulo? (b) A força magnética que age sobre o elétron está dirigida para cima, para baixo ou é nula?

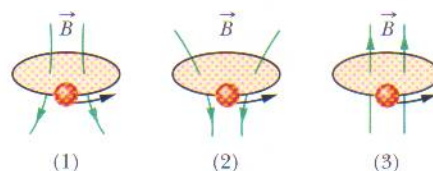



FIG. 32-25 Perguntas 6, 7 e 8.

7 Substitua as órbitas da Pergunta 6 e da Fig. 32-25 por esferas diamagnéticas. Para cada configuração, responda às seguintes perguntas: (a) o momento dipolar magnético da esfera está dirigido para cima, para baixo ou é nulo? (b) A força magnética que age sobre o elétron está dirigida para cima, para baixo ou é nula?

8 Substitua as órbitas da Pergunta 6 e da Fig. 32-25 por esferas paramagnéticas. Para cada configuração, responda às seguintes perguntas: (a) o momento dipolar magnético da esfera está diri-

gido para cima, para baixo ou é nulo? (b) A força magnética que age sobre o elétron está dirigida para cima, para baixo ou é nula?

9 Um elétron é submetido a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ com a componente S_z do spin do elétron antiparalela a $\vec{B}_{ext}$. Se o elétron sofre uma *inversão de spin* que torna a componente S_z paralela a $\vec{B}_{ext}$, o elétron ganha ou perde energia?

10 O módulo da força que age sobre a espira das Figs. 32-12*a* e 32-12*b* aumenta, diminui ou permanece constante (a) quando aumentamos o módulo de $\vec{B}_{ext}$; (b) quando aumentamos a divergência de $\vec{B}_{ext}$?

11 A Fig. 32-26 mostra três placas retangulares de um material ferromagnético no qual os dipolos magnéticos dos domínios foram orientados para fora da página (ponto preto) por um campo magnético muito intenso B_0. Nas três amostras, pequenos domínios residuais conservaram o sentido para dentro da página (cruz). A placa 1 é um cristal puro; as outras placas contêm impurezas dispostas em linhas; as paredes dos domínios não podem cruzar facilmente essas linhas.

O campo B_0 é removido e um outro campo, muito mais fraco, é aplicado no sentido oposto. A mudança faz com que os domínios residuais aumentem de tamanho. (a) Coloque as amostras na ordem do tamanho dos domínios residuais após a aplicação do segundo campo, começando pelo maior. Os materiais ferromagnéticos em que a orientação dos domínios pode ser mudada com facilidade são chamados de *magneticamente macios*; os materiais em que a orientação dos domínios não pode ser mudada com facilidade são chamados de *magneticamente duros*. (b) Das três amostras, qual é magneticamente mais dura?

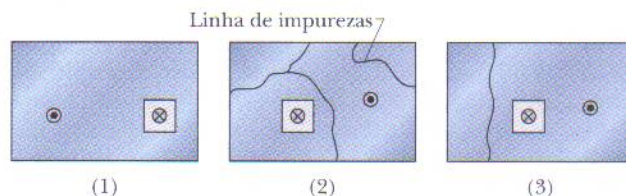



FIG. 32-26 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• - ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 32-2 Lei de Gauss para Campos Magnéticos

•1 O fluxo magnético através de cinco faces de um dado é $\Phi_B = \pm N$ Wb, onde $1 \leq N \leq 5$ é o número de pontos da face. O fluxo é positivo (para fora) se N é par e negativo (para dentro) se N é ímpar. Qual é o fluxo através da sexta face do dado?

•2 A Fig. 32-27 mostra uma superfície fechada. Na face plana superior, que tem um raio de 2,0 cm, um campo magnético perpendicular $\vec{B}$ de módulo 0,30 T aponta para fora. Na face plana inferior um fluxo magnético de 0,70 mWb é dirigido para fora. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do fluxo magnético através da parte lateral da superfície.

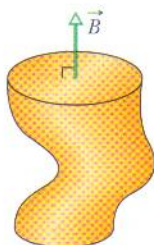



FIG. 32-27 Problema 2.

••3 Uma superfície gaussiana em forma de cilindro circular reto tem um raio de 12,0 cm e um comprimento de 80,0 cm. Em uma das bases existe um fluxo para dentro de 25,0 μWb. Na outra base existe um campo magnético uniforme de 1,60 mT, normal à superfície e dirigido para fora. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do fluxo magnético através da superfície lateral do cilindro.

•••4 Dois fios, paralelos ao eixo z e separados por uma distância de $4r$, conduzem correntes iguais i em sentidos opostos, como mostra a Fig. 32-28. Um cilindro circular de raio r e comprimento L tem o eixo central sobre o eixo z a meio caminho entre os fios. Com base na lei de Gauss, escreva uma expressão para o fluxo magnético através da metade da superfície lateral do cilindro que está acima do eixo x. (*Sugestão:* Calcule o fluxo através da parte do plano xz que está no interior do cilindro.)

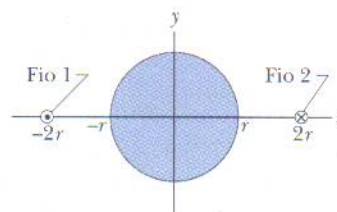



FIG. 32-28 Problema 4.

seção 32-3 Campos Magnéticos Induzidos

•5 O campo magnético induzido a 6,0 mm do eixo central de um capacitor de placas circulares e paralelas é $2{,}0 \times 10^{-7}$ T. As placas têm 3,0 mm de raio. Qual é a taxa de variação $d\vec{E}/dt$ do campo elétrico entre as placas?

•6 Um capacitor de placas quadradas de lado L está sendo descarregado por uma corrente de 0,75 A. A Fig. 32-29 é uma vista frontal de uma das placas, do ponto de vista do interior do capacitor. A linha tracejada mostra uma trajetória retangular no espaço entre as placas. Se $L = 12$ cm, $W = 4{,}0$ cm e $H = 2{,}0$ cm, qual é o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo da linha tracejada?

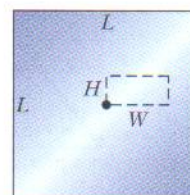



FIG. 32-29 Problema 6.

••7 Um capacitor de placas paralelas possui placas circulares de raio $R = 30$ mm e a distância entre as placas é 5,0 mm. Uma diferença de potencial senoidal com um valor máximo de 150 V e uma freqüência de 60 Hz é aplicada às placas, ou seja, a tensão entre as placas é

$$V = (150\text{ V})\,\text{sen}[2\pi(60\text{ Hz})t].$$

(a) Determine $B_{máx}(R)$, o valor máximo do campo magnético induzido a uma distância radial $r = R$. (b) Plote $B_{máx}(r)$ para $0 < r < 10$ cm.

••8 Um capacitor de placas paralelas com placas circulares de 40 mm de raio está sendo descarregado por uma corrente de 6,0 A. A que distância radial (a) do lado de dentro e (b) do lado de fora do espaço entre as placas o campo magnético induzido é igual a 75% do valor máximo? (c) Qual é o valor máximo?

••9 *Fluxo elétrico uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual um fluxo elétrico uniforme aponta para fora do papel. O fluxo elétrico total através da região é $\Phi_E = (3{,}00\text{ mV}\cdot\text{m/s})t$, onde t está em segundos. Determine o módulo do campo magnético induzido a uma distância radial (a) de 2,00 cm; (b) de 5,00 cm.

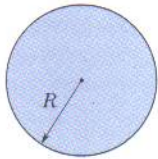



FIG. 32-30 Problemas 9 a 12 e 25 a 28.

••10 *Fluxo elétrico não-uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual um fluxo elétrico aponta para fora do papel. O fluxo elétrico envolvido por uma circunferência concêntrica de raio r é dado por $\Phi_{E,\text{env}} = (0{,}600\text{ V}\cdot\text{m/s})(r/R)t$, onde $r \leq R$ e t está em segundos. Determine o módulo do campo magnético induzido a uma distância radial (a) de 2,00 cm; (b) de 5,00 cm.

••11 *Campo elétrico uniforme.* Na Fig. 32-30 um campo elétrico uniforme aponta para fora do papel em uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm. O módulo do campo elétrico é dado por $E = (4{,}50 \times 10^{-3}\text{ V/m}\cdot\text{s})t$, onde t está em segundos. Determine o módulo do campo magnético induzido a uma distância radial (a) de 2,00 cm; (b) de 5,00 cm.

••12 *Campo elétrico não-uniforme.* Na Fig. 32-30 um campo elétrico aponta para fora do papel em uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm. O módulo do campo elétrico é dado por $E = (0{,}500\text{ V/m}\cdot\text{s})(1 - R/r)t$, onde t está em segundos e r é a distância radial ($r \leq R$). Determine o módulo do campo magnético induzido a uma distância radial (a) de 2,00 cm; (b) de 5,00 cm.

seção 32-4 Corrente de Deslocamento

•13 Prove que a corrente de deslocamento em um capacitor de placas paralelas de capacitância C pode ser escrita na forma $i_d = C(dV/dt)$, onde V é a diferença de potencial entre as placas.

•14 Um capacitor de placas paralelas com placas circulares de 0,10 m de raio está sendo descarregado. Um anel de 0,20 m de raio, concêntrico com o capacitor, está a meio caminho entre as placas. A corrente de deslocamento através do anel é 2,0 A. Qual é a taxa de variação do campo elétrico entre as placas?

•15 Qual deve ser a taxa de variação da diferença de potencial entre as placas de um capacitor de placas paralelas com uma capacitância de 2 μF para que seja produzida uma corrente de deslocamento de 1,5 A?

•16 Para a situação do Exemplo 32-1, mostre que o módulo da densidade de corrente da corrente de deslocamento é $J_d = \varepsilon_0(dE/dt)$ para $r \leq R$.

••17 Enquanto um capacitor de placas paralelas com placas circulares de 20 cm de diâmetro está sendo carregado, a densidade de corrente da corrente de deslocamento na região entre as placas é uniforme e tem um módulo de 20 A/m². (a) Calcule o módulo B do campo magnético a uma distância $r = 50$ mm do eixo de simetria dessa região. (b) Calcule dE/dt nessa região.

••18 O módulo do campo elétrico entre as duas placas paralelas circulares da Fig. 32-31 é $E = (4{,}0 \times 10^5) - (6{,}0 \times 10^4 t)$, com E em volts por metro e t em segundos. Em $t = 0$, $\vec{E}$ aponta para cima. A área das placas é $4{,}0 \times 10^{-2}$ m². Para $t \geq 0$, determine (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da corrente de deslocamento na região entre as placas; (c) o sentido do campo magnético induzido (horário ou anti-horário) do ponto de vista da figura.

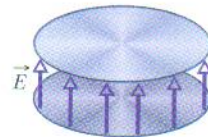



FIG. 32-31 Problema 18.

••19 Na Fig. 32-32 um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ é reduzido a zero. A escala do eixo vertical é definida por $E_s = 6{,}0 \times 10^5$ N/C e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 12{,}0$ μs. Calcule o módulo da corrente de deslocamento através de uma área de 1,6 m² perpendicular ao campo durante os intervalos a, b e c mostrados no gráfico. (Ignore o comportamento da corrente na extremidade dos intervalos.)

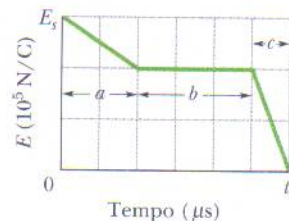



FIG. 32-32 Problema 19.

••20 Um capacitor com placas paralelas circulares de raio $R = 1{,}20$ cm está sendo descarregado por uma corrente de 12,0 A. Considere um anel de raio $R/3$, concêntrico com o capacitor, situado entre as placas. (a) Qual é a corrente de deslocamento envolvida pelo anel? O campo magnético máximo induzido tem um módulo de 12,0 mT. A que distância radial (b) do lado de dentro e (c) do lado de fora do espaço entre as placas o módulo do campo magnético induzido é 3,00 mT?

••21 Na Fig. 32-33 um capacitor de placas paralelas possui placas quadradas de lado $L = 1{,}0$ m. Uma corrente de 2,0 A carrega o capacitor, produzindo um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ entre as placas, com $\vec{E}$ perpendicular às placas. (a) Determine a corrente de deslocamento i_d na região entre as placas. (b) Determine o valor de dE/dt nessa região. (c) Determine a corrente de deslocamento envolvida pela trajetória tracejada, um quadrado com $d = 0{,}50$ m de lado. (d) Determine o valor de $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ ao longo da trajetória tracejada.

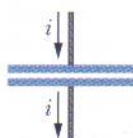
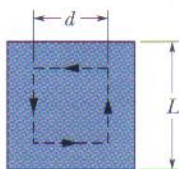



FIG. 32-33 Problema 21.

••**22** O circuito da Fig. 32-34 é formado por uma chave S, uma fonte ideal de 12,0 V, um resistor de 20,0 MΩ e um capacitor cujo dielétrico é o ar. O capacitor tem placas paralelas com 5,00 cm de raio, separadas por uma distância de 3,00 mm. No instante $t = 0$ a chave S é fechada e o capacitor começa a se carregar. O campo elétrico entre as placas é uniforme. No instante $t = 250\ \mu s$ qual é o módulo do campo magnético no interior do capacitor, a uma distância radial de 3,00 cm?

FIG. 32-34 Problema 22.

••**23** Um fio de prata tem uma resistividade $\rho = 1{,}62 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$ e uma seção reta de 5,00 mm². A corrente no fio é uniforme e varia à taxa de 2000 A/s quando a corrente é 100 A. (a) Determine o módulo do campo elétrico (uniforme) no fio quando a corrente é 100 A. (b) Determine a corrente de deslocamento no fio nesse instante. (c) Determine a razão entre o módulo do campo magnético produzido pela corrente de deslocamento e o módulo do campo magnético produzido pela corrente a uma distância r do fio.

••**24** A Fig. 32-35*a* mostra a corrente i que atravessa um fio de resistividade $1{,}62 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. O módulo da corrente em função do tempo t está plotado da Fig. 32-35*b*. A escala do eixo vertical é definida por $i_s = 10{,}0$ A, e a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 50{,}0$ ms. O ponto P está a uma distância radial de 9,00 mm do centro do fio. Determine o módulo do campo magnético $\vec{B}_i$ no ponto P devido à corrente real no fio (a) em $t = 20$ ms, (b) em $t = 40$ ms, (c) em $t = 60$ ms. Suponha agora que o campo elétrico responsável pela corrente existe apenas no interior do fio e determine o módulo do campo magnético $\vec{B}_{id}$ no ponto P devido à corrente de deslocamento i_d no fio (d) em $t = 20$ ms, (e) em $t = 40$ ms e (f) em $t = 60$ ms. No ponto P em $t = 20$ s determine o sentido (para dentro ou para fora do papel) (g) de $\vec{B}_i$; (h) de $\vec{B}_{id}$.

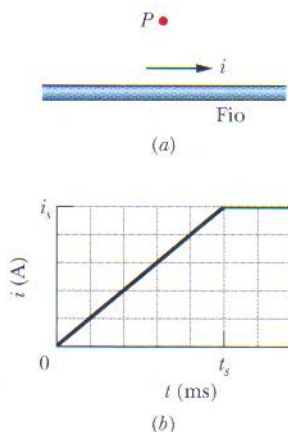



FIG. 32-35 Problema 24.

••**25** *Densidade de corrente de deslocamento uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual existe uma corrente de deslocamento dirigida para fora do papel. A corrente de deslocamento possui uma densidade de corrente uniforme cujo valor absoluto é $J_d = 6{,}00\ A/m^2$. Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente de deslocamento (a) a 2,00 cm do centro da região; (b) a 5,00 cm do centro da região.

••**26** *Corrente de deslocamento uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual existe uma corrente de deslocamento uniforme $i_d = 0{,}500$ A dirigida para fora do papel. Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente de deslocamento (a) a 2,00 cm do centro da região; (b) a 5,00 cm do centro da região.

••**27** *Densidade de corrente de deslocamento não-uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual existe uma corrente de deslocamento dirigida para fora do papel. O módulo da densidade de corrente da corrente de deslocamento é dado por $J_d = (4{,}00\ A/m^2)(1 - r/R)$, onde $r \leq R$ é a distância do centro da região. Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente de deslocamento (a) em $r = 2{,}00$ cm; (b) em $r = 5{,}00$ cm.

••**28** *Corrente de deslocamento não-uniforme.* A Fig. 32-30 mostra uma região circular de raio $R = 3{,}00$ cm na qual existe uma corrente de deslocamento i_d dirigida para fora do papel. O módulo da corrente de deslocamento é dado por $i_d = (3{,}00\ A)(r/R)$, onde $r \leq R$ é a distância do centro da região. Determine o módulo do campo magnético produzido por i_d (a) em $r = 2{,}00$ cm; (b) em $r = 5{,}00$ cm.

•••**29** Na Fig. 32-36 um capacitor de placas circulares de raio $R = 18{,}0$ cm está ligado a uma fonte de força eletromotriz $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega t$, onde $\mathscr{E}_m = 220$ V e $\omega = 130$ rad/s. O valor máximo da corrente de deslocamento é $i_d = 7{,}60\ \mu A$. Despreze o efeito de borda. (a) Qual é o valor máximo da corrente i no circuito? (b) Qual é o valor máximo de $d\Phi_E/dt$, onde Φ_E é o fluxo elétrico através da região entre as placas? (c) Qual é a distância d entre as placas? (d) Determine o valor máximo do módulo de $\vec{B}$ entre as placas a uma distância $r = 11{,}0$ cm do centro.

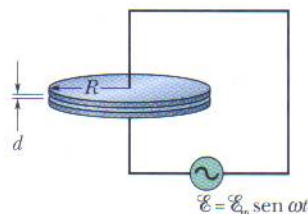



FIG. 32-36 Problema 29.

seção 32-6 Ímãs Permanentes

•**30** Suponha que o valor médio da componente vertical do campo magnético da Terra é 43 μT (para baixo) em todo o estado americano do Arizona, que tem uma área de $2{,}95 \times 10^5\ km^2$. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do fluxo magnético da Terra no resto da superfície do planeta (ou seja, em toda a superfície terrestre, com exceção do Arizona).

•**31** No estado americano de New Hampshire o valor médio da componente horizontal do campo magnético da Terra em 1912 foi 16 μT e a inclinação média foi 73°. Qual foi o valor correspondente do módulo do campo magnético da Terra?

seção 32-7 Magnetismo e Elétrons

•**32** Determine a diferença de energia entre as orientações paralela e antiparalela da componente z do momento dipolar magnético de spin de um elétron submetido a um campo magnético de módulo 0,25 T e orientado no sentido positivo do eixo z.

•**33** Determine o valor da componente medida do momento dipolar magnético orbital de um elétron (a) com $m_\ell = 1$; (b) com $m_\ell = -2$.

•**34** Um elétron é submetido a um campo magnético $\vec{B}$ orientado no sentido positivo do eixo z. A diferença de energia entre os alinhamentos paralelo e antiparalelo da componente z do momento magnético de spin do elétron na presença de $\vec{B}$ é $6{,}00 \times 10^{-25}$ J. Determine o módulo de $\vec{B}$.

•**35** Se um elétron de um átomo possui um momento angular orbital com $m_\ell = 0$, determine as componentes (a) $L_{orb,z}$ e (b) $\mu_{orb,z}$. Se o átomo é submetido a um campo magnético externo $\vec{B}$ de módulo 35 mT e orientado no sentido positivo do eixo z, determine (c) a energia potencial U_{orb} associada a $\vec{\mu}_{orb}$; (d) a energia potencial U_{spin} associada a $\vec{\mu}_s$. Se, em vez disso, o átomo possui um momento angular orbital com $m_\ell = -3$, determine (e) $L_{orb,z}$; (f) $\mu_{orb,z}$; (g) U_{orb}; (h) U_{spin}.

•**36** A Fig. 32-37*a* mostra dois valores permitidos de energia (*níveis de energia*) de um átomo. Quando o átomo é submetido a um campo magnético de 0,500 T os níveis mudam para os que aparecem na Fig. 32-37*b* por causa da energia associada ao produto escalar $\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}$. (Estamos ignorando o efeito de $\vec{\mu}_s$.) O nível E_1 não é alterado, mas o nível E_2 se desdobra em três níveis muito próximos. Determine o valor de m_ℓ associado (a) ao nível de energia E_1; (b) ao nível de energia E_2. (c) Qual é o valor em joules do espaçamento entre os níveis desdobrados?

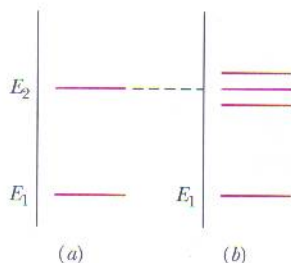



FIG. 32-37 Problema 36.

seção 32-9 Diamagnetismo

•**37** A Fig. 32-38 mostra um anel (L) que serve de modelo para um material diamagnético. (a) Faça um esboço das linhas de campo magnético no interior e nas proximidades do material devido ao ímã em forma de barra. Determine (b) a orientação do momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ do anel; (c) o sentido da corrente convencional i no anel (horário ou anti-horário); (d) a orientação da força magnética exercida pelo campo magnético do ímã sobre o anel.

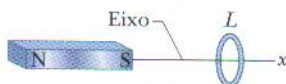



FIG. 32-38 Problemas 37 e 73.

•••**38** Suponha que um elétron de massa m e carga $-e$ se move em uma órbita circular de raio r em torno de um núcleo. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é aplicado perpendicularmente ao plano da órbita. Supondo também que o raio da órbita não varia e que a variação da velocidade do elétron devido ao campo $\vec{B}$ é pequena, escreva uma expressão para a variação do momento dipolar magnético orbital do elétron devido à presença do campo.

seção 32-10 Paramagnetismo

•**39** Um ímã de forma cilíndrica tem 5,00 cm de comprimento e 1,00 cm de raio. A magnetização é uniforme, com um módulo de $5{,}30 \times 10^3$ A/m. Qual é o momento dipolar magnético do ímã?

•**40** Um campo magnético de 0,50 T é aplicado a um gás paramagnético cujos átomos possuem um momento dipolar magnético intrínseco de $1{,}0 \times 10^{-23}$ J/T. Em que temperatura a energia cinética média de translação dos átomos é igual à energia necessária para inverter a orientação de um desses dipolos na presença do campo magnético?

•**41** Em um teste para verificar se a magnetização do sal paramagnético usado para obter a curva da Fig. 32-14 obedece à lei de Curie, o sal é submetido a um campo magnético de 0,50 T, que permanece constante durante todo o experimento, e a magnetização M é medida em temperaturas que variam de 10 a 300 K. Os resultados estarão de acordo com a lei de Curie?

•**42** Uma amostra do sal paramagnético usado para obter a curva da Fig. 32-14 é mantido à temperatura ambiente (300 K). Determine para que valor do campo magnético aplicado o grau de saturação magnética é (a) 50% e (b) 90%. (c) É possível produzir esses campos em laboratório?

••**43** Um elétron com uma energia cinética K_e está se movendo em uma trajetória circular cujo plano é perpendicular a um campo magnético uniforme orientado no sentido positivo do eixo z. O elétron está sujeito apenas à força exercida pelo campo. (a) Mostre que o momento dipolar magnético do elétron devido ao movimento orbital tem o sentido oposto ao do campo magnético $\vec{B}$ e seu módulo é dado por $\mu = K_e/B$. Determine (b) o módulo e (c) a direção do momento dipolar magnético de um íon positivo de energia cinética K_i nas mesmas circunstâncias. (d) Um gás ionizado possui $5{,}3 \times 10^{21}$ elétrons/m³ e a mesma concentração de íons. Supondo que a energia cinética média dos elétrons é $6{,}2 \times 10^{-20}$ J e que a energia cinética média dos íons é $7{,}6 \times 10^{-21}$ J, calcule a magnetização do gás quando submetido a um campo magnético de 1,2 T.

••**44** A Fig. 32-39 mostra a curva de magnetização de um material paramagnético. A escala do eixo vertical é definida por $a = 0{,}15$ e a escala do eixo horizontal é definida por $b = 0{,}2$ T/K. Seja μ_{exp} o valor experimental do momento magnético de uma amostra e $\mu_{máx}$ o valor máximo possível do momento magnético da mesma amostra. De acordo com a lei de Curie, qual é o valor da razão $\mu_{exp}/\mu_{máx}$ quando a amostra é submetida a um campo magnético de 0,800 T a uma temperatura de 2,00 K?

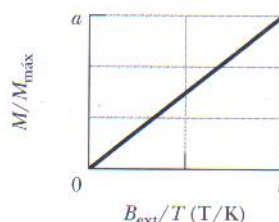



FIG. 32-39 Problema 44.

•••45 Considere um sólido com N átomos por unidade de volume, cada átomo com um momento dipolar magnético $\vec{\mu}$. Suponha que existem apenas duas orientações possíveis para $\vec{\mu}$: paralelo ou antiparalelo a um campo magnético externamente aplicado $\vec{B}$ (o que, segundo a física quântica, acontece quando apenas um elétron do átomo é responsável pelo spin $\vec{\mu}$). De acordo com a mecânica estatística a probabilidade de que um átomo se encontre em um estado de energia U é proporcional a $e^{-U/kT}$, onde T é a temperatura e k é a constante de Boltzmann. Assim, como a energia U é igual a $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ a fração de átomos com o momento dipolar paralelo a $\vec{B}$ é proporcional a $e^{\mu B/kT}$ e a fração de átomos com o momento dipolar antiparalelo a $\vec{B}$ é proporcional a $e^{-\mu B/kT}$. (a) Mostre que o módulo da magnetização desse sólido é $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$, onde tanh é a função tangente hiperbólica: $\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (b) Mostre que o resultado do item (a) se reduz a $M = N\mu^2 B/kT$ para $\mu B \ll kT$. (c) Mostre que o resultado do item (a) se reduz a $M = N\mu$ para $\mu B \gg kT$. (d) Mostre que (b) e (c) concordam qualitativamente com a Fig. 32-14.

seção 32-11 Ferromagnetismo

•46 O módulo do momento dipolar associado a um átomo de ferro em uma barra de ferro é $2{,}1 \times 10^{-23}$ J/T. Suponha que todos os átomos da barra, que tem 5,0 cm de comprimento e uma seção reta de 1,0 cm², têm os momentos dipolares alinhados. (a) Qual é o momento dipolar da barra? (b) Que torque deve ser exercido sobre a barra para mantê-la perpendicular a um campo externo de 1,5 T? (A massa específica do ferro é 7,9 g/cm³.)

•47 O acoplamento de câmbio mencionado na Seção 32-11 como sendo responsável pelo ferromagnetismo *não* é a interação entre dipolos magnéticos elementares. Para mostrar por quê, calcule (a) o módulo do campo magnético a uma distância de 10 nm, ao longo do eixo do dipolo, de um átomo com um momento dipolar magnético de $1{,}5 \times 10^{-23}$ J/T (o átomo de cobalto); (b) a energia mínima necessária para inverter um segundo dipolo magnético do mesmo tipo na presença do campo calculado do item (a). (c) Comparando o resultado do item (b) com os resultados do Exemplo 32-3, o que podemos concluir?

•48 Medidas realizadas em minas e poços revelam que a temperatura no interior da Terra aumenta com a profundidade à taxa média de 30 C°/km. Supondo que a temperatura na superfície seja de 10°C, em que profundidade o ferro deixa de ser ferromagnético? (A temperatura de Curie do ferro varia muito pouco com a pressão.)

•49 A magnetização de saturação $M_{\text{máx}}$ do níquel, um metal ferromagnético, é $4{,}70 \times 10^5$ A/m. Calcule o momento dipolar magnético de um átomo de níquel. (A massa específica do níquel é 8,90 g/cm³ e a massa molar é 58,71 g/mol.)

••50 Uma bússola é colocada em uma superfície horizontal, e a agulha recebe um leve empurrão que a faz oscilar em torno da posição de equilíbrio. A freqüência de oscilação é 0,312 Hz. O campo magnético da Terra no local possui uma componente horizontal de 18,0 μT. A agulha possui um momento magnético de 0,680 mJ/T. Determine o momento de inércia da agulha em relação ao eixo (vertical) de rotação.

••51 Um anel de Rowland é feito de um material ferromagnético. O anel tem seção reta circular, com um raio interno de 5,0 cm e um raio externo de 6,0 cm, e uma bobina primária enrolada no anel possui 400 espiras. (a) Qual deve ser a corrente na bobina para que o módulo do campo do toróide tenha o valor B_0 = 0,20 mT? (b) Uma bobina secundária enrolada no anel possui 50 espiras e uma resistência de 8,0 Ω. Se para esse valor de B_0 temos $B_M = 800B_0$, qual é o valor da carga que atravessa a bobina secundária quando a corrente na bobina primária começa a circular?

••52 Uma barra magnética com 6,00 cm de comprimento, 3,00 mm de raio e uma magnetização uniforme de $2{,}70 \times 10^3$ A/m pode girar em torno do centro como uma agulha de bússola. A barra é submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de módulo 35,0 mT cuja direção faz um ângulo de 68,0° com a direção de momento dipolar da barra. (a) Determine o módulo do torque exercido pelo campo $\vec{B}$ sobre a barra. (b) Determine a variação da energia potencial magnética da barra quando o ângulo muda para 34,0°.

••53 A Terra possui um momento dipolar magnético de $8{,}0 \times 10^{22}$ J/T. (a) Se esse momento dipolar fosse causado por uma esfera de ferro magnetizado situada no centro da Terra, qual deveria ser o raio da esfera? (b) Que fração do volume da Terra a esfera ocuparia? Suponha um alinhamento perfeito dos dipolos. A massa específica do núcleo da Terra é 14 g/cm³. O momento dipolar magnético de um átomo de ferro é $2{,}1 \times 10^{-23}$ J/T. (*Nota*: O núcleo da Terra realmente contém uma grande quantidade de ferro, mas a possibilidade de que o magnetismo terrestre se deva a um ímã permanente parece remota por várias razões. Para começar, a temperatura do núcleo é maior que a temperatura de Curie do ferro.)

Problemas Adicionais

54 Duas placas (como as da Fig. 32-7) estão sendo descarregadas por uma corrente constante. As placas têm 4,00 cm de raio. Durante a descarga, em um ponto entre as placas situado a uma distância de 2,00 cm do eixo central, o campo magnético tem um módulo de 12,5 nT. (a) Qual é o módulo do campo magnético a 6,00 cm do eixo central? (b) Qual é a corrente nos fios ligados às placas?

55 O campo magnético da Terra pode ser aproximado pelo campo magnético de um dipolo. As componentes horizontal e vertical do campo a uma distância r do centro da Terra são dadas por

$$B_h = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\cos\lambda_m, \qquad B_v = \frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\operatorname{sen}\lambda_m,$$

onde λ_m é a *latitude magnética* (latitude medida a partir do equador geomagnético em direção a um dos pólos geomagnéticos). Suponha que o momento dipolar da Terra tem um módulo $\mu = 8{,}00 \times 10^{22}$ A · m². (a) Mostre que o módulo do campo magnético da Terra na latitude λ_m é dado por

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\lambda_m}.$$

(b) Mostre que a inclinação ϕ_i do campo magnético está relacionada à latitude magnética λ_m através da equação $\tan\phi_i = 2\tan\lambda_m$.

56 Use os resultados do Problema 55 para calcular (a) o módulo e (b) a inclinação do campo magnético da Terra no equador geomagnético; (c) o módulo e (d) a inclinação do campo na latitude geomagnética de 60°; (e) o módulo e (f) a inclinação do campo no pólo norte geomagnético.

57 A Terra possui um momento dipolar magnético de $8{,}0 \times 10^{22}$ J/T. (a) Que corrente teria que existir em uma única espira de fio estendida na superfície da Terra ao longo do equador geomagnético para criar um dipolo de mesma intensidade? (b) Esse arranjo poderia ser usado para cancelar o magnetismo da Terra em pontos do espaço muito acima da superfície? (c) Esse arranjo

poderia ser usado para cancelar o magnetismo da Terra em pontos da superfície?

58 Use a aproximação do Problema 55 para calcular (a) a altitude em relação à superfície na qual o módulo do campo magnético da Terra é 50,0% do valor na superfície na mesma latitude; (b) o módulo máximo do campo magnético na interface do núcleo com o manto, 2900 km abaixo da superfície da Terra; (c) o módulo e (d) a inclinação do campo magnético na Terra no pólo norte geográfico. (e) Explique por que os valores calculados nos itens (c) e (d) não são necessariamente iguais aos valores medidos.

59 Um capacitor de placas paralelas com placas circulares de 55,0 mm de raio está sendo carregado. A que distância do eixo do capacitor (a) dentro do espaço entre as placas e (b) fora do espaço entre as placas o módulo do campo magnético induzido é igual a 50,0% do valor máximo?

60 Uma carga q está distribuída uniformemente ao longo de um anel delgado de raio r. O anel está girando com velocidade angular ω em torno de um eixo que passa pela centro e é perpendicular ao plano do anel. (a) Mostre que o módulo do momento magnético associado à carga em movimento é dado por $\mu = q\omega r^2/2$. (b) Qual é a orientação desse momento magnético se a carga é positiva?

61 Se um elétron em um átomo tem um momento angular orbital com valores de m_ℓ limitados por ± 3, quantos valores de (a) $L_{orb,z}$ e (b) $\mu_{orb,z}$ o elétron pode ter? Em termos de h, m e e, qual é o maior valor permitido (c) de $L_{orb,z}$ e (d) de $\mu_{orb,z}$? (e) Qual é o maior valor permitido da componente z do momento angular *total* do elétron (soma do momento orbital com o momento de spin)? (f) Quantos valores (incluindo o sinal) são permitidos para a componente z do momento angular total do elétron?

62 O capacitor da Fig. 32-7 está sendo carregado com uma corrente de 2,50 A. O raio do fio é 1,50 mm e o raio das placas é 2,00 cm. Suponha que as distribuições da corrente i no fio e da corrente de deslocamento i_d no espaço entre as placas do capacitor são uniformes. Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente i nas seguintes distâncias em relação ao eixo do fio: (a) 1,00 mm (dentro do fio); (b) 3,00 mm (fora do fio); (c) 2,20 cm (fora do fio). Determine o módulo do campo magnético produzido pela corrente i_d nas seguintes distâncias em relação à reta que liga os centros das placas: (d) 1,00 mm (dentro do espaço entre as placas); (e) 3,00 mm (dentro do espaço entre as placas); (f) 2,20 cm (fora do espaço entre as placas). Explique por que os campos são muito diferentes para o fio e para o espaço entre as placas no caso das duas distâncias menores, mas têm valores semelhantes para a distância maior.

63 Suponha que ± 4 sejam os limites dos valores de m_ℓ para um elétron em um átomo. (a) Quantos valores são possíveis para a componente $\mu_{orb,z}$ do momento dipolar magnético orbital do elétron? (b) Desses valores, qual possui o maior valor absoluto? Suponha que o átomo seja submetido a um campo magnético de 0,250 T, orientado no sentido positivo do eixo z. Determine (c) a maior energia potencial e (d) a menor energia potencial associada a esses valores possíveis de $\mu_{orb,z}$.

64 Qual é o valor da componente medida do momento dipolar magnético orbital de um elétron (a) com $m_\ell = 3$ e (b) com $m_\ell = -4$?

65 A agulha de uma bússola, com 0,050 kg de massa e 4,0 cm de comprimento, está alinhada com a componente horizontal do campo magnético da Terra em um local onde essa componente tem o valor $B_h = 16\ \mu$T. Depois que a agulha recebe um leve empurrão começa a oscilar com uma freqüência angular $\omega = 45$ rad/s. Supondo que a agulha é uma barra fina e uniforme livre para girar em torno do centro, determine o módulo do momento dipolar magnético da agulha.

66 Um capacitor de placas paralelas circulares está sendo carregado. Considere um anel circular com o centro no eixo central e situado entre as placas. Se o raio do anel, 3,00 cm, é maior que o raio das placas, qual é a corrente de deslocamento entre as placas quando o campo magnético ao longo do anel tem um módulo de 2,00 μT?

67 Na Fig. 32-40 um capacitor de placas paralelas está sendo descarregado por uma corrente $i = 5{,}0$ A. As placas são quadrados de lado $L = 8{,}0$ mm. (a) Qual é a taxa de variação do campo elétrico entre as placas? (b) Qual é o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo da linha tracejada, na qual $H = 2{,}0$ mm e $W = 3{,}0$ mm?

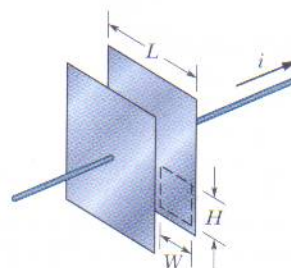



FIG. 32-40 Problema 67.

68 Um fluxo magnético de 7,0 mWb, dirigido para fora, atravessa a face plana inferior da superfície fechada da Fig. 32-41. Na face plana superior (que tem um raio de 4,2 cm) existe um campo magnético $\vec{B}$ de 0,40 T perpendicular à superfície, dirigido para cima. Determine (a) o valor absoluto e (b) o sentido (para dentro ou para fora) do fluxo magnético através da parte curva da superfície.

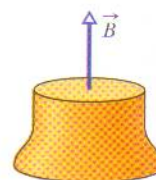



FIG. 32-41 Problema 68.

69 Um capacitor de placas paralelas circulares de raio $R = 16$ mm e afastadas de uma distância $d = 5{,}0$ mm produz um campo uniforme entre as placas. A partir de $t = 0$ a diferença de potencial entre as placas é dada por $V = (100\text{ V})e^{-t/\tau}$, onde $\tau = 12$ ms. Determine o módulo do campo magnético a uma distância $r = 0{,}80R$ do eixo central (a) em função do tempo para $t \geq 0$; (b) no instante $t = 3\tau$.

70 Uma amostra do sal paramagnético usado para obter a curva da Fig. 32-14 é submetida a um campo magnético uniforme de 2,0 T. Determine a que temperatura o grau de saturação magnética da amostra é (a) 50%; (b) 90%.

71 Um capacitor de placas paralelas circulares de raio R está sendo descarregado. A corrente de deslocamento que atravessa uma área circular central, paralela às placas, de raio $R/2$, é 2,0 A. Qual é a corrente de descarga?

72 A Fig. 32-42 mostra a variação de um campo elétrico que é perpendicular a uma região circular de 2,0 m^2. Qual é a maior corrente de deslocamento que atravessa a região durante o período de tempo representado no gráfico?

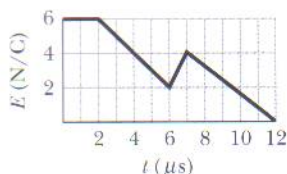



FIG. 32-42 Problema 72.

73 A Fig. 32-38 mostra um anel (L) que serve de modelo para um material paramagnético. (a) Faça um esboço das linhas de campo magnético no interior e nas proximidades do material devido ao ímã em forma de barra. Determine (b) a orientação do momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ do anel; (c) o sentido da corrente convencional i no anel (horário ou anti-horário); (d) a orientação da força magnética exercida pelo campo magnético do ímã sobre o anel.

74 No estado de menor energia do átomo de hidrogênio a distância mais provável entre o único elétron e o próton (o núcleo) é $5{,}2 \times 10^{-11}$ m. (a) Calcule o módulo do campo elétrico produzido pelo próton a essa distância. A componente $\mu_{s,z}$ do momento dipolar magnético do spin do próton é $1{,}4 \times 10^{-26}$ J/T. (b) Calcule o módulo do campo magnético do próton à distância de $5{,}2 \times 10^{-11}$ m sobre o eixo z. (*Sugestão:* Use a Eq. 29-27.) (c) Qual é a razão entre o momento dipolar magnético de spin do elétron e o momento dipolar magnético de spin do próton?

75 Na Fig. 32-43 um ímã em forma de barra se encontra nas vizinhanças de um tubo de papel. (a) Faça um esboço das linhas de campo magnético que atravessam a superfície do cilindro. (b) Qual é o sinal de $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ para todas as áreas $d\vec{A}$ do cilindro? (c) Esse fato está em contradição com a lei de Gauss para o magnetismo? Justifique sua resposta.

FIG. 32-43 Problema 75.

O Sistema Internacional de Unidades (SI)* A

TABELA 1

As Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
comprimento	metro	m	"... a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina-irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	"... a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133." (1967)
corrente elétrica	ampère	A	"... a corrente constante que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produziria entre esses condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de matéria	mol	mol	"... a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono-12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de freqüência 540×10^{12} hertz e que irradia nessa direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979)

*Adaptado de "The International System of Units (SI)", Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2001. As definições acima foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, um órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

TABELA 2

Algumas Unidades Secundárias do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo	
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade escalar, velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão	pascal	Pa	N/m^2
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade de campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade de campo magnético	ampère por metro	A/m	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
condutividade térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensidade radiante	watt por esferorradiano	W/sr	

TABELA 3

As Unidades Suplementares SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esferorradiano	sr

Algumas Constantes Fundamentais da Física* B

Constante	Símbolo	Valor Prático	Melhor Valor (2006)	
			Valor[a]	Incerteza
Velocidade da luz no vácuo	c	$3,00 \times 10^{8}$ m/s	2,997 924 58	exata
Carga elementar	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,602 176 487	$2,5 \times 10^{-8}$
Constante gravitacional	G	$6,67 \times 10^{-11}$ $m^3/s^2 \cdot kg$	6,674 28	$1,0 \times 10^{-4}$
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol · K	8,314 472	$1,7 \times 10^{-6}$
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}	6,022 141 79	$5,0 \times 10^{-8}$
Constante de Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380 650 4	$1,7 \times 10^{-6}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \times 10^{-8}$ $W/m^2 \cdot K^4$	5,670 400	$7,0 \times 10^{-6}$
Volume molar de um gás ideal nas CNTP[c]	V_m	$2,27 \times 10^{-2}$ m^3/mol	2,271 098 1	$1,7 \times 10^{-6}$
Permissividade do vácuo	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	exata
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	exata
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626 068 96	$5,0 \times 10^{-8}$
Massa do elétron[b]	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,109 382 15	$5,0 \times 10^{-8}$
		$5,49 \times 10^{-4}$ u	5,485 799 094	$4,2 \times 10^{-10}$
Massa do próton[b]	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,672 621 637	$5,0 \times 10^{-8}$
		1,0073 u	1,007 276 466 77	$1,0 \times 10^{-10}$
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1840	1,836 152 672 47	$4,3 \times 10^{-10}$
Razão entre a massa e a carga do elétron	e/m_e	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,758 820 150	$2,5 \times 10^{-8}$
Massa do nêutron[b]	m_n	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,674 927 211	$5,0 \times 10^{-8}$
		1,0087 u	1,008 664 915 97	$4,3 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de hidrogênio[b]	m_{1_H}	1,0078 u	1,007 825 031 6	$1,0 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de deutério[b]	m_{2_H}	2,0141 u	2,014 101 777 9	$1,0 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de hélio[b]	$m_{4_{He}}$	4,0026 u	4,002 603 2	$1,0 \times 10^{-10}$
Massa do múon	m_μ	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,883 531 30	$5,6 \times 10^{-8}$
Momento magnético do elétron	μ_e	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284 763 77	$2,5 \times 10^{-8}$
Momento magnético do próton	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,410 606 662	$2,6 \times 10^{-8}$
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274 008 009 15	$2,5 \times 10^{-8}$
Magnéton nuclear	μ_N	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050 783 24	$2,5 \times 10^{-8}$
Raio de Bohr	a	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,291 772 085 9	$6,8 \times 10^{-10}$
Constante de Rydberg	R	$1,10 \times 10^{7}$ m^{-1}	1,097 373 156 852 7	$6,6 \times 10^{-12}$
Comprimento de onda de Compton do elétron	λ_C	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,426 310 217 5	$1,4 \times 10^{-9}$

[a]Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.

[b]As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica: 1 u = $1,660\,538\,86 \times 10^{-27}$ kg.

[c]CNPT significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2006 (www.physics.nist.gov).

C Alguns Dados Astronômicos

Algumas Distâncias da Terra

À Lua*	$3,82 \times 10^8$ m	Ao centro da nossa galáxia	$2,2 \times 10^{20}$ m
Ao Sol*	$1,50 \times 10^{11}$ m	À galáxia de Andrômeda	$2,1 \times 10^{22}$ m
À estrela mais próxima (*Proxima Centauri*)	$4,04 \times 10^{16}$ m	Ao limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

*Distância média.

O Sol, a Terra e a Lua

Propriedade	Unidade	Sol		Terra	Lua
Massa	kg	$1,99 \times 10^{30}$		$5,98 \times 10^{24}$	$7,36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6,96 \times 10^8$		$6,37 \times 10^6$	$1,74 \times 10^6$
Massa específica média	kg/m^3	1410		5520	3340
Aceleração de queda livre na superfície	m/s^2	274		9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618		11,2	2,38
Período de rotação[a]	—	37 d nos pólos[b]	26 d no equador[b]	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação[c]	W	$3,90 \times 10^{26}$			

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

[c]Perto dos limites da atmosfera terrestre a energia solar é recebida a uma taxa de 1340 W/m^2, supondo uma incidência normal.

Algumas Propriedades dos Planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão*
Distância média do Sol, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação,[a] dias	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo em relação à órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Massa específica (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície[c], m/s^2	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape[c], km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
Satélites conhecidos	0	0	1	2	63 + anéis	34 + anéis	27 + anéis	13 + anéis	1

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]Vênus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.

[c]Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

*A partir de 2008, por decisão da União Astronômica, Plutão não é mais um planeta e sim um plutóide, uma nova classe de astro que, até o momento, tem apenas dois representantes: Plutão e Eris. (N.T.)

Fatores de Conversão D

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente dessas tabelas. Assim, por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções e, portanto, $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Ângulo Plano

	°	′	″	RADIANOS	revoluções
1 grau =	1	60	3600	$1{,}745 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \times 10^{-4}$	$4{,}630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	$7{,}716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3438	$2{,}063 \times 10^{5}$	1	0,1592
1 revolução =	360	$2{,}16 \times 10^{4}$	$1{,}296 \times 10^{6}$	6,283	1

Ângulo Sólido

1 esfera = 4π esferorradianos = 12,57 esferorradianos

Comprimento

	cm	METROS	km	polegadas	pés	milhas
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro =	10^{5}	1000	1	$3{,}937 \times 10^{4}$	3281	0,6214
1 polegada =	2,540	$2{,}540 \times 10^{-2}$	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pé =	30,48	0,3048	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milha =	$1{,}609 \times 10^{5}$	1609	1,609	$6{,}336 \times 10^{4}$	5280	1

1 angström = 10^{-10} m
1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés
1 fermi = 10^{-15} m
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km
1 braça = 6 pés
1 raio de Bohr = $5{,}292 \times 10^{-11}$ m
1 jarda = 3 pés
1 vara = 16,5 pés
1 mil = 10^{-3} polegadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

	METROS²	cm²	pés²	polegadas²
1 METRO QUADRADO =	1	10^{4}	10,76	1550
1 centímetro quadrado =	10^{-4}	1	$1{,}076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado =	$9{,}290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada =	$6{,}452 \times 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ pés² = 640 acres
1 barn = 10^{-28} m²
1 acre = 43 560 pés²
1 hectare = 10^{4} m² = 2,471 acres

Volume

	METROS^3	cm^3	L	pés^3	polegadas^3
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35,31	$6{,}102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$1{,}000 \times 10^{-3}$	$3{,}531 \times 10^{-5}$	$6{,}102 \times 10^{-2}$
1 litro =	$1{,}000 \times 10^{-3}$	1000	1	$3{,}531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico =	$2{,}832 \times 10^{-2}$	$2{,}832 \times 10^4$	28,32	1	1728
1 polegada cúbica =	$1{,}639 \times 10^{-5}$	16,39	$1{,}639 \times 10^{-2}$	$5{,}787 \times 10^{-4}$	1

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas^3

1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas^3 = 1,201 galão americano

Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são freqüentemente usadas como tal. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg "=" 2,205 lb, isso significa que um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local onde g tem o valor-padrão de 9,80665 m/s^2.

	g	QUILOGRAMAS	slugs	u	onças	libras	toneladas
1 grama =	1	0,001	$6{,}852 \times 10^{-5}$	$6{,}022 \times 10^{23}$	$3{,}527 \times 10^{-2}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$1{,}102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA =	1000	1	$6{,}852 \times 10^{-2}$	$6{,}022 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1{,}102 \times 10^{-3}$
1 slug =	$1{,}459 \times 10^4$	14,59	1	$8{,}786 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1{,}609 \times 10^{-2}$
1 unidade de massa atômica =	$1{,}661 \times 10^{-24}$	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}138 \times 10^{-28}$	1	$5{,}857 \times 10^{-26}$	$3{,}662 \times 10^{-27}$	$1{,}830 \times 10^{-30}$
1 onça =	28,35	$2{,}835 \times 10^{-2}$	$1{,}943 \times 10^{-3}$	$1{,}718 \times 10^{25}$	1	$6{,}250 \times 10^{-2}$	$3{,}125 \times 10^{-5}$
1 libra =	453,6	0,4536	$3{,}108 \times 10^{-2}$	$2{,}732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 tonelada =	$9{,}072 \times 10^5$	907,2	62,16	$5{,}463 \times 10^{29}$	$3{,}2 \times 10^4$	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg

Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tal, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

	slugs/pé^3	QUILOGRAMAS/ METRO^3	g/cm^3	lb/pé^3	lb/polegada^3
1 slug por pé^3 =	1	515,4	0,5154	32,17	$1{,}862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO^3 =	$1{,}940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6{,}243 \times 10^{-2}$	$3{,}613 \times 10^{-5}$
1 grama por centímetro^3 =	1,940	1000	1	62,43	$3{,}613 \times 10^{-2}$
1 libra por pé^3 =	$3{,}108 \times 10^{-2}$	16,02	$16{,}02 \times 10^{-2}$	1	$5{,}787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada^3 =	53,71	$2{,}768 \times 10^4$	27,68	1728	1

Tempo

	anos	d	h	min	SEGUNDOS
1 ano =	1	365,25	$8{,}766 \times 10^3$	$5{,}259 \times 10^5$	$3{,}156 \times 10^7$
1 dia =	$2{,}738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8{,}640 \times 10^4$
1 hora =	$1{,}141 \times 10^{-4}$	$4{,}167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1{,}901 \times 10^{-6}$	$6{,}944 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO =	$3{,}169 \times 10^{-8}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1

Velocidade

	pés/s	km/h	METROS/SEGUNDO	milhas/h	cm/s
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo =	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$	0,01	$2{,}237 \times 10^{-2}$	1

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s   1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

Força

As unidades de força nas áreas sombreadas são atualmente pouco usadas. 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde g possui o valor-padrão de $9{,}80665\ m/s^2$.

	dina	NEWTONS	libras	poundals	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2{,}248 \times 10^{-6}$	$7{,}233 \times 10^{-5}$	$1{,}020 \times 10^{-3}$	$1{,}020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^5	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4{,}448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1{,}383 \times 10^4$	0,1383	$3{,}108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1{,}410 \times 10^2$
1 grama-força =	980,7	$9{,}807 \times 10^{-3}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$7{,}093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9{,}807 \times 10^5$	9,807	2,205	70,93	1000	1

1 tonelada = 2000 lb

Pressão

	atm	dinas/cm²	polegadas de água	cm Hg	PASCALS	libras/polegada²	libras/pé²
1 atmosfera =	1	$1{,}013 \times 10^6$	406,8	76	$1{,}013 \times 10^5$	14,70	2116
1 dina por centímetro² =	$9{,}869 \times 10^{-7}$	1	$4{,}015 \times 10^{-4}$	$7{,}501 \times 10^{-5}$	0,1	$1{,}405 \times 10^{-5}$	$2{,}089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água a 4°C =	$2{,}458 \times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3{,}613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio[a] a 0°C =	$1{,}316 \times 10^{-2}$	$1{,}333 \times 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 PASCAL =	$9{,}869 \times 10^{-6}$	10	$4{,}015 \times 10^{-3}$	$7{,}501 \times 10^{-4}$	1	$1{,}450 \times 10^{-4}$	$2{,}089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada² =	$6{,}805 \times 10^{-2}$	$6{,}895 \times 10^4$	27,68	5,171	$6{,}895 \times 10^3$	1	144
1 libra por pé² =	$4{,}725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3{,}591 \times 10^{-2}$	47,88	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

[a]Onde a aceleração da gravidade possui o valor-padrão de $9{,}80665\ m/s^2$.

1 bar = 10^6 dina/cm² = 0,1 MPa   1 milibar = 10^3 dinas/cm² = 10^2 Pa   1 torr = 1 mm Hg

Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia $E = mc^2$, e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

	Btu	erg	pés-libras	hp · h	JOULES	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Btu =	1	$1{,}055 \times 10^{10}$	777,9	$3{,}929 \times 10^{-4}$	1055	252,0	$2{,}930 \times 10^{-4}$	$6{,}585 \times 10^{21}$	$6{,}585 \times 10^{15}$	$1{,}174 \times 10^{-14}$	$7{,}070 \times 10^{12}$
1 erg =	$9{,}481 \times 10^{-11}$	1	$7{,}376 \times 10^{-8}$	$3{,}725 \times 10^{-14}$	10^{-7}	$2{,}389 \times 10^{-8}$	$2{,}778 \times 10^{-14}$	$6{,}242 \times 10^{11}$	$6{,}242 \times 10^{5}$	$1{,}113 \times 10^{-24}$	670,2
1 pé-libra =	$1{,}285 \times 10^{-3}$	$1{,}356 \times 10^{7}$	1	$5{,}051 \times 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3{,}766 \times 10^{-7}$	$8{,}464 \times 10^{18}$	$8{,}464 \times 10^{12}$	$1{,}509 \times 10^{-17}$	$9{,}037 \times 10^{9}$
1 horsepower-hora =	2545	$2{,}685 \times 10^{13}$	$1{,}980 \times 10^{6}$	1	$2{,}685 \times 10^{6}$	$6{,}413 \times 10^{5}$	0,7457	$1{,}676 \times 10^{25}$	$1{,}676 \times 10^{19}$	$2{,}988 \times 10^{-11}$	$1{,}799 \times 10^{16}$
1 JOULE =	$9{,}481 \times 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	$3{,}725 \times 10^{-7}$	1	0,2389	$2{,}778 \times 10^{-7}$	$6{,}242 \times 10^{18}$	$6{,}242 \times 10^{12}$	$1{,}113 \times 10^{-17}$	$6{,}702 \times 10^{9}$
1 caloria =	$3{,}968 \times 10^{-3}$	$4{,}1868 \times 10^{7}$	3,088	$1{,}560 \times 10^{-6}$	4,1868	1	$1{,}163 \times 10^{-6}$	$2{,}613 \times 10^{19}$	$2{,}613 \times 10^{13}$	$4{,}660 \times 10^{-17}$	$2{,}806 \times 10^{10}$
1 quilowatt-hora =	3413	$3{,}600 \times 10^{13}$	$2{,}655 \times 10^{6}$	1,341	$3{,}600 \times 10^{6}$	$8{,}600 \times 10^{5}$	1	$2{,}247 \times 10^{25}$	$2{,}247 \times 10^{19}$	$4{,}007 \times 10^{-11}$	$2{,}413 \times 10^{16}$
1 elétron-volt =	$1{,}519 \times 10^{-22}$	$1{,}602 \times 10^{-12}$	$1{,}182 \times 10^{-19}$	$5{,}967 \times 10^{-26}$	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$3{,}827 \times 10^{-20}$	$4{,}450 \times 10^{-26}$	1	10^{-6}	$1{,}783 \times 10^{-36}$	$1{,}074 \times 10^{-9}$
1 milhão de elétron-volts =	$1{,}519 \times 10^{-16}$	$1{,}602 \times 10^{-6}$	$1{,}182 \times 10^{-13}$	$5{,}967 \times 10^{-20}$	$1{,}602 \times 10^{-13}$	$3{,}827 \times 10^{-14}$	$4{,}450 \times 10^{-20}$	10^{-6}	1	$1{,}783 \times 10^{-30}$	$1{,}074 \times 10^{-3}$
1 quilograma =	$8{,}521 \times 10^{13}$	$8{,}987 \times 10^{23}$	$6{,}629 \times 10^{16}$	$3{,}348 \times 10^{10}$	$8{,}987 \times 10^{16}$	$2{,}146 \times 10^{16}$	$2{,}497 \times 10^{10}$	$5{,}610 \times 10^{35}$	$5{,}610 \times 10^{29}$	1	$6{,}022 \times 10^{26}$
1 unidade unificada de massa atômica =	$1{,}415 \times 10^{-13}$	$1{,}492 \times 10^{-3}$	$1{,}101 \times 10^{-10}$	$5{,}559 \times 10^{-17}$	$1{,}492 \times 10^{-10}$	$3{,}564 \times 10^{-11}$	$4{,}146 \times 10^{-17}$	$9{,}320 \times 10^{8}$	932,0	$1{,}661 \times 10^{-27}$	1

Potência

	Btu/h	pés-libras/s	hp	cal/s	kW	WATTS
1 Btu por hora =	1	0,2161	$3{,}929 \times 10^{-4}$	$6{,}998 \times 10^{-2}$	$2{,}930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	$1{,}818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1{,}356 \times 10^{-3}$	1,356
1 horsepower =	2545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,088	$5{,}615 \times 10^{-3}$	1	$4{,}186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1{,}341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Campo Magnético

	gauss	TESLAS	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miligauss =	0,001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro^2

Fluxo Magnético

	maxwell	WEBERS
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Fórmulas Matemáticas E

Geometria

Círculo de raio r: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.
Esfera de raio r: área $= 4\pi r^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
Cilindro circular reto de raio r e altura h:
área $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; volume $= \pi r^2 h$.
Triângulo de base a e altura h: área $= \frac{1}{2}ah$.

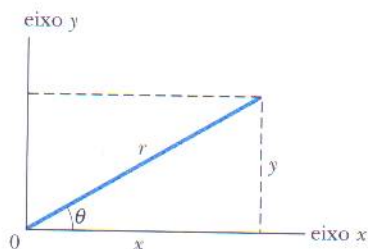
Fórmula de Báskara

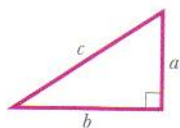
Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

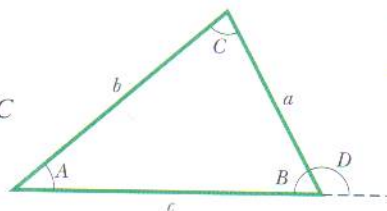
Funções Trigonométricas do Ângulo θ

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,
$a^2 + b^2 = c^2$

Triângulos

Ângulos: A, B, C
Lados opostos: a, b, c
$A + B + C = 180°$
$\dfrac{\text{sen}\ A}{a} = \dfrac{\text{sen}\ B}{b} = \dfrac{\text{sen}\ C}{c}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
Ângulo externo $D = A + C$

Sinais e Símbolos Matemáticos

$=$ igual a
$\approx$ aproximadamente igual a
$\sim$ da ordem de grandeza de
$\neq$ diferente de
$\equiv$ idêntico a, definido como
$>$ maior que ($\gg$ muito maior que)
$<$ menor que ($\ll$ muito menor que)
$\geq$ maior ou igual a (não menor que)
$\leq$ menor ou igual a (não maior que)
$\pm$ mais ou menos
$\propto$ proporcional a
Σ somatório de
$x_{\text{méd}}$ valor médio de x

Identidades Trigonométricas

$\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \text{sen}\ \theta$
$\text{sen}\ \theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\ \text{sen}^2\theta$
$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\ \alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\ \text{sen}\ \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\text{sen}\ \alpha \pm \text{sen}\ \beta = 2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansão Logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

Expansões Trigonométricas (θ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Regra de Cramer

Duas equações lineares simultâneas com incógnitas x e y,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

têm como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Produtos de Vetores

Sejam $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \quad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}$$

Qualquer vetor $\vec{a}$ de componentes a_x, a_y e a_z ao longo dos eixos x, y e z pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores arbitrários de módulos a, b e c. Nesse caso,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{escalar}).$$

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir as letras u e v representam duas funções de x, e a e m são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\, x$
10. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, u = \cos u \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$
2. $\int au\, dx = a\int u\, dx$
3. $\int (u+v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx$
4. $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\, dx$
7. $\int e^x\, dx = e^x$
8. $\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x$
9. $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x$
10. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x|$
11. $\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}\, 2x$
12. $\int e^{-ax}\, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int xe^{-ax}\, dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\int x^2 e^{-ax}\, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
18. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$
19. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$
20. $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\, dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} (a > 0)$
21. $\int \frac{x\, dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

F Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm, a menos que seja indicado em contrário.

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm^3 a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Amerício	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \times 10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bóhrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquida)	−7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3{,}214 \times 10^{-3}$ (0°C)	−101	−34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Criptônio	Kr	36	83,80	$3{,}488 \times 10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Darmstádtio	Ds	110	(271)	—	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Dúbnio	Db	105	262,114	—	—	—	—
Einstêinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	$1{,}696 \times 10^{-3}$ (0°C)	−219,6	−188,2	0,753

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hássio	Hs	108	(265)	—	—	—	—
Hélio	He	2	4,0026	$0{,}1664 \times 10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0{,}08375 \times 10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Irídio	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Lutécio	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnério	Mt	109	(266)	—	—	—	—
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0{,}8387 \times 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Níquel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Nitrogênio	N	7	14,0067	$1{,}1649 \times 10^{-3}$	−210	−195,8	1,03
Nobélio	No	102	(255)	—	—	—	—
Ósmio	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radônio	Rn	86	(222)	$9{,}96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm^3 a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Roentgênio	Rg	111	(272)	—	—	—	—
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Rutênio	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
Rutherfórdio	Rf	104	261,11	—	—	—	—
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seabórgio	Sg	106	263,118	—	—	—	—
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Sódio	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1670	3260	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Unúmbio	Uub	112	(285)	—	—	—	—
Ununhéxio	Uuh	116	(293)	—	—	—	—
Ununóctio	Uuo	118	(294)	—	—	—	—
Ununpêntio	Uup	115	(288)	—	—	—	—
Ununquádio	Uuq	114	(289)	—	—	—	—
Ununséptio	Uus	117	—	—	—	—	—
Ununtrio	Uut	113	(284)	—	—	—	—
Urânio	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5{,}495 \times 10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276

Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando estes se encontram no estado molecular mais comum, como H_2, He, O_2, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores à pressão constante.

Fonte: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3ª edição, 1998, Clarendon Press, Oxford. Veja também www.webelements.com para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

Tabela Periódica dos Elementos

G

Metais | Metalóides | Não-metais

PERÍODOS HORIZONTAIS	Metais alcalinos IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	Gases nobres 0
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103 †	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112	113	114	115	116	117	118

Metais de transição (IIIB–IIB)

Metais de transição

Série															
Série dos lantanídeos *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Série dos actinídeos †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Os elementos 112, 114 e 116 foram descobertos, mas até 2007 ainda não haviam recebido nomes. Veja www.webelements.com para informações mais atualizadas e possíveis novos elementos.

Respostas

dos Testes (T) e das Perguntas (P) e Problemas Ímpares (PR)

Capítulo 21

T **1.** *C* e *D* se atraem; *B* e *D* se atraem **2.** (a) para a esquerda; (b) para a esquerda; (c) para a esquerda **3.** (a) a, *c*, *b*; (b) menor **4.** $-15e$ (a carga total de $-30e$ se divide igualmente) **P** **1.** *a* e *b* **3.** 3, 1, 2, 4 (zero) **5.** *b* e *c* empatados, *a* (zero) **7.** $2kq^2/r^2$, para cima **9.** (a) iguais; (b) menor; (c) subtraem; (d) somam; (e) que se somam; (f) no sentido positivo de *y*; (g) no sentido negativo de *y*; (h) no sentido positivo de *x*; (i) no sentido negativo de *x* **PR** **1.** 1,39 m **3.** 2,81 N **5.** 0,500 **7.** (a) $-1{,}00\ \mu$C; (b) $3{,}00\ \mu$C **9.** (a) 0,17 N; (b) $-0{,}046$ N **11.** $-4{,}00$ **13.** (a) 1,60 N; (b) 2,77 N **15.** (a) -14 cm; (b) 0 **17.** (a) 35 N; (b) $-10°$; (c) $-8{,}4$ cm; (d) $+2{,}7$ cm **19.** (a) 3,00 cm; (b) 0; (c) $-0{,}444$ **21.** (a) 0; (b) 12 cm; (c) 0; (d) $4{,}9 \times 10^{-26}$ N **23.** $3{,}8 \times 10^{-8}$ C **25.** (a) $3{,}2 \times 10^{-19}$ C; (b) 2 **27.** $6{,}3 \times 10^{11}$ **29.** 122 mA **31.** $1{,}3 \times 10^{7}$ C **33.** (a) $-6{,}05$ cm; (b) 6,05 cm **35.** (a) 0; (b) $1{,}9 \times 10^{-9}$ N **37.** (a) ^{9}B; (b) ^{13}N; (c) ^{12}C **39.** $1{,}31 \times 10^{-22}$ N **41.** (a) $2{,}00 \times 10^{10}$ elétrons; (b) $1{,}33 \times 10^{10}$ elétrons **43.** 0,19 MC **45.** 3,8 N **47.** (a) $8{,}99 \times 10^{9}$ N; (b) 8,99 kN **49.** $1{,}7 \times 10^{8}$ N **51.** (a) 0,5; (b) 0,15; (c) 0,85 **53.** (a) $5{,}7 \times 10^{13}$ C; (b) porque as distâncias se cancelam; (c) $6{,}0 \times 10^{5}$ kg **55.** (b) 3,1 cm **57.** $-1{,}32 \times 10^{13}$ C **59.** (a) $(0{,}829\ \text{N})\hat{\text{i}}$; (b) $(-0{,}621\ \text{N})\hat{\text{j}}$ **61.** $2{,}2 \times 10^{-6}$ kg **63.** $-45\ \mu$C **65.** (a) $5{,}1 \times 10^{2}$ N; (b) $7{,}7 \times 10^{28}$ m/s^2 **67.** $4{,}68 \times 10^{-19}$ N **69.** (a) $1{,}72L$; (b) 0

Capítulo 22

T **1.** (a) para a direita; (b) para a esquerda; (c) para a esquerda; (d) para a direita (as cargas de p e e têm o mesmo valor absoluto e p está mais longe) **2.** (a) sentido positivo de *y*; (b) sentido positivo de *x*; (c) sentido negativo de *y* **3.** (a) para a esquerda; (b) para a esquerda; (c) diminui **4.** (a) todos empatados; (b) 1 e 3 empatados, e depois 2 e 4 empatados **P** **1.** *a*, *b*, *c* **3.** (a) à esquerda; (b) não **5.** (a) sim; (b) na direção das cargas; (c) não (os vetores não apontam na mesma direção); (d) se cancelam; (e) se somam; (f) das componentes que se somam; (g) o sentido negativo do eixo *y* **7.** *e*, *b*, depois *a* e *c* empatados, *d* (zero) **9.** (a) 4, 3, 1, 2; (b) 3, depois 1 e 4 empatados, 2 **11.** *a*, *b*, *c* **PR** **1.** (a) $6{,}4 \times 10^{-18}$ N; (b) 20 N/C **3.** 56 pC **5.** (a) $3{,}07 \times 10^{21}$ N/C; (b) para fora **7.** -30 cm **9.** $(1{,}02 \times 10^{5}\ \text{N/C})\hat{\text{j}}$ **11.** (a) $1{,}38 \times 10^{-10}$ N/C; (b) 180° **13.** (a) 160 N/C; (b) 45° **15.** (a) $3{,}60 \times 10^{-6}$ N/C; (b) $2{,}55 \times 10^{-6}$ N/C; (c) $3{,}60 \times 10^{-4}$ N/C; (d) $7{,}09 \times 10^{-7}$ N/C; (e) Quando o próton se aproxima do disco, o equilíbrio das forças exercidas pelos elétrons aumenta. **17.** (a) $-90°$; (b) $+2{,}0\ \mu$C; (c) $-1{,}6\ \mu$C **19.** (a) $qd/4\pi\varepsilon_0 r^3$; (b) $-90°$ **23.** 0,506 **25.** (a) 23,8 N/C; (b) $-90°$ **27.** (a) $-5{,}19 \times 10^{-14}$ C/m; (b) $1{,}57 \times 10^{-3}$ N/C; (c) $-180°$; (d) $1{,}52 \times 10^{-8}$ N/C; (e) $1{,}52 \times 10^{-8}$ N/C **29.** (a) $1{,}62 \times 10^{6}$ N/C; (b) $-45°$ **31.** 1,57 **35.** 0,346 m **37.** 28% **39.** $3{,}51 \times 10^{15}$ m/s^2 **41.** $6{,}6 \times 10^{-15}$ N **43.** (a) $1{,}5 \times 10^{3}$ N/C; (b) $2{,}4 \times 10^{-16}$ N; (c) para cima; (d) $1{,}6 \times 10^{-26}$ N; (e) $1{,}5 \times 10^{10}$ **45.** (a) $1{,}92 \times 10^{12}$ m/s^2; (b) $1{,}96 \times 10^{5}$ m/s **47.** $-5e$ **49.** (a) $2{,}7 \times 10^{6}$ m/s; (b) 1,0 kN/C **51.** 27 μm **53.** (a) 0,245 N; (b) $-11{,}3°$; (c) 108 m; (d) $-21{,}6$ m **55.** (a) $2{,}6 \times 10^{-10}$ N; (b) $3{,}1 \times 10^{-8}$ N; (c) salta para o estigma **57.** (a) $9{,}30 \times 10^{-15}$ C · m; (b) $2{,}05 \times 10^{-11}$ J **59.** $(1/2\pi)\ (pE/I)^{0{,}5}$ **61.** $1{,}22 \times 10^{-23}$ J **63.** 217° **65.** (a) 47 N/C; (b) 27 N/C **67.** (a) 6,0 mm; (b) 180° **69.** $+1{,}00\ \mu$C **71.** (a) $8{,}87 \times 10^{-15}$ N; (b) 120 **73.** 38 N/C **75.** 9 h 30 min **77.** (a) $-0{,}029$ C; (b) porque a esfera seria desintegrada pela força de repulsão **79.** (a) $-1{,}0$ cm; (b) 0; (c) 10 pC **81.** (a) $-1{,}49 \times 10^{-26}$ J; (b) $(-1{,}98 \times 10^{-26}\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{\text{k}}$; (c) $3{,}47 \times 10^{-26}$ J **83.** 61 N/C **85.** (a) $(-1{,}80\ \text{N/C})\hat{\text{i}}$; (b) $(43{,}2\ \text{N/C})\hat{\text{i}}$; (c) $(-6{,}29\ \text{N/C})\hat{\text{i}}$ **87.** (a) linha de cima: 4, 8, 12; linha do meio: 5, 10, 14; linha de baixo: 7, 11, 16; (b) $1{,}63 \times 10^{-19}$ C

Capítulo 23

T **1.** (a) $+EA$; (b) $-EA$; (c) 0; (d) 0 **2.** (a) 2; (b) 3; (c) 1 **3.** (a) igual; (b) igual; (c) igual **4.** 3 e 4 empatados, depois 2, 1 **P** **1.** todos empatados **3.** (a) 8 N · m^2/C; (b) 0 **5.** *a*, *c*, depois *b* e *d* empatados (zero) **7.** (a) todos empatados ($E = 0$); (b) todos empatados **9.** todos empatados **PR** **1.** $-0{,}015$ N · m^2/C **3.** (a) 0; (b) $-3{,}92$ N · m^2/C; (c) 0; (d) 0 **5.** $2{,}0 \times 10^{5}$ N · m^2/C **7.** 3,01 nN · m^2/C **9.** 3,54 μC **11.** (a) 8,23 N · m^2/C; (b) 72,9 pC; (c) 8,23 N · m^2/C; (d) 72,9 pC **13.** (a) 0; (b) 0,0417 **15.** $-1{,}70$ nC **17.** (a) $4{,}5 \times 10^{27}$ C/m^2; (b) $5{,}1 \times 10^{4}$ N/C **19.** (a) 37 μC; (b) $4{,}1 \times 10^{6}$ N ? m^2/C **21.** (a) $-3{,}0 \times 10^{-6}$ C; (b) $+1{,}3 \times 10^{-5}$ C **23.** 5,0 μC/m **25.** (a) 0,32 μC; (b) 0,14 μC **27.** (a) 0,214 N/C; (b) para dentro; (c) 0,855 N/C; (d) para fora; (e) $-3{,}40 \times 10^{-12}$ C; (f) $-3{,}40 \times 10^{-12}$ C **29.** (a) $2{,}3 \times 10^{6}$ N/C; (b) para fora; (c) $4{,}5 \times 10^{5}$ N/C; (d) para dentro **31.** $3{,}8 \times 10^{-8}$ C/m^2 **33.** $-1{,}5$ **35.** (a) $5{,}3 \times 10^{7}$ N/C; (b) 60 N/C **37.** (a) 0; (b) 0; (c) $(-7{,}91 \times 10^{-11}\ \text{N/C})\hat{\text{i}}$ **39.** 0,44 mm **41.** 5,00 nC/m^2 **43.** (a) 0; (b) 1,31 μN/C; (c) 3,08 μN/C; (d) 3,08 μN/C **45.** $-7{,}5$ nC **47.** (a) $2{,}50 \times 10^{4}$ N/C; (b) $1{,}35 \times 10^{4}$ N/C **49.** $1{,}79 \times 10^{-11}$ C/m^2 **51.** (a) 0; (b) 56,2 mN/C; (c) 112 mN/C; (d) 49,9 mN/C; (e) 0; (f) 0; (g) $-5{,}00$ fC; (h) 0 **53.** $6K\varepsilon_0 r^3$ **55.** (a) 7,78 fC; (b) 0; (c) 5,58 mN/C; (d) 22,3 mN/C **57.** (a) 0,125; (b) 0,500 **59.** (a) $+2{,}0$ nC; (b) $-1{,}2$ nC; (c) $+1{,}2$ nC; (d) $+0{,}80$ nC **61.** (a) 5,4 N/C; (b) 6,8 N/C **63.** (a) 0; (b) $2{,}88 \times 10^{4}$ N/C; (c) 200 N/C **65.** $(5{,}65 \times 10^{4}\ \text{N/C})\hat{\text{j}}$ **67.** (a) $-2{,}53 \times 10^{-2}$ N · m^2/C; (b) $+2{,}53 \times 10^{-2}$ N · m^2/C **69.** (a) 0; (b) $q_a/4\pi\varepsilon_0 r^2$; (c) $(q_a + q_b)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ **71.** $-1{,}04$ nC **73.** 3,6 nC **75.** (a) 693 kg/s; (b) 693 kg/s; (c) 347 kg/s; (d) 347 kg/s; (e) 575 kg/s **79.** (a) $+4{,}0\ \mu$C; (b) $-4{,}0\ \mu$C **81.** (a) $0{,}25R$; (b) $2{,}0R$

Capítulo 24

T **1.** (a) negativo; (b) aumenta **2.** (a) positivo; (b) aumenta **3.** (a) para a direita; (b) 1, 2, 3, 5: positivo; 4, negativo; (c) 3, depois 1, 2 e 5 empatados, 4 **4.** todos empatados **5.** *a*, *c* (zero), *b* **6.** (a) 2, depois 1 e 3 empatados; (b) 3; (c) é acelerado para a esquerda **P** **1.** (a) 1 e 2; (b) nenhum; (c) não; (d) 1 e 2, sim; 3 e 4, não **3.** $-4q/4\pi\varepsilon_0 d$ **5.** (a) maior; (b) positivo; (c) negativo; (d) todas empatadas **7.** (a) 3 e 4 empatados, depois 1 e 2 empatados; (b) 1 e 2, aumenta; 3 e 4, diminui **9.** (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) as três grandezas continuam a ser 0 **PR** **1.** $2{,}8 \times 10^{5}$ **3.** (a) $3{,}0 \times 10^{5}$ C; (b) $3{,}6 \times 10^{6}$ J **5.** 8,8 mm **7.** (a) $1{,}87 \times 10^{-21}$ J; (b) $-11{,}7$ mV **9.** $-32{,}0$ V **11.** (a) $-0{,}268$ mV; (b) $-0{,}681$ mV **13.** (a) 3,3 nC; (b) 12 nC/m^2 **15.** 0,562 mV **17.** (a) 6,0 cm; (b) $-12{,}0$ cm **19.** (a) 0,54 mm; (b) 790 V **21.** 16,3 μV **23.** (a) $-2{,}30$ V; (b) $-1{,}78$ V **25.** (a) 24,3 mV; (b) 0 **27.** 32,4 mV **29.** 47,1 μV **31.** 13 kV **33.** 18,6 mV **35.** $(-12\ \text{V/m})\hat{\text{i}} + (12\ \text{V/m})\hat{\text{j}}$ **37.** $(-4{,}0 \times 10^{-16}\ \text{N})\hat{\text{i}} + (1{,}6 \times 10^{-16}\ \text{N})\hat{\text{j}}$ **39.** 150 N/C **41.** $-0{,}192$ pJ **43.** (a) 0,90 J; (b) 4,5 J **45.** (a) $+6{,}0 \times 10^{4}$ V; (b) $-7{,}8 \times 10^{5}$ V; (c) 2,5 J; (d) aumentar; (e) igual; (f) igual **47.** 2,5 km/s **49.** 22 km/s **51.** (a) 0,225 J; (b) *A* 45,0 m/s^2, *B* 22,5 m/s^2; (c) *A* 7,75 m/s, *B* 3,87 m/s **53.** 0,32

km/s **55.** (a) um próton; (b) 65,3 km/s **57.** $1,6 \times 10^{-9}$ m **59.** (a) 3,0 J; (b) −8,5 m **61.** (a) 12; (b) 2 **63.** $2,5 \times 10^{-8}$ C **65.** (a) $-1,8 \times 10^2$ V; (b) 2,9 kV; (c) −8,9 kV **67.** (a) 12 kN/C; (b) 1,8 kV; (c) 5,8 cm **69.** $7,0 \times 10^5$ m/s **71.** (a) 1,8 cm; (b) $8,4 \times 10^5$ m/s; (c) $2,1 \times 10^{-17}$ N; (d) positivo; (e) $1,6 \times 10^{-17}$ N; (f) negativo **73.** (a) $+7,19 \times 10^{-10}$ V; (b) $+2,30 \times 10^{-28}$ J; (c) $+2,43 \times 10^{-29}$ J **75.** 2,1 dias **77.** (a) 64 N/C; (b) 2,9 V; (c) 0 **79.** $2,30 \times 10^{-28}$ J **81.** $2,30 \times 10^{-22}$ J **83.** (a) $3,6 \times 10^5$ V; (b) não **85.** −1,92 MV **87.** $1,48 \times 10^7$ m/s **89.** $6,4 \times 10^8$ V **93.** (a) $Q/4\pi\varepsilon_0 r$; (b) $(\rho/3\varepsilon_0)\,(1,5r_2^2 - 0,50r^2 - r_1^3 r^{-1})$, $\rho = Q/[(4\pi/3)(r_2^3 - r_1^3)]$; (c) $(\rho/2\varepsilon_0)(r_2^2 - r_1^2)$, com ρ como em (b); (d) sim **95.** $p/2\pi\varepsilon_0 r^3$ **97.** 2,90 kV **99.** (a) 0,484 MeV; (b) 0 **103.** (a) 38 s; (b) 280 dias **105.** −1,7 **107.** 1 **109.** (a) 1,48 nC; (b) 795 V **111.** −187 V **115.** (c) 4,2 V

Capítulo 25

T **1.** (a) permanece a mesma; (b) permanece a mesma **2.** (a) diminui; (b) aumenta; (c) diminui **3.** (a) V, $q/2$; (b) $V/2$, q **P** **1.** *a*, 2; *b*, 1; *c*, 3 **3.** *a*, em série; *b*, em paralelo; *c*, em paralelo **5.** (a) não; (b) sim; (c) todos empatados **7.** (a) permanece a mesma; (b) permanece a mesma; (c) maior; (d) maior **9.** em paralelo, C_1 sozinha, C_2 sozinha, em série **11.** (a) aumenta; (b) permanece constante; (c) aumenta; (d) aumenta; (e) aumenta; (f) aumenta **PR** **1.** (a) 3,5 pF; (b) 3,5 pF; (c) 57 V **3.** $6,79 \times 10^{-4}$ F/m^2 **5.** (a) 144 pF; (b) 17,3 nC **7.** 0,280 pF **9.** 3,16 μF **11.** 315 mC **13.** (a) 789 μC; (b) 78,9 V **15.** 43 pF **17.** (a) 3,00 μF; (b) 60,0 μC; (c) 10,0 V; (d) 30,0 μC; (e) 10,0 V; (f) 20,0 μC; (g) 5,00 V; (h) 20,0 μC **19.** (a) 50 V; (b) $5,0 \times 10^{-5}$ C; (c) $1,5 \times 10^{-4}$ C **21.** 3,6 pC **23.** (a) 4,0 μF; (b) 2,0 μF **25.** (a) $4,5 \times 10^{14}$; (b) $1,5 \times 10^{14}$; (c) $3,0 \times 10^{14}$; (d) $4,5 \times 10^{14}$; (e) para cima; (f) para cima **27.** (a) 9,00 μC; (b) 16,0 μC; (c) 9,00 μC; (d) 16,0 μC; (e) 8,40 μC; (f) 16,8 μC; (g) 10,8 μC; (h) 14,4 μC **29.** 0,27 J **31.** 72 F **33.** (a) $9,16 \times 10^{-18}$ J/m^3; (b) $9,16 \times 10^{-6}$ J/m^3; (c) $9,16 \times 10^6$ J/m^3; (d) $9,16 \times 10^{18}$ J/m^3; (e) ∞ **35.** (a) 16,0 V; (b) 45,1 pJ; (c) 120 pJ; (d) 75,2 pJ **37.** (a) 190 V; (b) 95 mJ **39.** 0,11 J/m^3 **41.** Pirex **43.** 81 pF/m **45.** 0,63 m^2 **47.** 66 μJ **49.** 17,3 pF **51.** (a) 10 kV/m; (b) 5,0 nC; (c) 4,1 nC **53.** (a) 0,107 nF; (b) 7,79 nC; (c) 7,45 nC **55.** (a) 89 pF; (b) 0,12 nF; (c) 11 nC; (d) 11 nC; (e) 10 kV/m; (f) 2,1 kV/m; (g) 88 V; (h) −0,17 μJ **57.** (a) 7,20 μC; (b) 18,0 μC; (c) A bateria fornece carga apenas às placas às quais está ligada; a carga das outras placas se deve apenas à transferência de elétrons de uma placa para outra de acordo com a nova distribuição e tensões pelos capacitores. Assim, a bateria não fornece carga diretamente ao capacitor 4. **59.** (a) 10 μC; (b) 20 μC **61.** 45 μC **63.** 16 μC **65.** (a) 2,40 μF; (b) 0,480 mC; (c) 80 V; (d) 0,480 mC; (e) 120 V **67.** 40 μF **69.** (a) 200 kV/m; (b) 200 kV/m; (c) 1,77 μC/m^2; (d) 4,60 μC/m^2; (e) −2,83 μC/m^2 **71.** 4,9% **73.** 1,06 nC **75.** (a) 0,708 pF; (b) 0,600; (c) $1,02 \times 10^{-9}$ J; (d) atraído **77.** 5,3 V

Capítulo 26

T **1.** 8 A, para a direita **2.** (a) − (c) para a direita **3.** *a* e *c* empatados, *b* **4.** dispositivo 2 **5.** (a) e (b) empatadas, depois (d), depois (c) **P** **1.** a, *b* e c empatadas, *d* **3.** *A*, *B*, e *C* empatados, depois $A + B$ e $B + C$ empatados, $A + B + C$ **5.** (a) superior-inferior, dianteira-traseira, esquerda-direita; (b) superior-inferior, dianteira-traseira, esquerda-direita; (c) superior-inferior, dianteira-traseira, esquerda-direita; (d) superior-inferior, dianteira-traseira, esquerda-direita **7.** (a) *C*, *B*, *A*; (b) todos empatados; (c) *A*, *B*, *C*; (d) todos empatados **9.** (a) *B*, *A*, *C*; (b) *B*, *A*, *C* **PR** **1.** (a) 1,2 kC; (b) $7,5 \times 10^{21}$ **3.** 6,7 μC/m^2 **5.** 0,38 mm **7.** (a) 6,4 A/m^2; (b) norte; (c) a área da seção reta **9.** 13 min **11.** 18,1 μA **13.** (a) 1,33 A; (b) 0,666A; (c) J_a **15.** $2,0 \times 10^6(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ **17.** $2,0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ **19.** 2,4 Ω **21.** 54 Ω **23.** 3,0 **25.** $(1,8 \times 10^3)$°C **27.** $3,35 \times 10^{-7}$ C **29.** $8,2 \times 10^{-4}\ \Omega \cdot \text{m}$ **31.** (a) 38,3 mA; (b) 109 A/m^2; (c) 1,28 cm/s; (d) 227 V/m **33.** (a) 6,00 mA; (b) $1,59 \times 10^{-8}$ V; (c) 21,2 nΩ **35.** 981 kΩ **39.** (a) 1,0 kW; (b) \$0,25 **41.** 0,135 W **43.** (a) 10,9 A; (b) 10,6 Ω; (c) 4,50 MJ **45.** 150 s **47.** (a) 28,8 Ω; (b) $2,60 \times 10^{19}$ s^{-1} **49.** (a) 5,85 m; (b) 10,4 m **51.** (a) \$4,46; (b) 144 Ω; (c) 0,833 A **53.** (a) 5,1 V; (b) 10 V; (c) 10 W; (d) 20 W **55.** (a) $2,3 \times 10^{12}$; (b) $5,0 \times 10^3$; (c) 10 MV **57.** (a) −8,6%; (b) menor **59.** 660 W **61.** (a) prata; (b) 51,6 nΩ **63.** (a) 1,37; (b) 0,730 **65.** 28,8 kC **67.** 146 kJ **69.** $3,0 \times 10^6$ J/kg **71.** 2,4 kW **73.** 560 W **75.** (a) 250°C; (b) sim

Capítulo 27

T **1.** (a) para a direita; (b) todos empatados; (c) *b*, depois *a* e c empatados; (d) *b*, depois *a* e *c* empatados **2.** (a) todas empatadas; (b) R_1, R_2, R_3 **3.** (a) menor; (b) maior; (c) igual **4.** (a) $V/2$, i; (b) V, $i/2$ **5.** (a) 1, 2, 4, 3; (b) 4, 1 e 2 empatados, 3 **P** **1.** (a) em série; (b) em paralelo; (c) em paralelo **3.** (a) igual; (b) maior **5.** em paralelo, R_2, R_1, em série **7.** (a) permanece a mesma; (b) permanece a mesma; (c) menor; (d) maior **9.** (a) diminui; (b) diminui; (c) aumenta **11.** (a) todos empatados; (b) 1, 3, 2 **PR** **1.** (a) 80 J; (b) 67 J; c) 13 J **3.** 11 kJ **5.** (a) 14 V; (b) $1,0 \times 10^2$ W; (c) $6,0 \times 10^2$ W; (d) 10 V; (e) $1,0 \times 10^2$ W **7.** (a) 0,50 A; (b) 1,0 W; (c) 2,0 W; (d) 6,0 W; (e) 3,0 W; (f) fornecendo; (g) recebendo **9.** (a) 4,00 Ω; (b) em paralelo **11.** $3,6 \times 10^3$ A **13.** (a) 50 V; (b) 48 V; (c) negativo **15.** (a) 6,9 km; (b) 20 Ω **17.** (a) 0,333 A; (b) para a direita; (c) 720 J **19.** 8,0 Ω **21.** (a) 0,004 Ω; (b) 1 **23.** 4,50 Ω **25.** 5,56 A **27.** (a) 50 mA; (b) 60 mA; (c) 9,0 V **29.** 3*d* **31.** 48,3 V **33.** (a) −11 V; (b) −9,0 V **35.** 1,43 Ω **37.** (a) 0,67 A; (b) para baixo; (c) 0,33 A; (d) para cima; (e) 0,33 A; (f) para cima; (g) 3,3 V **39.** (a) 5,25 V; (b) 1,50 V; (c) 5,25 V; (d) 6,75 V **41.** (a) 0,150 Ω; (b) 240 W **43.** (a) 0,709 W; (b) 0,050 W; (c) 0,346 W; (d) 1,26 W; (e) −0,158 W **45.** 9 **47.** (a) 1,11 A; (b) 0,893 A; (c) 126 m **49.** −3,0% **51.** (a) 0,45 A **53.** (a) 55,2 mA; (b) 4,86 V; (c) 88,0 Ω; (d) diminui **57.** 4,61 **59.** (a) 2,41 μs; (b) 161 pF **61.** 0,208 ms **63.** 0,72 MΩ **65.** (a) 1,1 mA; (b) 0,55 mA; (c) 0,55 mA; (d) 0,82 mA; (e) 0,82 mA; (f) 0; (g) $4,0 \times 10^2$ V; (h) $6,0 \times 10^2$ V **67.** 411 μA **69.** (a) 0,955 μC/s; (b) 1,08 μW; (c) 2,74 μW; (d) 3,82 μW **71.** (a) 3,0 kV; (b) 10 s; (c) 11 GΩ **73.** (a) 24,8 Ω; (b) 14,9 kΩ **75.** (a) $1,32 \times 10^7$ A/m^2; (b) 8,90 V; (c) cobre; (d) $1,32 \times 10^7$ A/m^2; (e) 51,1 V; (f) ferro **77.** o cabo **79.** (a) 3,00 A; (b) 3,75 A; (c) 3,94 A **81.** 20 Ω **83.** (a) 3,00 A; (b) para baixo; (c) 1,60 A; (d) para baixo; (e) fornece; (f) 55,2 W; (g) fornece; (h) 6,40 W **85.** (a) 85,0 Ω; (b) 915 Ω **87.** (a) 1,0 V; (b) 50 mΩ **89.** −13 μC **91.** 4,0 V **93.** 3 **97.** (a) 1,5 mA; (b) 0; (c) 1,0 mA **99.** (a) 0; (b) 14,4 W **103.** (a) 60,0 mA; (b) para baixo; (c) 180 mA; (d) para a esquerda; (e) 240 mA; (f) para cima **105.** (a) 4,0 A; (b) para cima; (c) 0,50 A; (d) para baixo; (e) 64 W; (f) 16 W; (g) fornecendo; (h) absorvendo **107.** (a) 1,00 A; (b) 24,0 W **109.** $1,00 \times 10^{-6}$ **111.** (b) sim

Capítulo 28

T **1.** *a*, $+z$; *b*, $-x$; *c*, $\vec{F}_B = 0$ **2.** (a) 2 e depois 1 e 3 empatadas; (b) 4 **3.** (a) o elétron; (b) no sentido horário **4.** $-y$ **5.** (a) todas empatadas; (b) 1 e 4 empatadas e depois 2 e 3 empatadas **P** **1.** (a) $\vec{F}_E$; (b) $\vec{F}_B$ **3.** (a) não, porque $\vec{v}$ e $\vec{F}_B$ devem ser perpendiculares; (b) sim; (c) não, porque $\vec{B}$ e $\vec{F}_B$ devem ser perpendiculares **5.** (a) $+z$ e $-z$ empatadas, depois $+y$ e $-y$ empatadas, depois $+x$ e $-x$ empatadas (zero); (b) $+y$ **7.** (a) negativa; (b) igual; (c) igual; (d)

semicircunferência **9.** (a) $\vec{B}_1$; (b) $\vec{B}_1$ para dentro do papel, $\vec{B}_2$ para fora do papel; (c) menor **11.** (a) positivo; (b) 2 → 1 e 2 → 4 empatados, 2 → 3 (que é zero) **PR 1.** (a) $(6{,}2 \times 10^{-14}\ \mathbf{N})\hat{k}$; (b) $(-6{,}2 \times 10^{-14}\ \mathbf{N})\hat{k}$ **3.** (a) 400 km/s; (b) 835 eV **5.** −2,0 T **7.** $-(0{,}267\ \mathbf{mT})\hat{k}$ **9.** $(-11{,}4\ \mathbf{V/m})\hat{i} - (6{,}00\ \mathbf{V/m})\hat{j} + (4{,}80\ \mathbf{V/m})\hat{k}$ **11.** 0,68 MV/m **13.** 7,4 μV **15.** (a) $(-600\ \mathbf{mV/m})\hat{k}$; (b) 1,20 V **17.** (a) $2{,}05 \times 10^7$ m/s; (b) 467 μT; (c) 13,1 MHz; (d) 76,3 ns **19.** 21,1 μT **21.** (a) 0,978 MHz; (b) 96,4 cm **23.** $1{,}2 \times 10^{-9}$ kg/C **25.** (a) $2{,}60 \times 10^6$ m/s; (b) 0,109 μs; (c) 0,140 MeV; (d) 70,0 kV **27.** 65,3 km/s **29.** (a) 0,358 ns; (b) 0,166 mm; (c) 1,51 mm **31.** (a) 495 mT; (b) 22,7 mA; (c) 8,17 MJ **33.** 5,07 ns **35.** $2{,}4 \times 10^2$ m **37.** (a) 200 eV; (b) 20,0 keV; (c) 0,499% **39.** (a) 467 mA; (b) para a direita **41.** (a) 28,2 N; (b) horizontal, para oeste **43.** $(-2{,}50\ \mathbf{mN})\hat{j} + (0{,}750\ \mathbf{mN})\hat{k}$ **45.** (a) 0,10 T; (b) 31° **47.** $(-4{,}3 \times 10^{-3}\ \mathbf{N \cdot m})\hat{j}$ **49.** 0,60 μN **51.** (a) 542 Ω; (b) em série; (c) 2,52 Ω; (d) em paralelo **53.** 2,45 A **55.** (a) 12,7 A; (b) 0,0805 N · m **57.** (a) 0,30 A · m²; (b) 0,024 N · m **59.** (a) 2,86 A · m²; (b) 1,10 A · m² **61.** (a) $-(9{,}7 \times 10^{-4}\ \mathbf{N \cdot m})\hat{i} - (7{,}2 \times 10^{-4}\ \mathbf{N \cdot m})\hat{j} + (8{,}0 \times 10^{-4}\ \mathbf{N \cdot m})\hat{k}$; (b) $-6{,}0 \times 10^{-4}$ J **63.** (a) 90°; (b) 1; (c) $1{,}28 \times 10^{-7}$ N · m **65.** (a) −72,0 μJ; (b) $(96{,}0\hat{i} + 48{,}0\hat{k})$ μN · m **67.** 127 u **69.** (a) 20 min; (b) $5{,}9 \times 10^{-2}$ N · m **71.** 8,2 mm **73.** $(-500\ \mathbf{V/m})\hat{j}$ **75.** (a) 0,50; (b) 0,50; (c) 14 cm; (d) 14 cm **77.** −40 mC **79.** (a) $(12{,}8\hat{i} + 6{,}41\hat{j}) \times 10^{-22}$ N; (b) 90°; (c) 173° **81.** (a) $6{,}3 \times 10^{14}$ m/s²; (b) 3,0 mm **83.** (a) 1,4; (b) 1,0 **85.** $(0{,}80\hat{j} - 1{,}1\hat{k})$ mN

Capítulo 29

T 1. *b, c, a* **2.** *d*, depois *a* e *c* empatados, *b* **3.** *d, a, b* e *c* empatados (zero) **P 1.** c, *d*, depois *a* e *b* empatados (zero) **3.** *a, c, b* **5.** *c, a, b* **7.** (a) 1, 3, 2; (b) menor **9.** *c* e *d* empatados, depois *b, a* **11.** *b, a, d, c* (zero) **PR 1.** (a) 16 A; (b) leste **3.** (a) 3,3 μT; (b) sim **5.** (a) 0,102 μT; (b) para fora **7.** (a) opostos; (b) 30 A **9.** (a) 4,3 A; (b) para fora **11.** (a) 1,0 mT; (b) para fora; (c) 0,80 mT; (d) para fora **13.** $(-7{,}75 \times 10^{-23}\ \mathbf{N})\hat{i}$ **15.** 2,00 rad **17.** 50,3 nT **19.** $(80\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{T})\hat{j}$ **21.** 132 nT **23.** (a) 1,7 μT; (b) para dentro do papel; (c) 6,7 μT; (d) para dentro do papel **25.** 61,3 mA **27.** 5,0 μT **29.** 256 nT **31.** $(22{,}3\ \mathbf{pT})\hat{j}$ **33.** (a) 20 μT; (b) para dentro do papel **35.** 88,4 pN/m **37.** 800 nN/m **39.** $(-125\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{N/m})\hat{i} + (41{,}7\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{N/m})\hat{j}$ **41.** $(3{,}20\ \mathbf{mN})\hat{j}$ **43.** (a) −2,5 μT · m; (b) 0 **45.** (a) 0; (b) 0,850 mT; (c) 1,70 mT; (d) 0,850 mT **47.** (a) 0; (b) 0,10 μT; (c) 0,40 μT **49.** 0,30 mT **51.** (a) 533 μT; (b) 400 μT **53.** (a) 4,77 cm; (b) 35,5 μT **55.** 0,272 A **57.** 0,47 A · m² **59.** (a) 2,4 A · m²; (b) 46 cm **61.** (a) $(0{,}060\ \mathbf{A \cdot m^2})\hat{j}$; (b) $(96\ \mathbf{pT})\hat{j}$ **63.** (a) 79 μT; (b) $1{,}1 \times 10^{-6}$ N · m **65.** (a) 15,3 μT **67.** (a) 15 A; (b) $-z$ **69.** 7,7 mT **71.** (a) $(0{,}24\hat{i})$ nT; (b) 0; (c) $(-43\hat{k})$ pT; (d) $(0{,}14\hat{k})$ nT **73.** 1,28 mm **77.** $(-0{,}20\ \mathbf{mT})\hat{k}$ **85.** (a) 4,8 mT; (b) 0,93 mT; (c) 0 **93.** (a) $\mu_0 ir/2\pi c^2$; (b) $\mu_0 i/2\pi r$; (c) $\mu_0 i(a^2 - r^2)/2\pi(a^2 - b^2)r$; (d) 0

Capítulo 30

T 1. *b*, depois *d* e *e* empatados, depois *a* e *c* empatados (zero) **2.** *a* e *b* empatados, *c* (zero) **3.** c e *d* empatados, depois a e *b* empatados **4.** *b*, para fora; *c*, para fora; *d*, para dentro; *e*, para dentro **5.** *d* ou *e* **6.** (a) 2, 3, 1 (zero); (b) 2, 3, 1 **7.** a e *b* empatados, *c* **P 1.** (a) todas empatadas (zero); (b) 2, depois 1 e 3 empatadas (zero) **3.** para fora **5.** *d* e *c* empatadas, *b, a* **7.** (a) todos empatados (zero); (b) 1 e 2 empatados, 3; (c) todos empatados (zero) **9.** (a) maior; (b) igual; (c) igual; (d) igual (zero) **PR 1.** (a) 31 mV; (b) para a esquerda **3.** 0,198 mV **5.** 30 mA **7.** 0 **9.** 0 **11.** (a) 21,7 V; (b) o sentido anti-horário **13.** (b) 0,796 m² **15.** (a) 40 Hz; (b) 3,2 mV **17.** 5,50 kV **19.** 29,5 mC **21.** (a) $\mu_0 iR^2\pi r^2/2x^3$; (b) $3\mu_0 i\pi R^2 r^2 v/2x^4$; (c) anti-horário **23.** (a) $1{,}26 \times 10^{-4}$ T; (b) 0; (c) $1{,}26 \times 10^{-4}$ T; (d) sim; (e) $5{,}04 \times 10^{-8}$ V **25.** (a) 80 μV; (b) horário **27.** (a) 13 μWb/m; (b) 17%; (c) 0 **29.** 3,68 μW **31.** (a) 48,1 mV; (b) 2,67 mA; (c) 0,129 mW **33.** (a) 0,60 V; (b) para cima; (c) 1,5 A; (d) horário; (e) 0,90 W; (f) 0,18 N; (g) 0,90 W **35.** (a) 240 μV; (b) 0,600 mA; (c) 0,144 μW; (d) $2{,}87 \times 10^{-8}$ N; (e) 0,144 μW **37.** (a) 71,5 μV/m; (b) 143 μV/m **39.** 0,15 V/m **41.** (a) 2,45 mWb; (b) 0,645 mH **43.** 1,81 μH/m **45.** (a) aumentando; (b) 0,68 mH **47.** (b) $L_{eq} = \Sigma L_j$, de $j = 1$ a $j = N$ **49.** 59,3 mH **51.** 6,91 **53.** 46 Ω **55.** (a) 8,45 ns; (b) 7,37 mA **57.** (a) 1,5 s **59.** (a) $i[1 - \exp(-Rt/L)]$; (b) $(L/R)\ln 2$ **61.** 25,6 ms **63.** (a) 97,9 H; (b) 0,196 mJ **65.** (a) 18,7 J; (b) 5,10 J; (c) 13,6 J **67.** $1{,}5 \times 10^8$ V/m **69.** (a) 34,2 J/m³; (b) 49,4 mJ **71.** (a) 1,0 J/m³; (b) $4{,}8 \times 10^{-15}$ J/m³ **73.** (a) 1,67 mH; (b) 6,00 mWb **75.** (b) enrolando as espiras dos dois solenóides em sentidos opostos **77.** 13 μH **79.** (a) $(4{,}4 \times 10^7\ \mathbf{m/s^2})\hat{i}$; (b) 0; (c) $(-4{,}4 \times 10^7\ \mathbf{m/s^2})\hat{i}$ **81.** (a) 0,40 V; (b) 20 A **83.** 1,15 W **85.** (a) 2,0 A; (b) 0; (c) 2,0 A; (d) 0; (e) 10 V; (f) 2,0 A/s; (g) 2,0 A; (h) 1,0 A; (i) 3,0 A; (j) 10 V; (k) 0; (l) 0 **87.** 0,520 ms **89.** 12 A/s **91.** (a) 10 A; (b) $1{,}0 \times 10^2$ J **93.** (a) 20 A/s; (b) 0,75 A **95.** (a) 0; (b) $8{,}0 \times 10^2$ A/s; (c) 1,8 mA; (d) $4{,}4 \times 10^2$ A/s; (e) 4,0 mA; (f) 0 **97.** (a) 10 μT; (b) para fora; (c) 3,3 μT; (d) para fora **99.** (a) 3,28 ms; (b) 6,45 ms; (c) ∞; (d) 0; (e) 3,00 ms **101.** (a) 400 A/s; (b) 200 A/s; (c) 0,600 A **103.** 21 mA

Capítulo 31

T 1. (a) $T/2$; (b) T; (c) $T/2$; (d) $T/4$ **2.** (a) 5 V; (b) 150 μJ **3.** (a) permanece a mesma; (b) permanece a mesma **4.** (a) *C, B, A*; (b) 1, *A*; 2, *B*; 3, *S*; 4, *C*; (c) *A* **5.** (a) permanece a mesma; (b) aumenta **6.** (a) 1, atrasada; 2, adiantada; 3, em fase; (b) 3 ($\omega_d = \omega$ para $X_L = X_C$) **7.** (a) aumentar (o circuito é mais capacitivo que indutivo; devemos aumentar C para diminuir X_C e aproximar o circuito da ressonância, na qual $P_{méd}$ é máxima); (b) aproxima **8.** (a) maior; (b) elevador **P 1.** (a) $T/4$; (b) $T/4$; (c) $T/2$; (d) $T/2$ **3.** *b, a, c* **5.** *c, b, a* **7.** *a*, indutor; *b*, resistor; c, capacitor **9.** (a) para a direita, maior (X_L aumenta, o circuito se aproxima da ressonância); (b) para a direita, aumenta (X_C diminui, o circuito se aproxima da ressonância); (c) para a direita, aumenta (ω_d/ω aumenta, o circuito se aproxima da ressonância) **11.** (a) positiva; (b) diminuir (para diminuir X_L e aproximar o circuito da ressonância); (c) diminuir (aumentar X_C e aproximar o circuito da ressonância) **PR 1.** (a) 6,00 μs; (b) 167 kHz; (c) 3,00 μs **3.** 45,2 mA **5.** (a) 1,17 μJ; (b) 5,58 mA **7.** (a) 1,25 kg; (b) 372 N/m; (c) $1{,}75 \times 10^{-4}$ m; (d) 3,02 mm/s **9.** $7{,}0 \times 10^{-4}$ s **11.** (a) 275 Hz; (b) 365 mA **13.** (a) 3,0 nC; (b) 1,7 mA; (c) 4,5 nJ **15.** (a) 6,0; (b) 36 pF; (c) 0,22 mH **17.** (a) 356 μs; (b) 2,50 mH; (c) 3,20 mJ **19.** (a) 1,98 μJ; (b) 5,56 μC; (c) 12,6 mA; (d) −46,9°; (e) +46,9° **21.** (a) 0,180 mC; (b) 70,7 μs; (c) 66,7 W **25.** 8,66 mΩ **29.** (a) 0,65 kHz; (b) 24 Ω **31.** (a) 95,5 mA; (b) 11,9 mA **33.** (a) 6,73 ms; (b) 11,2 ms; (c) um indutor; (d) 138 mH **35.** (a) 267 Ω; (b) −41,5°; (c) 135 mA **37.** (a) 218 Ω; (b) 23,4°; (c) 165 mA **39.** (a) 206 Ω; (b) 13,7°; (c) 175 mA **41.** 7,61 A **43.** 89 Ω **45.** (a) 224 rad/s; (b) 6,00 A; (c) 219 rad/s; (d) 228 rad/s; (e) 0,040 **47.** (a) sim; (b) 1,0 kV **51.** (a) 796 Hz; (b) permanece a mesma; (c) diminui; (d) aumenta **53.** 1,84 A **55.** (a) 12,1 Ω; (b) 1,19 kW **57.** (a) 0,743; (b) adiantada; (c) capacitivo; (d) não; (e) sim; (f) não; (g) sim; (h) 33,4 W; (i) porque, como são dados os valores da tensão e da corrente da fonte, a reatância da carga é conhecida **59.** (a) 117 μF; (b) 0; (c) 90,0 W; (d) 0°; (e) 1; (f) 0; (g) −90°; (h) 0 **61.** (a) 2,59 A; (b) 38,8 V; (c) 159 V; (d) 224 V; (e) 64,2 V; (f) 75,0 V; (g) 100 W; (h) 0; (i) 0 **63.** (a) 2,4 V; (b) 3,2 mA; (c) 0,16 A **65.** (a) 1,9 V; (b) 5,9 W;

(c) 19 V; (d) $5,9 \times 10^2$ W; (e) 0,19 kV; (f) 59 kW **69.** (a) 39,1 Ω; (b) 21,7 Ω; (c) capacitivo **71.** (a) 45,0°; (b) 70,7 Ω **73.** (a) 0,689 μH; (b) 17,9 pJ; (c) 0,110 μC **75.** (a) 2,41 μH; (b) 21,4 pJ; (c) 82,2 nC **77.** (a) 64,0 Ω; (b) 50,9 Ω; (c) capacitivo **79.** (a) −0,405 rad; (b) 2,76 A; (c) capacitivo **81.** 1,84 kHz **83.** (a) $0,577Q$; (b) 0,152 **87.** (a) 6,73 ms; (b) 2,24 ms; (c) um capacitor; (d) 59.0 μF **91.** (a) 165 Ω; (b) 313 mH; (c) 14,9 μF **93.** (a) 168 Ω; (b) diminuir; (c) diminuir; (d) diminuir **95.** 7,08 mH **97.** (a) 4,00 μF, 5,00 μF, 5,00 μF, 5,00 μF; (b) 1,78 kHz, 1,59 kHz, 1,59 kHz, 1,59 kHz; (c) 12,0 Ω, 12,0 Ω, 6,00 Ω, 4,00 Ω; (d) 19,8 Ω, 22,4 Ω, 19,9 Ω, 19,4 Ω; (e) 0,605 A, 0,535 A, 0,603 A, 0,619 A

Capítulo 32

T **1.** *d, b, c, a* (zero) **2.** *a, c, b, d* (zero) **3.** *b*, *c* e *d* empatados, *a* **4.** (a) 2; (b) 1 **5.** (a) afastá-las; (b) na direção oposta; (c) menor **6.** (a) aproximá-las; (b) na direção do ímã; (c) menor **P** **1.** a, diminuindo; b, diminuindo **3.** 1 *a*, 2 *b*, 3 *c* e *d* **5.** (a) *a* e *b* empatados, *c*, *d*; (b) nenhuma (a placa não possui simetria circular); (c) nenhuma **7.** (a) 1 para cima, 2 para cima, 3 para baixo; (b) 1 para baixo, 2 para cima, 3 nula **9.** ganha energia **11.** (a) 1, 3, 2; (b) 2 **PR** **1.** +3 Wb **3.** (a) 47,4 μWb; (b) para dentro **5.** $2,4 \times 10^{13}$ V/m · s **7.** (a) 1,9 pT **9.** (a) $1,18 \times 10^{-19}$ T; (b) $1,06 \times 10^{-19}$ T **11.** (a) $5,01 \times 10^{-22}$ T; (b) $4,51 \times 10^{-22}$ T **15.** $7,5 \times 10^5$ V/s **17.** (a) 0,63 μT; (b) $2,3 \times 10^{12}$ V/m · s **19.** (a) 0,71 A; (b) 0; (c) 2,8 A **21.** (a) 2,0 A; (b) $2,3 \times 10^{11}$ V/m · s; (c) 0,50 A; (d) 0,63 μT · m **23.** (a) 0,324 V/m; (b) $2,87 \times 10^{-16}$ A; (c) $2,87 \times 10^{-18}$ **25.** (a) 75,4 nT; (b) 67,9 nT **27.** (a) 27,9 nT; (b) 15,1 nT **29.** (a) 7,60 μA; (b) 859 kV · m/s; (c) 3,39 mm; (d) 5,16 pT **31.** 55 μT **33.** (a) $-9,3 \times 10^{-24}$ J/T; (b) $1,9 \times 10^{-23}$ J/T **35.** (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) $\pm 3,2 \times 10^{-25}$ J; (e) $-3,2 \times 10^{-34}$ J · s; (f) $2,8 \times 10^{-23}$ J/T; (g) $-9,7 \times 10^{-25}$ J; (h) $\pm 3,2 \times 10^{-25}$ J **37.** (b) $+x$; (c) horário; (d) $+x$ **39.** 20,8 mJ/T **41.** sim **43.** (b) K_i/B; (c) $-z$; (d) 0,31 kA/m **47.** (a) 3,0 μT; (b) $5,6 \times 10^{-10}$ eV **49.** $5,15 \times 10^{-24}$ A · m² **51.** (a) 0,14 A; (b) 79 μC **53.** (a) $1,8 \times 10^2$ km; (b) $2,3 \times 10^{-5}$ **57.** (a) $6,3 \times 10^8$ A; (b) sim; (c) não **59.** (a) 27,5 mm; (b) 110 mm **61.** (a) 7; (b) 7; (c) $3h/2\pi$; (d) $3eh/4\pi m$; (e) $3,5h/2\pi$; (f) 8 **63.** (a) 9; (b) $3,71 \times 10^{-23}$ J/T; (c) $+9,27 \times 10^{-24}$ J; (d) $-9,27 \times 10^{-24}$ J **65.** 0,84 kJ/T **67.** (a) $-8,8 \times 10^{15}$ V/m · s; (b) $5,9 \times 10^{-7}$ T · m **69.** (a) $(1,2 \times 10^{-13}\ \text{T}) \exp[-t/(0,012\ \text{s})]$; (b) $5,9 \times 10^{-15}$ T **71.** 8,0 A **73.** (b) $-x$; (c) anti-horário; (d) $-x$ **75.** (b) negativo; (c) não, porque existe um fluxo positivo penetrando na base do cilindro mais próxima do ímã

Índice

As figuras estão identificadas pelos números das páginas em *itálico*; as tabelas estão indicadas por um t após o número da página

Algumas Propriedades Físicas

Ar (seco, a 20°C e 1 atm)	
Massa específica	1,21 kg/m^3
Calor específico a pressão constante	1010 J/kg · K
Razão entre os calores específicos	1,40
Velocidade do som	343 m/s
Rigidez dielétrica	3×10^6 V/m
Massa molar efetiva	0,0289 kg/mol
Água	
Massa específica	1000 kg/m^3
Velocidade do som	1460 m/s
Calor específico a pressão constante	4190 J/kg · K
Calor de fusão (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporização (100°C)	2260 kJ/kg
Índice de refração (λ = 589 nm)	1,33
Massa molar	0,0180 kg/mol
Terra	
Massa	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Raio médio	$6{,}37 \times 10^6$ m
Aceleração de queda livre na superfície da Terra	9,8 m/s^2
Atmosfera-padrão	$1{,}01 \times 10^5$ Pa
Período de um satélite a uma altitude de 100 km	86,3 min
Raio da órbita geossíncrona	42 200 km
Velocidade de escape	11,2 km/s
Momento dipolar magnético	$8{,}0 \times 10^{22}$ A · m^2
Campo elétrico médio na superfície	150 V/m, para baixo
Distância até	
A Lua	$3{,}82 \times 10^8$ m
O Sol	$1{,}50 \times 10^{11}$ m
A estrela mais próxima	$4{,}04 \times 10^{16}$ m
O centro da nossa galáxia	$2{,}2 \times 10^{20}$ m
A galáxia de Andrômeda	$2{,}1 \times 10^{22}$ m
O limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

Alfabeto Grego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rô	P	ρ
Beta	B	β	Capa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gama	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi	M	μ	Ípsilon	Y	υ
Epsílon	E	ϵ	Ni	N	ν	Fi	Φ	ϕ, φ
Zeta	Z	ζ	Csi	Ξ	ξ	Qui	X	χ
Eta	H	η	Ômicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω

Algumas Constantes Físicas*

Velocidade da luz	c	$2{,}998 \times 10^{8}$ m/s
Constante gravitacional	G	$6{,}673 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Avogadro	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$ mol⁻¹
Constante universal dos gases	R	8,314 J/mol · K
Relação entre massa e energia	c^2	$8{,}988 \times 10^{16}$ J/kg
		931,49 MeV/u
Permissividade elétrica do vácuo	ε_0	$8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$1{,}257 \times 10^{-6}$ H/m
Constante de Planck	h	$6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s
		$4{,}136 \times 10^{-15}$ eV · s
Constante de Boltzmann	k	$1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K
		$8{,}617 \times 10^{-5}$ eVK
Carga elementar	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C
Massa do elétron	m_e	$9{,}109 \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1{,}675 \times 10^{-27}$ kg
Massa do dêuteron	m_d	$3{,}344 \times 10^{-27}$ kg
Raio de Bohr	a	$5{,}292 \times 10^{-11}$ m
Magnéton de Bohr	μ_B	$9{,}274 \times 10^{-24}$ J/T
		$5{,}788 \times 10^{-5}$ eV/T
Constante de Rydberg	R	$1{,}097\,373 \times 10^{7}$ m⁻¹

*Uma lista mais completa, que mostra também os melhores valores experimentais, está no Apêndice B.

Alguns Fatores de Conversão*

Massa e Massa Específica

1 kg = 1000 g = $6{,}02 \times 10^{26}$ u
1 slug = 14,59 kg
1 u = $1{,}661 \times 10^{-27}$ kg
1 kg/m³ = 10^{-3} g/cm³

Comprimento e Volume

1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft
1 mi = 1,61 km = 5280 ft
1 in = 2,54 cm
1 nm = 10^{-9} m = 10 Å
1 pm = 10^{-12} m = 1000 fm
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 m³ = 1000 L = 35,3 ft³ = 264 gal

Tempo

1 d = 86 400 s
1 ano = 365 d 6 h = $3{,}16 \times 10^{7}$ s

Ângulos

1 rad = 57,0° = 0,159 rev
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidade

1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mi/h
1 km/h = 0,621 mi/h = 0,278 m/s

Força e Pressão

1 N = 10^{5} dina = 0,225 lb
1 lb = 4,45 N
1 t = 2000 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dina/cm²
= $1{,}45 \times 10^{-4}$ lb/in²
1 atm = $1{,}01 \times 10^{5}$ Pa = 14,7 lb/in²
= 76,0 cm Hg

Energia e Potência

1 J = 10^{7} erg = 0,2389 cal = 0,738 ft · lb
1 kW · h = $3{,}6 \times 10^{6}$ J
1 cal = 4,1868 J
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 hp** = 746 W = 550 ft·lb/s

Magnetismo

1 T = 1 Wb/m² = 10^{4} gauss

*Uma lista mais completa está no Apêndice D.
**A unidade de potência hp é uma abreviatura do inglês *horsepower*, que não corresponde exatamente ao cavalo-vapor (cv), que é igual a 735,5 W (N.T.)

Sobre a capa

A capa é uma imagem de Eric J. Heller que mostra as trajetórias de elétrons em uma superfície com irregularidades microscópicas. Os 100.000 elétrons partem do canto superior direito e se espalham para formar um desenho complexo ao se dirigirem para o canto inferior esquerdo.

O movimento dos elétrons é tratado em vários capítulos deste livro, e é especialmente importante na discussão sobre centelhas elétricas. Algumas centelhas são inofensivas, como os clarões azuis produzidos quando alguém mastiga uma pastilha de gaultéria em um quarto escuro (Capítulo 21). Outras centelhas podem ser muito perigosas, como as descargas eletrostáticas que podem causar a explosão de um pó industrial (Capítulo 25).

Ocupe Seu Lugar — O Espetáculo Vai Começar!

Esta 8ª edição de **Fundamentos de Física** contém centenas de exemplos interessantes extraídos da vida real, no espírito do livro de Jearl Walker **O Circo Voador da Física**. A primeira edição de **O Circo Voador da Física**, no mercado há mais de 30 anos em 10 idiomas, tornou-se um clássico para estudantes de física, professores de física e o público em geral. A segunda edição, lançada nos Estados Unidos em 2007, foi publicada recentemente em português pela LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional.

LTC
www.ltceditora.com.br

ISBN 978-85-216-1607-8